ОБЩИЙ КУРС ФИЗИКИ

Д.В. Сивухин

МЕХАНИКА

ТОМ I



УДК 530.1(075.8)
С34
ББК 22.2

Сивухин Д. В. **Общий курс физики.** Учеб. пособие: Для вузов. В 5 т. Т. I. **Механика.** — 4-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2005. — 560 с. — ISBN 5-9221-0225-7; 5-89155-078-4.

Первый том курса физики, широко известного у нас в стране и за рубежом. Книга написана на основе лекций, которые в течение ряда лет читались автором студентам Московского физико-технического института. Основное внимание уделено выяснению физического смысла и содержания основных законов и понятий механики, установлению границ применимости этих законов, развитию у студентов навыков физического мышления и умения ставить и решать конкретные задачи.

Третье издание первого тома вышло в 1989 г.

Для студентов физических и математических факультетов университетов, физико-технических и инженерно-физических институтов, а также вузов, где физика является основной дисциплиной.

Учебное издание

СИВУХИН Дмитрий Васильевич

ОБЩИЙ КУРС ФИЗИКИ

Том I

МЕХАНИКА

Редактор *Д. А. Миртова*
Оригинал-макет: *А. И. Чугуров*
Оформление переплета: *А. Ю. Алехина*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 15.12.04. Формат 60×90/16. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 35. Уч.-изд. л. 36,45. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117864 Москва, Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru; http://www.fml.ru

Издательство МФТИ
141700 Долгопрудный, Московская обл., Институтский пер., 9

При участии издательской и книготорговой фирмы «ФИЗМАТКНИГА»
141700 Долгопрудный, Московская обл., Институтский пер., 9
Тел.: (095) 408-76-81, 409-93-28

Интернет-магазин физико-математической литературы:
http://www.fizmatkniga.ru

Отпечатано с диапозитивов в РГУП «Чебоксарская типография № 1»
428019 Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

ISBN 5-9221-0225-7 (Т. I)
ISBN 5-9221-0229-X
ISBN 5-89155-078-4 (Т. I)
ISBN 5-89155-077-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА IV
РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

ГЛАВА V
МОМЕНТ ИМПУЛЬСА

ГЛАВА VI
ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

ГЛАВА VII
МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

ГЛАВА VIII

ТЯГОТЕНИЕ

ГЛАВА IX

ДВИЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОТСЧЕТА

ГЛАВА X

МЕХАНИКА УПРУГИХ ТЕЛ

ГЛАВА XI

МЕТОДЫ ПОДОБИЯ И РАЗМЕРНОСТИ

ГЛАВА XII

МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Четвертое издание первого тома выходит уже после смерти создателя фундаментального «Общего курса физики», выдающегося педагога и подвижника-ученого Д. В. Сивухина. За многие годы, прошедшие со дня опубликования первого издания, книга стала неотъемлемой частью учебного процесса в вузах, готовящих инженеров по специальностям, требующим глубокой подготовки по физике. За эти годы книга нисколько не устарела и не потеряла своей привлекательности, поскольку автор акцентирует внимание читателя не на описательной стороне физических демонстраций, а на физическом смысле рассматриваемых явлений и понятий физики.

Данное учебное пособие выгодно отличает стройность и ясность логических построений. Широкий охват рассматриваемых вопросов при их глубоком изучении делает книгу сравнимой с физической энциклопедией.

Четвертое издание ничем не отличается от третьего, вышедшего в издательстве «Наука» в 1989 г. В текст лишь внесены необходимые несущественные уточнения с целью исправления допущенных опечаток.

Издательство МФТИ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Третье издание первого тома выходит уже после написания всех пяти томов «Общего курса физики», поэтому автор имел возможность внимательно просмотреть весь первый том и внести в него изменения, которые, по его мнению, улучшили изложение.

Впрочем, план и построение курса остались прежними. Кое-что добавлено, исключено и заменено. Общее число и нумерация параграфов и пунктов остались без изменения.

Для третьего издания книга была тщательно прорецензирована профессором С. А. Ахмановым и доцентом С. С. Чесноковым, которые сделали ряд существенных замечаний, учтенных автором. Выражаю им искреннюю благодарность.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Основное содержание предлагаемого курса составляет расширенное изложение лекций по физике, которые автор читал в течение многих лет (начиная с 1956 г.) в Московском физико-техническом институте. Общий план лекционного курса, а также основной подход к изложению принципиальных вопросов физики на протяжении всех лет менялись мало. Однако с каждым годом курс обновлялся включением новых вопросов частного порядка и примеров; многие ранее рассматривавшиеся вопросы при этом исключались. Делалось это не по принципиальным соображениям, а из-за недостатка времени.

В настоящий курс вошли практически все вопросы, излагавшиеся на лекциях в разные годы. Вошли также и такие вопросы, которые на лекциях не излагались. Они занимают около 10—15% текста. Кроме того, включено много задач с ответами или подробными решениями. Весь этот материал может оказать пользу студентам при углубленном изучении физики и преподавателям при проведении семинарских занятий. Он, как надеется автор, будет способствовать развитию у студентов навыков физического мышления и умения самостоятельно ставить и решать принципиальные вопросы и конкретные физические задачи, что и является главной целью предлагаемого руководства. Разумеется, не весь этот материал является обязательным. Для удобства читателя основной материал крупным шрифтом, вспомогательный — мелким.

В устном преподавании большое внимание уделялось лекционным демонстрациям. Лекционные демонстрации, а также лабораторные работы являются наилучшим средством для наглядного ознакомления студентов с физическими явлениями. Их не может заменить никакое самое образное и точное описание явления. Лекционные демонстрации, как очень важная и неотъемлемая часть лекционного курса, дают необходимый опытный материал, на основе которого вводятся физические понятия и обобщения, формулируются и уясняются физические законы и принципы. Кроме того, они оживляют читаемый курс и придают ему эстетическую привлекательность.

В книге изложение носит несколько иной характер. Много демонстраций опущено, а описание остальных дано схематично без указания технических и экспериментальных подробностей. На первый план выступает логическая сторона предмета. Главное внимание обращается на выяснение физического смысла и содержания основных положений и понятий физики. Много внимания уделяется установлению границ применимости физических законов, а также идеализированных моделей и схем, применяемых в физике.

В предлагаемом томе курса физики дано систематическое изложение физических основ классической нерелятивистской механики. Однако излагать физические основы механики без всякой связи с другими разделами физики невозможно. Поэтому уже в первом томе дается некоторое представление об идеях теории относительности и квантовой механики. Без этого невозможно точно установить границы применимости классической нерелятивистской механики. Необходимые сведения из квантовой механики даны кратко без какого бы то ни было обоснования и обсуждения. О релятивистской механике или механике теории относительности говорится более подробно. В основу изложения положена зависимость массы от скорости, рассматриваемая как экспериментальный факт. Этого достаточно не только для качественного рассмотрения, но и для количественного решения простейших задач, примеры которых приводятся в книге. Однако систематическое изложение вопросов релятивистской и квантовой механики будет дано в других томах курса — после изложения электрических и оптических явлений.

В следующих томах курса предполагается изложить термодинамику и молекулярную физику, электричество, оптику, атомную и ядерную физику.

Основной системой единиц, принятой в курсе, является система СГС. В механике она по существу не отличается от Международной системы единиц СИ. Различие между ними здесь чисто количественное и сводится к различному выбору масштабов единиц длины и массы (вместо сантиметра (в системе СГС) в системе СИ используется метр, вместо грамма — килограмм). Это не сказывается на смысле физических понятий и виде физических формул, а потому в механике обе системы одинаково удобны. Не так обстоит дело в электродинамике. В системе СИ электрическое состояние вакуума характеризуется четырьмя векторами: напряженностью электрического поля **E** и электрическим смещением **D**, напряженностью **H** и магнитной индукцией **B** магнитного поля. Это с физической точки зрения является ненужным и противоестественным усложнением. В системе СГС для характеристики вакуума достаточно двух векторов. Все четыре вектора **E**, **B**, **H**, **D** в системе СГС имеют одинаковую размерность, в системе СИ их размерности разные. Это также противоестественно, поскольку электрическое и магнитное поле тесно связаны между собой. В наиболее общем виде связь между этими векторами устанавливается в релятивистской электродинамике. Она объединяет векторы **E** и **B**, а также **H** и **D** в четырехмерные антисимметричные тензоры. При составлении таких тензоров в системе СИ надо вводить специальные размерные множители для уравнивания размерностей их компонентов. Это также ненужное усложнение. Можно указать только одно преимущество системы СИ по сравнению с системой СГС. В систему СИ органически входят ампер, вольт, ом и все производные этих единиц, получившие благодаря историческим случайностям широкое распространение в элек-

тротехнике. Это преимущество практическое, но не принципиальное. Однако чисто измерительные вопросы будут занимать в настоящем курсе ничтожное место. Ради них нет смысла приносить в жертву стройность и логичность физических понятий и формул, которыми характеризуется система СГС.

Появление настоящего курса было бы невозможно, если бы профессор Г. С. Горелик, возглавлявший кафедру физики Московского физико-технического института, не привлек автора к чтению лекций по общему курсу физики. Автор обсуждал с ним различные вопросы физики и ее преподавания.

Демонстрации для лекций готовили и осуществляли мои ассистенты М. И. Маклаков, В. А. Кузнецова, Е. Н. Морозов, В. П. Молчанов, Л. Д. Кудряшева, Г. Н. Фрейберг. Хотя далеко не все из этих демонстраций описаны в курсе, все они дали ценный материал, использованный при его написании.

Значительная часть задач, включенных в курс, предлагалась студентам на письменных экзаменах, а затем использовалась на семинарских занятиях. В их составлении принимали участие многие преподаватели кафедры физики МФТИ.

Рукопись настоящего тома была частично просмотрена академиком В. Л. Гинзбургом, Б. Б. Кадомцевым, М. А. Леонтовичем, Р. З. Сагдеевым; профессорами С. С. Герштейном и Н. А. Яковлевым. Она подверглась внимательному рецензированию и обсуждению на кафедре общей физики для механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, возглавлявшейся профессором С. П. Стрелковым.

Доброжелательная критика, советы и пожелания всех лиц, упомянутых в настоящем предисловии, немало способствовали улучшению книги. Всем им автор выражает глубокую благодарность.

ВВЕДЕНИЕ

1. При изучении всякого круга явлений очень важно установить основные законы или принципы, с помощью которых можно объяснить все известные явления из рассматриваемого круга, а также предсказать новые. Такой подход к изучению явлений природы получил название *метода принципов*. Основоположником его в физике является великий Исаак Ньютон (1643—1727). Непревзойденным мастером метода принципов был и великий физик Альберт Эйнштейн (1879—1955).

Сами основные законы или принципы не могут быть доказаны логически. Их доказательством является опыт. Основное значение имеют не столько опыты по непосредственной проверке самих принципов, сколько опыты, на которых проверяются вытекающие из них следствия. В этом смысле основные принципы являются *обобщениями опытных фактов*. Но никакие опыты никогда не охватывают все разнообразие условий, в которых могут протекать явления, а измерения всегда сопровождаются погрешностями. Поэтому *опытным путем* (а другого пути нет) *можно установить справедливость принципов лишь в ограниченных пределах и с ограниченной точностью*. При расширении круга изучаемых явлений и повышения точности измерений могут расшириться и эти пределы. Но может случиться, что вне определенных границ основные принципы перестанут быть справедливыми. Тогда возникнет необходимость в их обобщении или замене новыми принципами, имеющими более широкую область применимости. Старые принципы при этом не утратят своего значения. Но ими можно будет пользоваться только внутри установленной области применимости. Сила и привлекательность метода принципов в том, что весь материал, полученный из основных принципов логическим и математическим путем, является достоверным, конечно, в пределах тех границ, в которых основные принципы доказаны экспериментально, и с той точностью, с которой были выполнены эксперименты.

2. Раньше других разделов физики развилась *механика. Механика есть наука о движении и равновесии тел. В широком смысле слова движение материи есть всякое изменение ее. Однако под движением в механике понимается только простейшая форма его, а именно перемещение тела относительно других тел.* Принципы механики впервые были сформулированы Ньютоном в его основном сочинении «Математические начала натуральной философии», первое издание которого вышло в 1687 г. Ньютон имел, правда, много крупных предшественников: Архимеда (ок. 287—212 до н. э.), Иоганна Кеплера (1571—1630), Галилео Галилея (1564—1642), Христиана Гюйгенса (1629—1695) и др., решивших немало частных вопросов статики и отчасти динамики. Однако Ньютон был первым,

кто сформулировал полную систему принципов механики и на их основе воздвиг стройное здание этой науки. Громадные достижения механики Ньютона, а также его непререкаемый научный авторитет почти на 200 лет отвлекли внимание ученых от недостатков его системы механики. Серьезное критическое отношение к механике Ньютона возникло лишь во второй половине XIX века.

После Ньютона механика быстро развивалась. Однако до начала XX века это развитие шло в основном в направлении совершенствования математических методов механики и применения ее законов ко все новым и новым областям знания. Оно не затрагивало содержания основных принципов и физические представления механики Ньютона. Ничего принципиально нового в физические основы механики внесено не было вплоть до XX века, когда положение изменилось.

Хотя механика Ньютона и покоится на прочном фундаменте экспериментальных фактов, однако все они относятся к медленным движениям макроскопических тел. *Макроскопическими* называют обычные тела, окружающие нас, т. е. тела, состоящие из громадного количества молекул или атомов. Под *медленными* или *нерелятивистскими движениями* понимают движения, скорости которых очень малы по сравнению со скоростью света в вакууме $c = 300\,000$ км/с. Движения, скорости которых приближаются к скорости света в вакууме, называют *быстрыми* или *релятивистскими*. В этом смысле движение спутника или космического корабля со скоростью $v = 8$ км/с является еще очень медленным. В том же смысле очень медленными движениями являются движения планет Солнечной системы, их спутников и комет относительно Солнца. Применяя к таким телам принципы механики Ньютона, удалось объяснить и предсказать их движение в полном соответствии с наблюдениями. Это явилось первым и притом наиболее убедительным доказательством справедливости механики Ньютона. Движение искусственных спутников и космических кораблей также находится в полном соответствии с расчетами, производимыми на основе механики Ньютона.

3. Можно ли экстраполировать на случай быстрых движений принципы механики Ньютона, экспериментально установленные для медленных движений макроскопических тел? Можно ли применять основные понятия и принципы механики Ньютона к явлениям микромира, т. е. явлениям, происходящим с отдельными молекулами, атомами, электронами, протонами, нейтронами и прочими «элементарными частицами»? На эти вопросы логически ответить сразу нельзя. Ответ на них могут дать лишь опыты с быстро движущимися телами, а также опыты с отдельными атомами, электронами и пр. Такие опыты были поставлены только в XX веке. Они показали, что на оба вопроса в общем следует дать отрицательный ответ.

Теория относительности Эйнштейна предсказала, а опыт подтвердил это предсказание, что механика Ньютона не может быть

применима к движениям частиц, скорости которых близки к скорости света в вакууме. На основе теории относительности была создана новая механика, применимая не только к медленным, но и к сколь угодно быстрым движениям. Она называется *релятивистской механикой*, или *механикой теории относительности*. Согласно механике Ньютона скорость, до которой можно ускорить тело из состояния покоя, в принципе ничем не ограничена. По релятивистской механике значение скорости ускоряемого тела не может перейти через определенный предел, равный скорости света в вакууме c. В этом смысле скорость света c является *предельной*. Скорость тела не может ее достигнуть, но в принципе может подойти к ней сколь угодно близко. В современных ускорителях, например, получаются частицы с энергией порядка 500 ГэВ ($5 \cdot 10^{14}$ эВ). Скорость протонов таких энергий меньше скорости света всего на $5{,}25 \cdot 10$ см/с, а скорость электронов — на $1{,}5 \cdot 10^{-2}$ см/с. В космических лучах регистрировались протоны, скорость которых меньше скорости света всего на величину порядка 10^{-8} см/с. К движениям таких быстрых частиц нерелятивистская механика Ньютона совершенно не применима. Ускорители рассчитываются на основе релятивистской механики Эйнштейна, и то обстоятельство, что они работают в согласии с расчетами, является одним из наиболее убедительных и прямых экспериментальных доказательств правильности релятивистской механики.

4. Теория относительности установила границы применимости ньютоновской механики со стороны *больших скоростей*. Другое ограничение, и притом не только ньютоновской, но и релятивистской макроскопической механики, было получено в результате изучения *микромира* — мира атомов, молекул, электронов и пр.

При изучении микромира сначала применяли понятия и законы, введенные и установленные для макроскопических тел. Электрон, например, рассматривался как твердый или деформируемый шарик, по объему которого распределен электрический заряд. Считалось, что поведение электрона управляется теми же законами механики и электродинамики, которые были экспериментально установлены для макроскопических электрически заряженных тел; что все понятия и законы макроскопической физики применимы и имеют смысл для тел сколь угодно малых размеров и сколь угодно малых промежутков времени; что для понимания явлений микромира не требуется новых понятий и законов, помимо тех, которыми располагает макроскопическая физика, т.е. микромир рассматривался просто как уменьшенная копия макромира. Такой подход к изучению явлений природы и теории, основанные на нем, называются *классическими*.

Вопрос о применимости или неприменимости классического подхода к изучению микромира не может быть решен умозрительно. На этот вопрос может ответить только опыт. Опыты показали,

что *классический подход к изучению явлений микромира не применим*, или точнее, *его применимость к этому кругу явлений ограничена.* Адекватное описание явлений микромира (применимое, конечно, также в каких-то пределах) дает *квантовая механика*, существенно отличающаяся от механики классической. Квантовая механика вводит радикальные изменения в наши представления о движении. Так, классическая картина движения частицы вдоль траектории, в каждой точке которой частица имеет определенную скорость, в общем случае не применима при описании движения микрочастиц. Движение в микромире является более сложной формой движения, чем механическое перемещение тел в пространстве. Вообще, описание явлений в квантовой механике лишено наглядности в том смысле, что здесь требуются *принципиально новые* представления и понятия, не сводимые к привычным представлениям и понятиям, возникающим при изучении макроскопических объектов. Поскольку наш курс механики посвящен изучению движения макроскопических тел, нет необходимости останавливаться на дальнейшей характеристике квантовой механики. Достаточно указать границы применимости понятий и законов, которыми мы будем пользоваться (см. § 5.)

5. Таким образом, *механика Ньютона может быть охарактеризована как классическая нерелятивистская механика. Это значит, что она изучает медленные движения макроскопических тел.*

Релятивистская и квантовая механики являются более общими теориями, чем механика Ньютона. Последняя содержится в них как приближенный предельный случай. Релятивистская механика переходит в механику Ньютона в случае медленных движений. Квантовая механика переходит в механику Ньютона в случае медленных движений. Квантовая механика переходит в механику Ньютона в случае тел достаточно больших масс, движущихся в достаточно плавно меняющихся силовых полях. Это не означает, что механика Ньютона утратила свое значение. Во многих случаях фактические изменения, вносимые теорией относительности и квантовой механикой, сводятся к небольшим поправкам к ньютоновской механике. Они называются соответственно *релятивистскими* и *квантовыми*. Эти поправки в случае обычных медленных движений макроскопических тел столь ничтожны, что, как правило, далеко выходят за пределы точности самых тонких физических измерений. Кроме того, уже простейшие задачи на движение макроскопических тел, с которыми механика Ньютона легко справляется, привели бы к непреодолимым математическим трудностям при попытке найти их точные решения методами релятивистской и квантовой механик. Чтобы практически получить решение, надо было бы ввести упрощения и перейти к приближенным методам, а это по своему результату эквивалентно переходу к механике Ньютона.

Если, например, движение космического корабля относительно Земли рассчитывается по законам механики Ньютона, не учитывающей релятивистские эффекты, то при скорости корабля $v = 8$ км/с возникающая вследствие этого относительная погрешность будет порядка $(v/c)^2 = (8/300\,000)^2 \sim 10^{-9}$. Таким образом, здесь механика Ньютона обеспечивает погрешность вычислений до 10^{-7}%. Вводить в подобных случаях релятивистские поправки не только не нужно, но и иллюзорно, хотя бы уже потому, что входные параметры, необходимые при расчетах, могут быть определены с несравненно меньшей точностью. Кроме того, в этом нет практической необходимости.

Таким образом, механика Ньютона имеет очень широкую и практически важную область применимости. В пределах этой области она никогда не утратит своего научного и практического значения. Отказываться от механики Ньютона надо лишь вне области ее применимости, когда она приводит либо к неверным, либо к недостаточно точным результатам. Такова, например, задача о движении заряженных частиц в ускорителях, где надо пользоваться релятивистской механикой. Таковы задачи о движении электронов в атомах, которые надо решать с помощью квантовой механики.

6. Чтобы дать представление о величине поправок, вносимых общей теорией относительности в механику Ньютона, полезно рассмотреть движение планет Солнечной системы. Скорость планеты очень мала по сравнению со скоростью света в вакууме. В этом смысле движение планеты является медленным; к нему применима механика Ньютона. На основе применения закона всемирного тяготения (сила гравитационного притяжения двух точечных тел пропорциональна их массам и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними), ньютоновская механика позволяет прийти к заключению, что планета движется вокруг Солнца по замкнутой траектории, а именно по эллипсу. Астрономические наблюдения в этот результат вносят лишь маленькую поправку. Траектория планеты не совсем замкнута. Планета практически вращается по эллипсу, но его перигелий (ближайшая к Солнцу точка) медленно смещается в том же направлении, в котором вращается сама планета. Это явления называется *прецессией* орбиты. Наибольшее смещение перигелия наблюдается у Меркурия. Меркурий находится ближе всего к Солнцу, т. е. солнечное гравитационное поле для него громадно. Кроме того, его траектория наиболее вытянута. Поэтому в дальнейшем речь будет идти в основном о смещении перигелия Меркурия.

Замкнутая эллиптическая траектория Меркурия в ньютоновской механике получается в предположении, что Меркурий подвергается гравитационному воздействию одного лишь Солнца — воздействием остальных планет пренебрегается; возмущающее же действие всех остальных планет приводит к смещению перигелия Меркурия в

нужном направлении. Это и есть основная, но не единственная причина этого явления. Французский астроном Урбен Леверье (1811—1877) рассчитал орбиту Меркурия на основе механики Ньютона и закона всемирного тяготения. Он нашел, что наибольший вклад в смещение вносит ближайшая к Меркурию планета Венера (280,6″ в столетие), затем идет самая большая планета Юпитер (152,6″), Земля (83,6″), Сатурн (7,2″), Марс (2,6″), Уран (0,1″). Общий вклад всех планет в смещение составил 527″ в столетие. Действительное смещение в столетие — по Леверье — оказалось на 39″ больше.

Американский астроном Саймон Ньюком (1835—1909) в 1882 г. подтвердил и уточнил вычисления Леверье: вместо 39″ он получил число 42,95″, которое и применяется в настоящее время в расчетах. Это число получило название *аномального смещения* перигелия Меркурия. Таким образом, полное смещение перигелия Меркурия составляет 5,70″ в год, а период обращения — около 227 000 лет.

Было немало попыток объяснить аномальное смещение перигелия Меркурия, оставаясь в рамках ньютоновской механики. Леверье ввел гипотезу, что аномальное смещение вызывается неизвестной планетой (Вулканом), находящейся между Солнцем и орбитой Меркурия. Хуго Зелигер (1849—1924) пытался объяснить недостающее смещение влиянием околосолнечного вещества, вызывающего зодиакальный свет. Многие ученые (в их числе и Ньюком) вводили различные малые поправки в закон всемирного тяготения Ньютона. Так, делались попытки заменить в формуле $f \propto 1/r^2$ показатель на $2 + \delta$, где δ — малая поправка. Вводились предположения о зависимости гравитационной силы от скорости и ускорения взаимодействующих частиц. Но все это представляет только исторический интерес.

Аномальное смещение перигелия Меркурия без каких-либо специальных предположений автоматически получается в общей теории относительности, окончательно созданной Эйнштейном к концу 1925 г. Эта теория органически включает и теорию тяготения, переходящую в ньютоновскую в слабых гравитационных полях. В отношении смещения перигелия Меркурия получается полное количественное согласие теории с опытом. Аномальное смещение испытывает не только перигелий Меркурия, но и перигелии других планет. Однако для этих планет смещение значительно меньше. Так, аномальное смещение перигелия земной орбиты составляет около 4″ в столетие.

Прецессию совершают и орбиты компонентов двойных звезд. Это есть также эффект общей теории относительности. В 1981 г. такую прецессию обнаружил Х. Ф. Халиуллин (р. 1942) в Государственном астрономическом институте им. П. К. Штернберга в движении затменной двойной звезды EK Цефея. Орбита каждой компоненты

двойной звезды практически не отличается от эллиптической. Но ось эллипса медленно поворачивается в плоскости орбиты на 4,6′ в год, т. е. период полной процессии составляет 4700 лет (для Меркурия — 227 000 лет).

В настоящее время изучаются и другие, более тонкие, эффекты общей теории относительности при движении близких планет Солнечной системы и их спутников. Возможность такого изучения обусловлена двумя обстоятельствами. Во-первых, движение системы взаимодействующих тел в общей теории относительности описывается сложной системой нелинейных уравнений, которые аналитически решены быть не могут. Зато их можно решить численно с помощью ЭВМ. Во-вторых, вычисленные малые отступления от механики Ньютона могут быть обнаружены благодаря возросшей точности измерения расстояний с использованием лазерной техники.

ГЛАВА I

КИНЕМАТИКА

§ 1. ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ

1. Как уже было сказано во введении, в механике *движением* называют изменения положения тел в пространстве с течением времени. Под положением здесь понимается *относительное положение*, т. е. положение тела относительно других тел. Понятие абсолютного положения, т. е. положения тела в каком-то «абсолютном пространстве» безотносительно к другим телам, лишено смысла.

Тело или система тел, относительно которых определяется положение остальных тел, называется *пространственной системой отсчета.*

Утверждение, что два различных не одновременных события произошли в одном и том же месте пространства, не имеет смысла, пока не указана система отсчета, в которой события рассматриваются. Пассажир в движущемся железнодорожном вагоне взял из своего чемодана какую-то вещь и спустя некоторое время положил ее обратно. Можно сказать, что он взял и положил эту вещь в одном и том же месте, если за систему отсчета принять движущийся вагон. Но те же два события будут происходить в различных местах, если их рассматривать в системе отсчета, связанной с полотном железной дороги. Например, одно событие внутри вагона могло произойти в Москве, а другое — в Ленинграде.

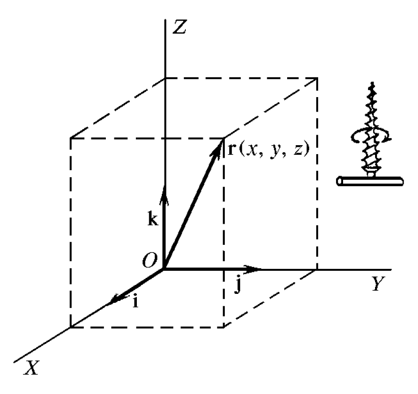


Рис. 1

2. В качестве пространственной системы отсчета можно взять произвольное твердое тело и связать с ним *координатные оси*, например, декартовой прямоугольной системы координат, реализованные в виде трех взаимно перпендикулярных твердых стержней. Положение каждой точки в избранной пространственной системе отсчета можно задавать тремя числами — *координатами точки* x, y, z, представляющими собой расстояния этой точки до координатных плоскостей YZ, ZX, XY соответственно (рис. 1). Три координаты x, y, z можно объединить в один *направленный отре-*

зок, называемый *радиусом-вектором* **r**, проведенный из начала координат в рассматриваемую точку. Координаты x, y, z являются его проекциями на координатные оси, а потому

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \tag{1.1}$$

где **i**, **j**, **k** — *координатные орты*, т. е. единичные векторы, направленные вдоль координатных осей X, Y, Z.

Существуют два вида координатных систем — *правая* и *левая* системы. Их различают с помощью *правила буравчика*. Будем ввинчивать буравчик с правой нарезкой, вращая его ручку в плоскости XY кратчайшим путем от положительного конца оси X к положительному концу оси Y. В правой системе координат (рис. 1) поступательное перемещение буравчика будет происходить в положительном, а в левой (рис. 2) — в отрицательном направлении оси Z. Правая система никакими вращениями не может быть совмещена с левой. Обе системы отличаются друг от друга примерно так же, как правая рука отличается от левой. Но правая система переходит в левую, если положительное направление одной из координатных осей изменить на противоположное. То же самое произойдет, если изменить на противоположные положительные направления всех трех осей. Последняя операция называется *инверсией координатных осей* или *отражением в начале координат*. Например, изображением правой системы в плоском зеркале будет левая система, и наоборот. В физике применяется исключительно правая система.

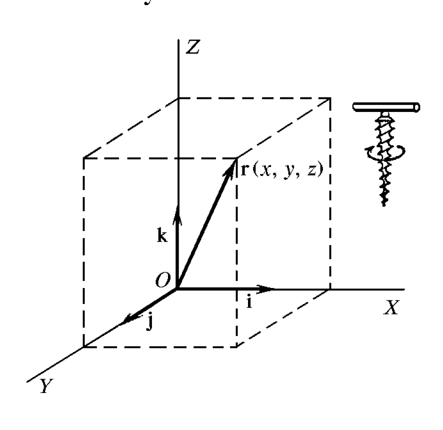


Рис. 2

3. Координаты x, y, z, которыми определяется положение точки в избранной системе отсчета, являются числами. *Количественное определение этих координат, равно как и количественное определение всякой физической величины, сводится в конце концов к указанию принципиального способа их измерения.* При этом имеются в виду *именно принципиальные, а не практические* способы измерения. Эти измерения должны лишь разъяснить смысл, точнее, принципиальный способ получения x, y, z, равно как и всяких чисел, с помощью которых количественно характеризуются все физические величины. Поэтому мы можем предполагать, что такие способы измерения являются *идеальными*, а сами измерения выполняются абсолютно точно. Координаты x, y, z являются длинами, а потому их нахождение сводится к измерению длин, т. е. к определению тех чисел, с помощью которых характеризуются длины. Когда мы говорим об измерении длин, то имеем в виду следующую из-

мерительную операцию. Некоторый твердый стержень условно принимается за эталон, а его длина — за единицу длины. При измерении длины тела в каком-либо направлении определяется число, показывающее, сколько раз в этом направлении в теле укладывается выбранный эталон. Это число и называется длиной тела в рассматриваемом направлении. Если оно не целое, то предварительно длину эталона следует разделить на более мелкие части: десятые, сотые и пр. Используя их наряду с самим эталоном, можно представить длину всякого тела в виде десятичной дроби или целого числа с десятичной дробью.

4. Измерение длины непосредственным прикладыванием эталона или его частей называется *прямым измерением*. Прямые измерения не всегда возможны. Так, они невозможны при измерении расстояний до удаленных тел, например планет, звезд и других небесных объектов. Они невозможны и при измерении очень малых длин, например таких, с которыми имеет дело физика атома, атомного ядра или элементарных частиц. Во всех этих случаях используют *косвенные методы*. Правильность таких методов должна контролироваться прямыми методами (разумеется, в тех случаях, когда последние применимы). За пределами же применимости прямых методов остаются одни только косвенные методы. Здесь прямые измерительные операции, с помощью которых первоначально было введено количественное понятие длины, становятся чисто умозрительными, а косвенные методы фактически играют роль основных принципиальных измерительных операций, которыми раскрывается смысл самих длин или, точнее, тех чисел, которыми длины характеризуются.

Примером косвенного метода может служить *триангуляция*, применяемая для измерения расстояний до удаленных предметов. Прямым методом измеряют длину «базы» AB (рис. 3), с концов которых делают «засечки» удаленного объекта C, т. е. измеряют углы α и β между базой AB и прямыми AC и BC. По этим данным искомое расстояние до объекта C может быть найдено геометрическим построением или вычислено по формулам геометрии. Если база AB настолько велика, что ее длина не может быть найдена прямым измерением, то можно выбрать более короткую базу и затем найти длину базы AB описанным косвенным методом. Принципиально это ничего не меняет. Более существенно уяснить теоретическую основу метода. В методе предполагается, что сторонами треугольника ABC являются *прямые линии, подчиняющиеся аксиомам геометрии Евклида*. Но какими материальными объектами реализуются эти стороны? Такими объектами являются световые лучи, приходящие от объекта C к точкам A и B. Следовательно, в основе рассматриваемого способа лежит гипотеза, что световые лучи прямолинейны, т. е. подчиняются

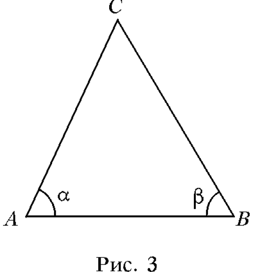


Рис. 3

тем же аксиомам геометрии Евклида, что и геометрические прямые линии. Но эта гипотеза не очевидна. Доказать или опровергнуть ее можно только опытным путем. При этом имеются в виду световые лучи в вакууме, а не лучи в атмосфере, где они действительно искривляются из-за изменения показателя преломления от точки к точке. Такое искривление лучей может быть учтено и действительно учитывается, когда точность измерений этого требует.

Как можно убедиться в применимости или неприменимости геометрии Евклида к реальному миру в указанном выше смысле? Прямой метод состоит в том, что надо подвергнуть экспериментальной проверке следствия, выводимые из аксиом геометрии Евклида. Одним из таких следствий является, например, теорема, утверждающая, что сумма внутренних углов треугольника равняется 180°. Великий немецкий математик, астроном и физик Карл Гаусс (1777—1855) измерял в 1821—1823 гг. со всей возможной тщательностью внутренние углы треугольника, образованного тремя удаленными горными вершинами. Длины сторон треугольника были порядка 100 км. Он нашел, что в пределах ошибок измерений не наблюдалось нарушений указанной теоремы. Этот метод не годится в масштабах Солнечной системы и бóльших, так как все измерения производятся с Земли, и мы не можем непосредственно измерить все три внутренних угла треугольника, вершинами которого помимо Земли являются, например, какие-либо две планеты или звезды. Здесь мы судим о применимости геометрии Евклида на основании косвенных данных — по согласованности различных результатов, полученных с использованием такой геометрии. Так, можно предвычислить движение планет Солнечной системы на много лет вперед и проверить полученные предсказания. Если бы они не оправдались, то одной из причин могла бы быть неприменимость геометрии Евклида к областям пространства порядка размеров Солнечной системы. Наоборот, согласие с опытом (что на самом деле имеет место) указывает на то, что сомневаться в применимости геометрии Евклида в областях такого размера нет оснований. Не вдаваясь в этот вопрос, ограничимся замечаниями, что, по-видимому, нет существенных нарушений геометрии Евклида в областях порядка размеров нашей *Галактики* ($\sim 10^{21}$ м) и даже *Метагалактики*, т. е. части Вселенной, доступной исследованию с помощью современных наиболее мощных оптических и радиотелескопов ($\sim 10^{26}$ м). Точно так же нет оснований ожидать существенных нарушений геометрии Евклида и в субатомных областях размером, скажем, порядка 10^{-15} м.

Световые лучи при определении положения удаленных тел выполняют и другую важную функцию. Они служат теми материальными объектами, с помощью которых конструируется сама система отсчета. Действительно, твердые стержни не могут быть неограниченно длинными, а потому они не пригодны в качестве координат-

ных осей во всем пространстве. Эту роль берут на себя световые лучи, являющиеся продолжениями в нужных направлениях координатных осей, первоначально реализованных твердыми стержнями.

5. В связи с изложенным целесообразно сделать одно замечание о связи физики с математикой. Математика играет исключительно важную роль в физике. Без нее современная физика немыслима. Однако необходимо правильно представлять себе истинную роль математики в физике, и к этому вопросу мы еще будем неоднократно возвращаться. Чистая математика имеет дело с абстрактными объектами и понятиями, подчиняющимися определенной системе аксиом. Единственное требование, предъявляемое в чистой математике к ее понятиям и аксиомам, сводится к их *логической непротиворечивости*. Все свои результаты чистая математика получает из этих аксиом путем логических рассуждений, основанных на правилах формальной логики. Содержание этих результатов, очевидно, не может выйти за пределы логической связи между различными объектами и понятиями чистой математики. В этом смысле чистая математика является логически *замкнутой дисциплиной*. Такая замкнутость и логическая согласованность придают чистой математике эстетическую привлекательность и доставляют чувство глубокого удовлетворения всякому уму, воспитанному в духе математической строгости.

Надо, однако, заметить, что строго замкнутая сама в себе математика оторвана от реальной действительности и не может быть использована в других науках и практической деятельности человека. Чтобы математика стала мощным средством при описании и изучении явлений природы, каким она в действительности является, необходимо установить связи между абстрактными математическими объектами и понятиями, с одной стороны, и реальными объектами и явлениями природы — с другой. Математические понятия и объекты должны появляться не как чисто логические категории, а как *абстракции каких-то реальных объектов или процессов природы*. Так, точка является абстракцией физического тела достаточно малых размеров, прямая линия — абстракцией достаточно тонкого прямого твердого стержня или светового пучка в однородной среде. Вопрос о справедливости математики сводится к справедливости ее аксиом. Справедливость же самих аксиом может быть установлена опытным и только опытным путем.

Правда, опыт с математическими объектами нельзя осуществить в чистом виде, поскольку эти объекты являются идеализациями и не встречаются в природе. Всякий опыт выполняется с реальными телами. Математическую строгость, которой, и не без оснований, так гордятся математики, надо понимать в смысле логической согласованности ее выводов, но не в смысле обоснования математических аксиом.

Одной математической строгости недостаточно для физики, как и для всякой другой опытной науки, имеющей дело с реальными объектами и явлениями природы. *Всякое теоретическое исследование, даже выполненное математически строго, никогда не мо-*

жет считаться и физически строгим. Во-первых, такие исследования всегда основываются на определенных законах, справедливость которых в конце концов доказывается опытным путем, а опыты и физические измерения неизбежно сопровождаются погрешностями, т. е. выполняются с ограниченной точностью. Вне пределов этой точности физический закон может оказаться неверным. Во-вторых, всякий реальный физический объект характеризуется бесконечным разнообразием свойств. Учесть все эти свойства невозможно не только потому, что большинство из них нам просто неизвестно, но и потому, что это практически неосуществимо. *При построении теории физика заменяет реальные объекты их идеализированными моделями, приблизительно правильно передающими не все свойства реальных объектов, а только те из них, которые существенны в рассматриваемом круге вопросов. Какие свойства реальных объектов существенны, а какие не играют заметной роли — на этот вопрос в конце концов может ответить только опыт, которому принадлежит решающее слово в вопросе о правильности всякой физической теории и пределах ее применимости.* Если физический закон применен вне области, где он справедлив, а идеализированная модель правильно передает не все свойства реальных объектов, существенные для рассматриваемого круга явлений, то возникающие вследствие этого пороки теории, понятно, не могут быть исправлены никакой строгостью математических рассуждений и расчетов.

Последнее замечание имеет и практическую ценность. Конечно, после того как идеализированная модель построена, не будет ошибкой производить все дальнейшие расчеты математически абсолютно точно, хотя бы при этом и использовались физические законы, верные только приближенно. Однако сплошь и рядом такие расчеты очень громоздки и даже практически неосуществимы из-за их сложности. Между тем точность уже обесценена неточностью физических законов и несовершенствами идеализированной модели, положенной в основу расчета. Можно и нужно перейти к приближенным расчетам. Такие расчеты столь же хороши, что и «точные», если их погрешности не превосходят погрешностей, обусловленных неточностью применяемых физических законов и несовершенствами идеализированных моделей.

Многие понятия и открытия, которыми по справедливости так гордится математика, не имеют никакого смысла, когда речь заходит о применении этих понятий к реальным объектам. Сюда относится, например, понятие иррационального числа. Лишено содержания утверждение, что физическая величина имеет иррациональное значение. Такое утверждение не может быть проверено. Одних только рациональных чисел достаточно, чтобы представить результаты измерений, выполненных со сколь угодно высокой степенью точности. Кроме того, понятие физической величины может утратить смысл, если к ее измерению предъявить требования неоправда-

но высокой точности. Так, например, совсем не ясно, о чем идет речь, если поставить задачу об измерении длины твердого стержня с погрешностью до размеров электрона или даже атома. Принципиально неограниченная точность измерения длин имеет смысл для абстрактных прямолинейных отрезков геометрии, а не для реальных тел, имеющих атомистическую структуру.

6. Перейдем к вопросу об измерении *времени*. Как и всякая физическая величина, время количественно характеризуется некоторыми числами. Задача прежде всего состоит в том, чтобы выяснить, с помощью каких принципиальных измерительных операций эти числа могут быть получены. Тем самым устанавливается и точный смысл самих этих чисел.

Под временем в количественном смысле этого слова мы будем понимать показания каких-то часов. Точнее, надо говорить не о самом времени, а о *промежутке времени* между двумя событиями или моментами времени. Он характеризуется *разностью* показаний часов в рассматриваемые моменты времени. Когда говорят просто о времени, не указывая оба момента, являющихся границами рассматриваемого промежутка времени, то предполагают, что один из этих моментов фиксирован и условно принят за начальный. От него и ведется отсчет времени. Часы здесь понимаются в более широком смысле слова, чем в обыденной жизни. *Под часами понимают любое тело или систему тел, в которых совершается периодический процесс, служащий для измерения времени.* Примерами таких процессов могут служить колебания маятника с постоянной амплитудой, вращение Земли вокруг собственной оси относительно Солнца или звезд, колебания атома в кристаллической решетке, колебания электромагнитного поля, представляемого достаточно узкой спектральной линией, и пр. Так, если между двумя событиями Земля при вращении относительно звезд сделала один оборот, то говорят, что промежуток времени между этими двумя событиями составляет *звездные сутки*. Если при этом она совершила 10 оборотов, то соответствующий промежуток времени — 10 звездных суток, и т. д. Если в течение звездных суток маятник совершил приблизительно 86 164 колебания, то говорят, что период одного колебания составляет *одну секунду*, и т. д. От звездных суток следует отличать *солнечные сутки*. Так называется промежуток времени, в течение которого Земля делает один оборот при вращении вокруг собственной оси относительно Солнца. Ввиду того, что Земля движется вокруг Солнца не по круговой, а по эллиптической орбите, это ее движение не совсем равномерно (см. § 55). Это значит, что солнечные сутки изо дня в день несколько изменяются в течение года. Поэтому при измерении времени пользуются так называемыми *средними солнечными сутками*. Они составляют 24 ч = 1440 мин = 86 400 с.

К часам предъявляют требования, чтобы они шли «равномерно». Но что значит — часы идут равномерно? Говорят, что это — периодический процесс, служащий для отсчета времени; он должен по-

вторятся через строго одинаковые промежутки времени. Однако это не есть ответ на вопрос, так как убедиться в одинаковости следующих друг за другом промежутков времени можно только в том случае, когда мы уже располагаем равномерно идущими часами. Выйти из этого логического круга можно только путем определения, так как никакого априорного представления о равномерном течении времени не существует. Надо условиться считать какие-то часы *по определению* равномерно идущими. Такие часы должны рассматриваться как *эталонные* или основные часы, по которым должны градуироваться все остальные.

В принципе любые часы могут быть приняты за эталонные. Однако так поступать не целесообразно. Эталонные часы должны быть достаточно «хорошими» и прежде всего обладать *высокой воспроизводимостью*. Это означает, что если изготовить с возможной тщательностью много «одинаковых» эталонных часов, то они с большой точностью должны идти одинаково, независимо от того, изготовлены ли они одновременно или между моментами их изготовления прошло длительное время. Например, песочные часы дают несравненно худшую воспроизводимость, чем маятниковые часы.

Не так давно за основные или эталонные часы принимались *астрономические часы*. Долгое время основными часами служила Земля, вращающаяся вокруг собственной оси относительно звезд, а основной единицей времени — *сутки*. Недавно вместо осевого вращения Земли стали пользоваться ее орбитальным движением вокруг Солнца, принимая за основную единицу времени *тропический год*, т. е. промежуток времени между двумя последовательными прохождениями центра Солнца через *точку весеннего равноденствия*. При измерении времени таким путем достигалась лучшая воспроизводимость. Но еще лучшая воспроизводимость была достигнута после изобретения *кварцевых, молекулярных* и *атомных часов*.

Все эти часы представляют довольно сложные радиотехнические устройства. Здесь нет необходимости останавливаться на принципах действия и деталях устройства таких часов. Достаточно заметить, что роль маятника или балансира, регулирующих ход часов, выполняют в кварцевых часах колебания кристаллической решетки кварца, в молекулярных часах — колебания атомов в молекулах, в атомных часах — колебания электромагнитного поля в узких спектральных линиях атомов некоторых изотопов химических элементов, находящихся в точно определенных и строго контролируемых внешних условиях. Особой стабильностью обладают последние из отмеченных колебаний. Поэтому период именно таких колебаний в настоящее время и принимается в качестве основной единицы времени, с помощью которой воспроизводится секунда. Конкретно, *секунда — это промежуток времени, в течение которого совершается* 9 192 631 770 *колебаний электромагнитного излучения, соответствующего переходу между двумя определенными*

сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133 *в отсутствие внешних полей.*

С помощью кварцевых, молекулярных и атомных часов было показано, что Земля вокруг своей оси вращается «неравномерно».

7. С единицей длины дело обстоит так же, как с единицей времени. Идеально твердых тел не существует. Первоначальный эталон метра, реализованный в виде стержня из сплава платины и иридия, недостаточно надежен. Он подвержен внешним влияниям, его внутреннее молекулярное строение может измениться. Наконец, он может быть утерян или испорчен. Предпочтительнее в качестве основной единицы взять какую-либо естественную, точно воспроизводимую длину. В качестве такой длины до недавнего времени принималась длина световой волны определенной узкой спектральной линии, получаемой при определенных, строго контролируемых внешних условиях. С помощью такой естественной длины и воспроизводилась практическая единица длины — метр. В октябре 1983 г. Генеральная ассамблея мер и весов приняла новое определение метра:

Метр есть длина пути, проходимая светом в вакууме в течение времени интервала 1/299792458 *секунды.* Отсюда следует, что *скорость света по определению принимается равной* 299 792 458 *м/с* (*точно*).

Такое изменение эталона метра вызвано тем, что экспериментальная погрешность определения скорости света в вакууме в настоящее время составляет примерно 0,3 м/с, что превышает относительную погрешность воспроизведения метра по предыдущему определению, которая равна примерно $\pm 4 \cdot 10^{-9}$. Относительная точность измерения состояния будет непрерывно повышаться со временем, по крайней мере до достижения величины 10^{-12}, требующейся для астрономических измерений. Чтобы каждый раз не менять определение метра, поступили более естественным способом — зафиксировали значение скорости света.

Возможно, что современные эталоны времени и длины перестанут удовлетворять более жестким требованиям, которые будут предъявляться в будущем к точности измерений и воспроизводимости результатов. В таком случае старые эталоны будут заменены новыми, более стабильными. Принципиально это ничего не меняет.

8. Для описания движения, а также любых физических явлений, протекающих во времени, пространственных систем отсчета недостаточно. Надо превратить их в *пространственно-временные* системы отсчета. Принципиально это означает, что в системе отсчета должны быть достаточно часто расставлены неподвижные часы, обладающие одинаковой скоростью хода. Тогда каждое событие можно характеризовать местом, где оно произошло, и временем, когда оно произошло, т. е. показаниями часов, помещенных в этом месте. Однако таким путем будет определено только *местное время*, т. е. время в каждой точке пространства. Показания часов, находящихся

в различных точках пространства, еще никак не связаны между собой. Для описания физических процессов такая связь, в принципе, не обязательна. Можно было бы довольствоваться местным временем в каждой точке пространства, введя столько различных времен, сколько существует различных точек. Однако такое описание было бы крайне запутанным и абсолютно необозримым. Чтобы описание было простым и обозримым, необходимо пользоваться временем, *единым для всей пространственно-временной системы* отсчета. Для этой цели надо *«синхронизовать»* часы, расставленные в различных местах пространства, т. е. установить их так, чтобы они показывали «одинаковое» время.

Если часы неподвижны в рассматриваемой системе отсчета и показывают одно и то же время, то про такие часы говорят, что в этой системе отсчета они идут *синхронно*. Установление же «стрелок» часов так, чтобы часы всегда показывали одно и то же время, называется их *синхронизацией*. Синхронизация часов не вызывает затруднений, если часы расположены в одном и том же месте пространства. Но как синхронизовать часы, если они находятся в удаленных точках пространства? Более того: что вообще означает, что пространственно разделенные часы синхронизованы, т. е. всегда показывают «одинаковое» время? До теории относительности такой вопрос физика даже не ставила, считая ответ на него само собой разумеющимся. Между тем без постановки этого вопроса и ответа на него невозможно ясное понимание самой теории относительности. Это впервые (в 1905 г.) с полной ясностью было понято Эйнштейном.

На первый взгляд, в вопросе о синхронизации пространственно разделенных часов нет никаких трудностей. Поместим, например, двое одинаковых часов сначала в точку A, поставим их стрелки одинаково, а затем одни из часов перенесем в точку B. Тогда часы в A и часы в B будут синхронизованы между собой. Однако такой способ синхронизации только тогда имел бы смысл, когда показание переносимых часов не зависело от способа переноса их из начальной точки A в конечную точку B. Чтобы убедиться в этом, надо сравнить показания переносимых часов в этих двух точках с показаниями каких-то двух неподвижных часов 1 и 2, из которых одни находятся в точке A, а другие — в точке B. Но часы 1 и 2 должны быть заранее синхронизованы. Получился заколдованный круг. Поэтому способ синхронизации путем переноса не годится.

Остается *синхронизация часов с помощью сигналов*. Можно, например, поступить следующим образом. В произвольный момент времени t_A по часам A послать какой-то сигнал к часам B. В момент прихода сигнала часы B поставить так, чтобы они показывали время $t_B = t_A + \tau_{AB}$, где τ_{AB} — время, затрачиваемое сигналом на прохождение расстояния от A до B. Тогда часы A и B будут синхронизованы между собой. Однако для осуществления такой синхронизации надо знать время τ_{AB}. Но это время можно измерить только после

того, как часы A и B уже синхронизованы. Получился опять заколдованный круг. Эйнштейн указал, что выйти из этого круга можно *только путем определения* понятия одновременности. Дорелятивистская физика считала, что одновременность событий абсолютна и является чем-то само собой разумеющимся. Эйнштейн указал, что это заблуждение. Смысл одновременности событий не требует разъяснения только тогда, когда эти события происходят в одном и том же месте пространства. Если же события происходят в различных местах пространства, то надо условиться, такие события называть одновременными. Очевидно, вопрос об одновременности пространственно разделенных событий эквивалентен вопросу о синхронизации пространственно разделенных часов.

Решение всякого вопроса, сводящегося к определению, содержит некоторый произвол. Это полностью относится и к вопросу об определении одновременности пространственно разделенных событий. Объективное содержание законов природы, разумеется, не может зависеть ни от каких произвольных определений. Определения могут влиять только на форму законов. Надо стремиться вводить такие определения, чтобы форма законов была наиболее проста и легко обозрима. Это требование почти однозначно вынуждает принять определение одновременности, предложенное Эйнштейном в теории относительности.

Эйнштейн пользуется для синхронизации часов световыми сигналами в вакууме. Время, затрачиваемое сигналом на пути от A до B и обратно, очевидно, равно $\tau = \tau_{AB} + \tau_{BA}$, где τ_{BA} — время, которое он затрачивает на прохождение от B к A. Для измерения времени τ достаточны только одни часы A, и никакой предварительной синхронизации не требуется. Но время τ_{AB} и τ_{BA} можно измерить лишь после того, как часы A и B синхронизованы. Пока они еще не синхронизованы, можно потребовать, чтобы между τ_{AB} и τ_{BA} соблюдалось какое-то соотношение. Тогда из этого соотношения и соотношения $\tau = \tau_{AB} + \tau_{BA}$ найдутся времена τ_{AB} и τ_{BA} в отдельности. Тем самым часы A и B будут синхронизованы и установлено понятие одновременности пространственно разделенных событий. *Эйнштейн полагает по определению, что* $\tau_{AB} = \tau_{BA}$, *т. е. что свет в направлениях от A к B и от B к A распологается с одной и той же скоростью.* Тогда $\tau_{AB} = \tau_{BA} = \tau/2$, и следовательно, $\tau_B = t_A + \tau/2$. Для бесконечно быстрых сигналов $\tau = 0$, а потому $t_A = t_B$. Одновременность, устанавливаемая с помощью таких сигналов, была бы абсолютной. Однако бесконечно быстрых сигналов не существует.

Синхронизация часов по Эйнштейну не требует предварительного измерения скорости света. Ее можно осуществить также следующим способом. Пусть C — точка, находящаяся на середине отрезка между точками A и B (неподвижными друг относительно друга). Произведем в C световую вспышку. *По определению* свет от нее до-

стигнет точек A и B одновременно. Если в момент прихода света к часам A и B их показания сделать одинаковыми, то они будут синхронизованы между собой.

Необходимо подчеркнуть, что в основе обоих способов синхронизации часов (иначе определения одновременности) лежит предположение об *однородности* и *изотропии пространства* и об *однородности времени*. Однородность пространства означает, что в нем все пространственные точки эквивалентны, т. е. ничем не выделены одна от другой. Однородность времени означает то же самое по отношению к любым моментам времени. Наконец, изотропия пространства характеризуется отсутствием в нем выделенных направлений — все направления в пространстве эквивалентны. Поэтому-то при определении одновременности и использовались световые сигналы в вакууме и притом в отсутствие гравитационного поля, так как наличие последнего уже нарушает указанную однородность и изотропию пространства.

Теперь нетрудно убедиться в эквивалентности приведенных выше двух способов синхронизации часов. Сформулируем прежде всего основной постулат, являющийся следствием однородности и изотропии пространства и однородности времени. На прохождение отрезков равной длины свет затрачивает в вакууме одно и то же время, независимо от того, где эти отрезки расположены, как они ориентированы и в какое время в них распространяется свет. Следствием этого постулата является утверждение, что свет затрачивает в вакууме одно и то же время на прохождение отрезка в прямом и противоположном направлении.

Приведем теперь доказательство эквивалентности обоих способов определения одновременности, хотя оно почти и самоочевидно. По-прежнему будем предполагать такое же расположение точек A, B, C. Допустим сначала, что применяется первый способ синхронизации часов. Тогда $\vec{\tau}_{AB} = \tau_{BA}$, или $\vec{\tau}_{AC} + \tau_{CB} = \tau_{BC} + \tau_{CA}$. Для наглядности над временами поставлены стрелки, указывающие направление (слева направо и справа налево) распространения светового сигнала. Так как $AB = BC$, то на основании основного постулата $\vec{\tau}_{AC} = \tau_{BC}$. Поэтому $\tau_{CA} = \vec{\tau}_{CB}$. Но это есть второй способ синхронизации часов.

Допустим теперь, что синхронизация устанавливается вторым способом, так что $\tau_{CA} = \vec{\tau}_{CB}$. По основному постулату $\vec{\tau}_{CB} = \tau_{CA}$. Сложив это с предыдущим равенством и снова применив основной результат, получим $\vec{\tau}_{AC} + \vec{\tau}_{CB} = \tau_{BC} + \tau_{CA}$, или $\vec{\tau}_{AB} = \tau_{BA}$, т. е. первый способ синхронизации.

Подчеркнем еще раз, что эйнштейновский способ синхронизации часов предполагает отсутствие поля тяготения. При наличии последнего скорость света перестает быть универсальной постоянной. Этот вопрос был разработан Эйнштейном в его общей теории относительности.

Всякое определение должно быть непротиворечивым. Если синхронизовать между собой часы A и B, то с третьими часами C можно поступить двояко: синхронизовать их либо с часами A, либо с часами B. Оба способа должны приводить к одному и тому же результату. Иначе получилось бы внутреннее противоречие. Наша уверенность в непротиворечивости эйнштейновского определения одновременности основана на логической согласованности бесчисленного множества следствий, при выводе которых использовалось это определение.

9. *Одновременность пространственно разделенных событий в том смысле, какой придается ей определением Эйнштейна, относительна.* Это значит, что два события, одновременные в одной системе отсчета, могут оказаться не одновременными, если их рассматривать в другой системе отсчета, движущейся относительно первой. Поясним это следующим примером. Пусть система отсчета S связана с твердым стержнем AB, а система S' — с твердым стержнем $A'B'$, движущимся относительно AB (рис. 4). В момент, когда середины стержней C и C' совпадают между собой, производится световая вспышка в точке, где происходит это совпадение. Рассмотрим распространение света от этой вспышки сначала в системе отсчета S. Из определения одновременности следует, что сигнал достигнет одновременно концов стержня A и B. Значит, он достигнет раньше точки A' и позже — точки B', поскольку точка A' движется навстречу сигналу, а точка B' уходит от него. Итак, с точки зрения отсчета S световой сигнал приходит в точки A и B одновременно, а в точки A' и B' — не одновременно: в точку A' он приходит раньше, чем в B'. К другому заключению мы придем, если рассмотрим явление отсчета S'. По определению одновременными будут приходы сигнала в точки A' и B', а приходы в точки A и B — не одновременными: в точку B сигнал придет раньше, чем в точку A. Противоречия между обоими заключениями нет, поскольку «одновременность» понимается в них в разных смыслах. Этот пример и иллюстрирует относительность одновременности.

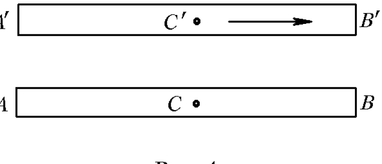


Рис. 4

10. *Длина тела также относительна, т. е. зависит от того, в какой системе отсчета она измеряется.* Что такое длина движущегося стержня — такой вопрос дорелятивистская физика не ставила. Теория относительности показала, что надо строго различать *длину покоящегося стержня* l_0, т. е. длину, измеренную в системе отсчета, в которой стержень покоится, и *длину движущегося стержня* l, т. е. длину, измеренную в системе отсчета, относительно которой он движется. Эти длины становятся равными только в пре-

дельном случае бесконечно медленных движений. Величина l_0 получается путем откладывания вдоль стержня единичного масштаба, покоящегося относительно этого стержня. Величина l сводится к измерению расстояния между неподвижными точками путем следующей измерительной операции. Надо отметить какими-либо неподвижными точками A и B положения концов движущегося стержня в рассматриваемой системе отсчета в один и тот же момент времени. Расстоянием между этими неподвижными точками и будет, по определению, длина движущегося стержня l. Если взять другую систему отсчета, то ввиду относительности одновременности концы стержня пройдут в этой системе отсчета мимо точек A и B, вообще говоря, не одновременно. Роль A и B будут играть другие точки A' и B', неподвижные в новой системе отсчета. Расстояние между этими точками l', вообще говоря, не будет совпадать с l. Таким образом, *как и промежутки времени, длины отрезков также относительны.*

11. Дорелятивистская физика считала длины тел и промежутки времени абсолютными. С ее точки зрения можно было говорить об одновременности событий, не указывая, в какой системе отсчета эти события рассматриваются. Можно было говорить о длине тела, не указывая, покоится оно или движется в рассматриваемой системе отсчета. Основанием, правда, явно не формулировавшимся, для такой точки зрения было убеждение в существовании сколь угодно быстрых сигналов. Но при рассмотрении медленных движений скорость световых сигналов в вакууме может считаться практически бесконечно большой. В этом приближении исчезают все релятивистские эффекты. Мы приведем в дальнейшем некоторые результаты релятивистской механики ввиду их важности в ядерной физике и физике элементарных частиц. Однако систематическое изложение релятивистской механики будет дано после того, как мы познакомимся с учением об электрических и оптических явлениях. Там же будут подробно разобраны с количественной стороны и вопросы пространства и времени, которые здесь были только поставлены или затронуты качественно.

§ 2. КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ. МАТЕРИАЛЬНАЯ ТОЧКА

1. *Кинематика* занимается описанием движения, отвлекаясь от его причин. Для описания движения можно выбирать различные системы отсчета. В различных системах отсчета движение одного и того же тела выглядит по-разному. В кинематике при выборе системы отсчета руководствуются лишь соображениями целесообразности, определяющимися конкретными условиями. Так, при рассмотрении тел на Земле естественно связать систему отсчета с Землей, что мы и будем делать. При рассмотрении движения самой Земли систему

отсчета удобнее связывать с Солнцем и т. п. Никаких принципиальных преимуществ одной системы отсчета по сравнению с другой в кинематике указать нельзя. Все системы отсчета *кинематически эквивалентны*. Только в *динамике*, изучающей движение в связи с силами, действующими на движущиеся тела, выявляются принципиальные преимущества определенной системы отсчета или, точнее, определенного класса системы отсчета.

2. Простейшим объектом, движение которого изучает классическая механика, является материальная точка. *Материальной точкой* называется макроскопическое тело, размеры которого настолько малы, что в рассматриваемом движении их можно не принимать во внимание и считать, что все вещество тела как бы сосредоточено в одной геометрической точке. Материальных точек в природе не существует. Материальная точка есть абстракция, идеализированный образ реально существующих тел. Можно или нельзя то или иное тело при изучении какого-либо движения принять за материальную точку — это зависит не столько от самого тела, сколько от характера движения, а также от содержания вопросов, на которые мы хотим получить ответ. Абсолютные размеры тела при этом не играют роли. Важны *относительные размеры*, т. е. отношения размеров тела к некоторым расстояниям, характерным для рассматриваемого движения. Например, Землю при рассмотрении ее орбитального движения вокруг Солнца с большой точностью можно принять за материальную точку. Характерной длиной здесь является радиус земной орбиты $R \approx 1{,}5 \cdot 10^8$ км. Он очень велик по сравнению с радиусом Земли $r \approx 6{,}4 \cdot 10^3$ км. Благодаря этому при орбитальном движении Земли все ее точки можно считать движущимися практически одинаково. Поэтому достаточно рассмотреть движение только одной точки, например центра Земли, и считать, что все вещество Земли как бы сосредоточено в этой геометрической точке. Такая идеализация сильно упрощает задачу об орбитальном движении Земли, сохраняя, однако, все существенные черты этого движения. Но эта идеализация не годится при рассмотрении вращения Земли вокруг собственной оси, ибо бессмысленно говорить о вращении геометрической точки вокруг оси, проходящей через эту точку.

В определение материальной точки мы включили условие, что точка должна быть *макроскопическим телом*. Это сделано для того, чтобы к ее движению можно было применять классическую механику. Однако в ряде случаев и движение микрочастиц может рассматриваться на основе классической механики. Сюда относится, например, движение электронов, протонов или ионов в ускорителях и электронно-ионных приборах. В этих случаях микрочастицы можно рассматривать как материальные точки классической механики.

3. Механика одной материальной точки или, короче, *механика точки* в классической физике является основой для изучения механики вообще. С классической точки зрения произвольное макроскопическое тело или систему тел можно мысленно разбить на малые макроскопические части, взаимодействующие между собой. Каждую из таких частей можно принять за материальную точку. Тем самым изучение движения произвольной системы тел сводится к изучению системы взаимодействующих материальных точек. Естественно поэтому начать изучение классической механики с механики одной материальной точки, а затем перейти к изучению системы материальных точек.

Выберем какую-либо произвольную систему отсчета и будем относить к ней движение материальной точки. Движение точки будет описано полностью, если будет известно ее положение в любой момент времени относительно выбранной системы отсчета. Положение точки мы условимся характеризовать ее прямоугольными координатами x, y, z, являющимися проекциями ее радиуса-вектора $\mathbf{r}$ на координатные оси. Полное описание движения сводится поэтому к нахождению трех координат x, y, z как функций времени t,

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \tag{2.1}$$

или к нахождению одной векторной функции

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \tag{2.2}$$

Однако для формулировки основных законов механики, с помощью которых теоретически могут быть найдены рассматриваемые функции, существенны два новых понятия — понятие *скорости* и в особенности понятие *ускорения*. К установлению этих понятий мы и перейдем.

§ 3. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ПРИ ПРЯМОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ. УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ И УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ

1. Рассмотрим сначала частный случай, когда материальная точка движется вдоль прямой линии. Примем эту прямую за координатную ось X, поместив начало координат O в какой-то произвольной точке ее (рис. 5). Положение материальной точки в рассматриваемом случае определяется одной координатой:

$$x = x(t). \tag{3.1}$$

Пусть в какой-то фиксированный момент времени t материальная точка находится в положении A_1. В этот момент ее координата равна $x_1 = x(t)$. В более поздний момент времени $t + \Delta t$ матери-

альная точка переместится в положение A_2 с координатой $x_2 = x(t+\Delta t)$. За время Δt материальная точка проходит путь $\Delta x = x_2 - x_1 = x(t+\Delta t) - x(t)$. Путь считается положительным, если перемещение совершается вправо, и отрицательным, если оно происходит влево. Отношение пройденного пути Δx к промежутку времени Δt называется *средней скоростью материальной точки за время* Δt, или, точнее, *за время между* t *и* $t+\Delta t$. Таким образом, по определению средняя скорость равна

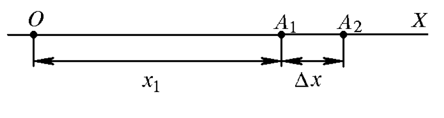


Рис. 5

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \tag{3.2}$$

Такое определение средней скорости имеет смысл для любых значений Δt. Надо исключить только значение $\Delta t = 0$, так как в этом случае для средней скорости мы получили бы выражение $\frac{0}{0}$, которое само по себе не имеет смысла. Однако ничто не мешает брать промежуток времени Δt как угодно малым, но отличным от нуля. Вообще говоря, средняя скорость зависит не только от t, но и от Δt. Будем теперь, оставляя момент времени t неизменным, брать промежуток времени Δt все меньше и меньше, устремляя его к нулю. Тогда будет стремиться к нулю и проходимый путь Δx. Отношение же $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ при этом, как показывает опыт, будет стремиться к вполне определенному пределу, который может зависеть только от t, но уже не будет зависеть от Δt. Этот предел называется *истинной* или *мгновенной скоростью материальной точки в момент времени* t:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \tag{3.3}$$

Пределы типа (3.3) встречаются в самых разнообразных вопросах математики и ее приложениях. В математике предел, определяемый формулой (3.3), называется *производной* функции $x(t)$ по аргументу t. Производная во времени обозначается символом $\dot{x}(t)$ или $\frac{dx}{dt}$. Таким образом, по определению

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{3.4}$$

Понятие производной является основным понятием *дифференциального исчисления*. Используя это понятие, можно сказать, что *истинная* или *мгновенная скорость* v есть производная ко-

ординаты x по времени, или производная пройденного пути s по времени:

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt}. \tag{3.5}$$

Скорость материальной точки, вообще говоря, является функцией времени: $v = v(t)$. Производная скорости по времени называется *ускорением материальной точки*. Ускорение мы обозначаем через a. Таким образом, по определению ускорения

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}(t), \tag{3.6}$$

или

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}. \tag{3.7}$$

Производная (3.6) называется также *второй производной* координаты x по времени и обозначается символами

$$a = \ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{3.8}$$

В существовании первой и второй производных координаты по времени в механике, как и во всех аналогичных вопросах физики, мы убеждаемся не путем логических рассуждений, а опытным путем.

2. Рассмотрим простейшие примеры.

Пример 1. $x = \text{const}$, т. е. координата x остается постоянной во времени. В этом случае материальная точка неподвижна, приращение координаты Δx равно нулю. Равны нулю также средняя и истинная скорости точки: $v = \dot{x} = 0$. Вообще, производная всякой постоянной величины равна нулю.

Пример 2. $x = Bt + C$, где B и C — постоянные коэффициенты. В этом случае говорят, что координата x является *линейной функцией времени* t. Очевидно,

$$x + \Delta x = B(t + \Delta t) + C = (Bt + C) + B\,\Delta t,$$

$$\Delta x = B\,\Delta t, \qquad v_{\text{ср}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = B.$$

Средняя скорость постоянна и равна B. Поэтому истинная скорость также постоянна и равна средней скорости:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_{\text{ср}} = B.$$

Движение с постоянной скоростью называется *равномерным*. Обозначим через x_0 значение координаты x в начальный момент времени $t = 0$. Величина x_0 называется *начальной координатой* и, очевидно, $x_0 = C$. Пройденный путь s определяется приращением координаты, $s = x - x_0 = Bt$, или

$$s = vt.$$

Пример 3. $x = At^2 + Bt + C$, где A, B и C — постоянные коэффициенты. В этом случае говорят, что координата x является *квадратичной функцией времени* t. Очевидно,

$$x + \Delta x = A(t + \Delta t)^2 + B(t + \Delta t) + C = \\ = (At^2 + Bt + C) + (2At + B)\,\Delta t + A(\Delta t)^2,$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = (2At + B) + A\,\Delta t.$$

Здесь $v_{\text{ср}}$ зависит не только от t, но и от Δt. В пределе, когда $\Delta t \to 0$, член $A\,\Delta t$ обращается в нуль, и мы получаем следующее выражение для истинной скорости:

$$v = 2At + B.$$

Истинная скорость является линейной функцией времени t, а потому, дифференцируя ее, получаем постоянное значение для ускорения:

$$a = \frac{dv}{dt} = 2A.$$

Движение с постоянным ускорением называется *равноускоренным*. Постоянная A равна половине ускорения: $A = a/2$. Выясним теперь физический смысл постоянных B и C. При $t = 0$ наши формулы дают $v = B$. Скорость в момент времени $t = 0$ называется *начальной скоростью* и обозначается через v_0. Мы видим, что постоянная B равна начальной скорости: $B = v_0$. Аналогично доказывается, что постоянная C есть начальная координата движущейся точки: $C = x_0$. С введением этих величин можно написать

$$x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0, \qquad v = at + v_0.$$

Пройденный путь равен $s = x - x_0$, т. е.

$$s = \frac{at^2}{2} + v_0 t.$$

Примерами равноускоренного движения могут служить свободное падение тел и скатывание тела по наклонной плоскости без трения. С возрастанием высоты падения постоянство ускорения нарушается сопротивлением воздуха, а также неоднородностью поля тяготения.

3. По аналогии с *линейной* скоростью и ускорением вводятся *угловая скорость* и *угловое ускорение*. Эти понятия относятся к случаю движения материальной точки по окружности. Положение точки M на окружности можно задать углом α, который образует радиус-вектор OM с каким-либо неизменным направлением OX (рис. 6). Производная этого угла по времени

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$$

называется *угловой скоростью*. Вращение называется *равномерным*, если угловая скорость ω постоянна. В этом случае $\alpha = \omega t + \text{const}$. При равномерном вращении величину ω называют также *угловой частотой вращения*. Величина $\nu = \omega/2\pi$ дает число оборотов в единицу времени и называется *частотой обращения*. Величина $T = 1/\nu$ есть продолжительность одного обращения и называется *периодом вращения*.

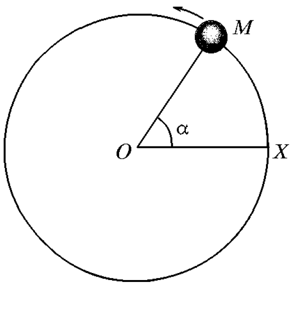


Рис. 6

Первая производная угловой скорости ω или вторая производная угла α по времени называется *угловым ускорением*:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Если s означает длину дуги окружности XM, то ее производные $v = \frac{ds}{dt}$ и $a = \frac{d^2s}{dt^2}$ дают линейную скорость и линейное ускорение при движении точки по окружности. Если r — радиус окружности, то $s = r\alpha$. Дифференцируя это соотношение по времени, находим

$$v = \omega r, \qquad a = \dot{\omega} r.$$

§ 4. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ПРИ КРИВОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ

1. Понятия скорости и ускорения естественным образом обобщаются на случай движения материальной точки по *криволинейной траектории*. Положение движущейся точки на траектории мы будем задавать радиусом-вектором $\mathbf{r}$, проведенным в эту точку из какой-либо неподвижной точки O, условно принимаемой за начало координат (рис. 7). Пусть в момент времени t материальная точка находится в положении M с радиусом-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Спустя короткое время Δt она переместится в положение M_1 с радиусом-вектором $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t + \Delta t)$. Радиус-вектор материальной точки получит приращение, определяемое геометрической разностью

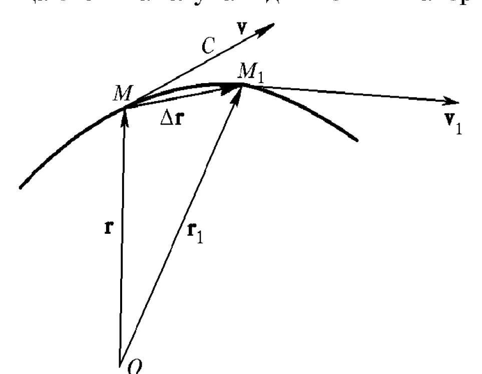


Рис. 7

$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}$. Величина

$$\mathbf{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \tag{4.1}$$

называется *средней скоростью движения за время* Δt или, точнее, *за время между* t *и* $t + \Delta t$. Она является величиной *векторной*, так как получается делением вектора $\Delta\mathbf{r}$ на скаляр Δt. Направление средней скорости $\mathbf{v}_{\text{ср}}$ совпадает с направлением хорды MM_1, т. е. с $\Delta\mathbf{r}$.

Предел средней скорости при $\Delta t \to 0$, т. е. производная радиуса-вектора $\mathbf{r}$ по времени

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \tag{4.2}$$

называется *истинной* или *мгновенной скоростью материальной точки. Истинная скорость есть вектор, направленный по касательной к траектории движущейся точки.*

Совершенно аналогично определяется ускорение при криволинейном движении. *Ускорением* **a** *называется вектор, равный первой производной вектора скорости* **v** *или второй производной радиуса-вектора* **r** *по времени:*

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}, \tag{4.3}$$

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \tag{4.4}$$

2. Отметим следующую формальную аналогию между скоростью и ускорением. Из произвольной неподвижной точки O_1 будем откладывать вектор скорости **v** движущейся точки во всевозможные моменты времени (рис. 8). Конец вектора **v** назовем *скоростной точкой*. Геометрическое место скоростных точек есть кривая, называемая *годографом скорости*. Когда материальная точка описывает траекторию, соответствующая ей скоростная точка движется по годографу. Рисунок 8 отличается от рис. 7 только обозначениями. Радиус-вектор **r** заменен на вектор скорости **v**, материальная точка — на скоростную точку, траектория — на годограф. Математические операции над вектором **r** при нахождении скорости и над вектором **v** при нахождении ускорения совершенно тождественны. Для математики безразлично, какой физический смысл имеют величины, над которыми выпол-

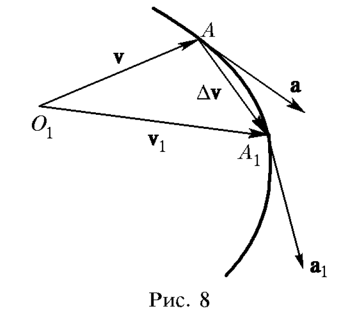


Рис. 8

няются математические операции. Не имеет значение также, какими символами эти величины обозначены. Для нахождения скорости **v** надо дифференцировать радиус-вектор **r**, для нахождения ускорения надо дифференцировать вектор скорости **v**. Скорость **v** направлена по касательной к траектории. Поэтому *ускорение* **a** *будет направлено по касательной к годографу скорости.* Можно сказать, что *ускорение есть скорость движения скоростной точки по годографу.* Следовательно, *все соотношения и теоремы, полученные для скорости, остаются справедливыми и для ускорения, если в них произвести замену величины и терминов согласно следующей таблице*:

Материальная точка	→ Скоростная точка
Радиус-вектор	→ Вектор скорости
Траектория	→ Годограф
Скорость	→ Ускорение

3. В качестве простейшего примера найдем ускорение точки, равномерно вращающейся по окружности радиуса r (рис. 9*а*). Скорость **v** направлена по касательной к окружности, ее модуль определяется выражением

$$v = \omega r = \frac{2\pi r}{T}. \qquad (4.5)$$

Годографом будет окружность радиуса v (рис. 9*б*). Когда материальная точка M вращается по окружности радиуса r, соответствующая ей скоростная точка A вращается в том же направлении по окружности радиуса v, описывая эту окружность за то же время T. Положениям материальной точки на траектории M_1, M_2, M_3, M_4

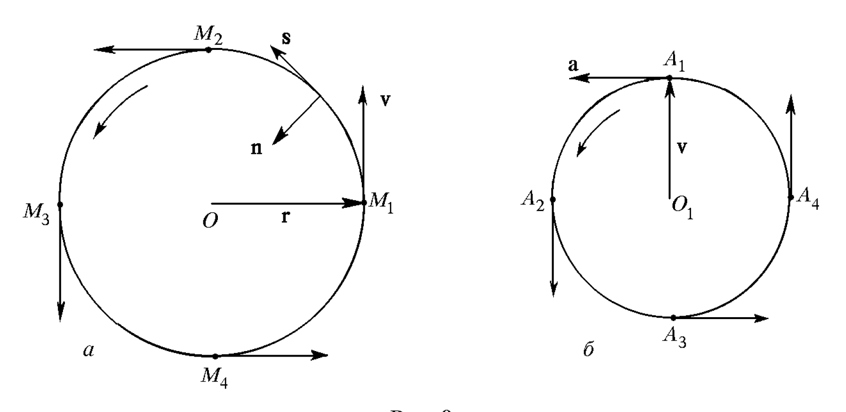


Рис. 9

соответствуют на годографе положения скоростной точки A_1, A_2, A_3, A_4. Ускорение **a** направлено по касательной к окружности — годогра-

фу и притом, как видно из рисунка, к центру O траектории вращающейся точки M. По аналогии с формулой (4.5) для модуля ускорения можно написать

$$a = \omega v = \frac{2\pi v}{T} = \frac{v^2}{r}. \tag{4.6}$$

Это известная формула для *центростремительного ускорения*. Ее можно записать в векторной форме:

$$\mathbf{a} = -\,\omega^2 \mathbf{r}. \tag{4.7}$$

Знак минус указывает на то, что направления векторов **a** и **r** взаимно противоположны, т. е. ускорение **a** направлено к центру круговой траектории, по которой вращается материальная точка. Можно также написать для любого положения движущейся точки

$$\mathbf{a} = \frac{v^2}{r}\,\mathbf{n}, \tag{4.8}$$

где **n** — единичный вектор нормали к круговой траектории движущейся точки, направленный к центру O (см. рис. 9*а*).

Имея в виду дальнейшие обобщения, представим вектор скорости в виде $\mathbf{v} = v\mathbf{s}$, где **s** — единичный вектор касательной к окружности. Первый множитель v есть модуль вектора скорости, второй множитель **s** указывает направление. При равномерном вращении модуль вектора скорости v остается неизменным, меняется только направление скорости, т. е. единичный вектор **s**. Дифференцированию подлежит только этот вектор, а потому $\mathbf{a} = v\,\frac{d\mathbf{s}}{dt}$. Сравнивая это выражение с (4.8), получим

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{v}{r}\,\mathbf{n}. \tag{4.9}$$

Обозначим через ds длину пути, проходимого материальной точкой за время dt при ее вращении по окружности. Эта положительная величина равна $ds = v\,dt$. Поэтому предыдущую формулу можно переписать в виде

$$\frac{d\mathbf{s}}{ds} = \frac{1}{r}\,\mathbf{n}. \tag{4.10}$$

В этом виде формула не содержит никаких кинематических величин. В нее входят только геометрические величины, характеризующие окружность. Поэтому она может быть получена чисто геометрически без привлечения кинематических понятий. Она определяет производную единичного вектора касательной **s** по длине дуги окружности. Взаимная перпендикулярность векторов **s** и $\frac{d\mathbf{s}}{dt}$ $\left(\text{или } \frac{d\mathbf{s}}{ds}\right)$ объясняется тем, что длина вектора **s** постоянна, меняется только направление этого вектора. Треугольник, составленный из векторов **s**, $\mathbf{s} + \Delta\mathbf{s}$ и $\Delta\mathbf{s}$ (рис. 10), — равнобедренный. При стремлении элемента

дуги Δs к нулю стремится к нулю и угол α при его вершине. Поэтому направление вектора $\frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta s}$ в пределе оказывается перпендикулярным к вектору $\mathbf{s}$. Отмеченное свойство, разумеется, не является специфическим свойством единичного вектора $\mathbf{s}$. Производная любого вектора $\mathbf{A}$ постоянной длины по любому скалярному аргументу есть вектор, перпендикулярный к вектору $\mathbf{A}$.

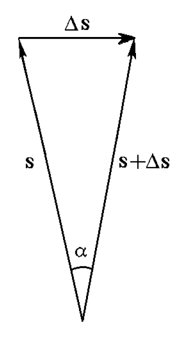


Рис. 10

4. Формула (4.10) допускает обобщение на случай произвольной гладкой кривой. Обозначим по-прежнему через $\mathbf{s}$ единичный вектор касательной к кривой, а через ds — длину элемента дуги этой кривой. Производная $\frac{d\mathbf{s}}{ds}$ есть вектор, направленный нормально к кривой в сторону ее вогнутости. Эту производную можно поэтому представить в виде (4.10), рассматривая величину $1/r$ как коэффициент пропорциональности между векторами $\frac{d\mathbf{s}}{ds}$ и $\mathbf{n}$. Фактическое содержание этой формулы сводится к тому, что производная $\frac{d\mathbf{s}}{ds}$ есть вектор, нормальный к кривой. В остальном на нее надо смотреть как на определение двух новых понятий: величины $1/r$ и единичного вектора $\mathbf{n}$. Величина $1/r$ называется *кривизной кривой*, *r — радиусом кривизны*, а $\mathbf{n}$ — *единичным вектором главной нормали* к кривой. При этом кривизна $1/r$ считается существенно положительной, а потому единичный вектор $\mathbf{n}$ всегда направлен в сторону вогнутости кривой. Оправданием такой терминологии служит интуитивное представление, что при рассмотрении кривизны малый элемент кривой приближено можно рассматривать как дугу окружности. Это приближение тем точнее, чем меньше длина дуги Δs. В случае окружности кривизна $1/r$ постоянна на протяжении всей кривой. В общем случае произвольной гладкой кривой кривизна непрерывно меняется от точки к точке. Непрерывно меняется и направление единичного вектора главной нормали $\mathbf{n}$. Кинематическая формула (4.9) также справедлива для движения вдоль произвольной кривой и притом независимо от того, постоянна величина v или меняется с течением времени. Действительно, формула (4.10) получается из формулы (4.9) с помощью соотношения $ds = v dt$.

Все геометрические кривые разделяются на плоские и кривые двоякой кривизны. *Плоской кривой* называется кривая, все точки которой лежат в одной плоскости. Примерами плоских кривых являются окружность, эллипс, гипербола, парабола, синусоида и пр. *Кривыми двоякой кривизны* называются такие кривые, которые не лежат в одной плоскости. Примером подобной кривой может служить винтовая линия — спираль. Плоскость, в которой лежат касательная и главная нормаль к кривой, называется *соприкасающейся плоскостью*. Для плоской кривой соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью,

в которой лежит кривая. К понятию соприкасающейся плоскости приводит следующее интуитивное представление. Произвольную конечную дугу кривой двоякой кривизны, разумеется, нельзя уложить в плоскость. Но чем короче дуга кривой, тем точнее она приближается к элементу плоской кривой, тем с меньшей ошибкой ее можно уложить в плоскости. Такая плоскость приближенно и воспроизводит соприкасающуюся плоскость. Это интуитивное представление можно превратить в точное определение с помощью предельного перехода. Пусть M (см. рис. 7) — произвольная точка на кривой. Проведем в ней касательную MC и хорду MM_1. Этими двумя прямыми, вообще говоря, определится некоторая плоскость CMM_1. Будем неограниченно приближать точку M_1 к точке M. Тогда указанная плоскость, вообще говоря, будет стремиться к некоторому определенному предельному положению. Это предельное положение и называется соприкасающейся плоскостью. Перпендикуляр к соприкасающейся плоскости в точке M называется *бинормалью к кривой.*

5. При равномерном вращении точки по окружности ускорение направленно к ее центру, т. е. перпендикулярно к траектории. Ускорение перпендикулярно к траектории и при движении по любой кривой, если только скорость движущейся точки не меняется по модулю. Не так будет, когда меняется также и модуль скорости. Чтобы разобраться в этом вопросе, представим вектор скорости в виде $\mathbf{v} = v\mathbf{s}$. Применяя к этому выражению правило дифференцирования произведения, получим

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{s}) = \frac{dv}{dt}\mathbf{s} + v\frac{d\mathbf{s}}{dt},$$

или ввиду формулы (4.9)

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{s} + \frac{v^2}{r}\mathbf{n}. \qquad (4.11)$$

Отсюда следует, что *вектор ускорения* $\mathbf{a}$ *лежит в плоскости векторов* $\mathbf{s}$ *и* $\mathbf{n}$, *т. е. в соприкасающейся плоскости*; *вектор* $\mathbf{a}$ *не имеет составляющей по бинормали к траектории.* В общем случае ускорение $\mathbf{a}$ направлено под углом к траектории. Первое слагаемое в формуле (4.11)

$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt}\mathbf{s} \qquad (4.12)$$

есть вектор, направленный по касательной к траектории. Этот вектор называется *касательным* или *тангенциальным ускорением.* Второе слагаемое

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{r}\mathbf{n} \qquad (4.13)$$

есть вектор, направленный вдоль главной нормали в сторону вогнутости траектории. Он называется *нормальным ускорением.* Таким обра-

зом, в общем случае *ускорение* **a** *можно представить в виде геометрической суммы тангенциального и нормального ускорений*:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n. \tag{4.14}$$

Тангенциальное ускорение меняет скорость только по модулю, нормальное ускорение меняет ее только по направлению.

Рисунок 11 поясняет разложение полного ускорения на тангенциальное и нормальное. Пусть $\mathbf{v}$ — скорость материальной точки в момент времени t, когда она находилась в положении M. Обозначим через $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ скорость той же точки в момент $t + \Delta t$, когда она переместилась в положение M_1 (не обозначенное на рисунке). Отложим оба вектора $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_1$ из одной и той же точки M и разложим приращение $\Delta\mathbf{v}$ скорости на две составляющие: составляющую $\Delta\mathbf{v}_t$ вдоль вектора $\mathbf{v}$ и составляющую $\Delta\mathbf{v}_n$, перпендикулярную к этому вектору. При уменьшении Δt оба отношения $\frac{\Delta v_t}{\Delta t}$ и $\frac{\Delta v_n}{\Delta t}$ будут стремиться к определенным пределам. Первый из них есть тангенциальное, а второй — нормальное ускорение.

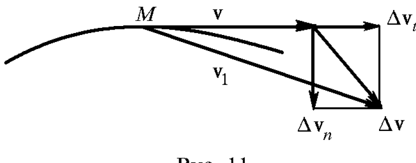


Рис. 11

При вычислении скорости точки бесконечно малую дугу траектории можно аппроксимировать бесконечно коротким прямолинейным отрезком, направление которого совпадает с направлением касательной к траектории. При определении ускорения такая аппроксимация уже не годится. Однако, как видно из рассуждений настоящего параграфа, при вычислении ускорения бесконечно малую дугу траектории можно аппроксимировать дугой окружности, плоскость которой совпадает с соприкасающейся плоскостью, а радиус равен радиусу кривизны траектории в рассматриваемой точке. Но и такая аппроксимация оказалась бы недостаточной, если бы потребовалось вычислить производные радиуса-вектора более высокого порядка: $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}$ и т. д.

ЗАДАЧИ

1. Шарик, которому сообщена горизонтальная скорость v, падает на горизонтальную плиту с высоты h. При каждом ударе о плиту теряется часть скорости (отношение вертикальной составляющей скорости после удара к ее значению до удара постоянна и равна α).

Определить, на каком расстоянии x от места бросания отскоки шарика прекратятся. Считать, что трение отсутствует, так что горизонтальная составляющая скорости шарика v не меняется.

О т в е т: $x = v\sqrt{\frac{2h}{g}}\,\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$.

2. Точка движется в плоскости, причем ее прямоугольные координаты определяются уравнениями

$$x = A\cos\omega t, \quad y = B\sin\omega t, \tag{4.15}$$

где A, B, ω — постоянные. По какой траектории движется точка? Вычислить ее ускорение.

Решение. Исключая время t из уравнений (4.15), находим

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Точка движется по эллипсу. Ее радиус-вектор $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{i}$, а ускорение $\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}$, Дифференцирование дает

$$\dot{x} = -\omega A\sin\omega t, \quad \ddot{x} = -\omega^2 A\cos\omega t = -\omega^2 x,$$

$$\dot{y} = \omega B\cos\omega t, \quad \ddot{y} = -\omega^2 B\sin\omega t = -\omega^2 y.$$

Следовательно,

$$\mathbf{a} = -\omega^2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = -\omega^2\mathbf{r}. \tag{4.16}$$

Ускорение направлено к центру эллипса и пропорционально r. В частном случае $A = B$ — эллипс вырождается в круг, а формула (4.16) переходит в известную формулу для центростремительного ускорения при равномерном вращении по кругу.

3. Точка с постоянной по модулю скоростью v движется по эллипсу с полуосями A и B. Найти ее ускорение в вершинах эллипса.

Решение. В вершинах эллипса ускорение только нормальное. Его можно найти по общей формуле (4.13) и притом в любой точке эллипса. Однако в вершинах эллипса поучительно получить решение, воспользовавшись тем обстоятельством, что эллипс может быть получен однородным растяжением или сжатием круга. Возьмем круг радиуса $r = B$ и равномерно растянем его параллельно оси X (рис. 11*а*) в A/B раз. Получится эллипс с полуосью A, параллельной оси X. Бесконечно малая дуга CED круга перейдет в дугу $C'E'D'$ эллипса. Время движения точки вдоль этих дуг будет одно и то же. Одинаковы будут и скорости точки в положениях E и E'. Однако нормальное смещение FE перейдет в $F'E'$, т. е. увеличится в A/B раз. В такое же число раз увеличится нормальное ускорение. В точке E' оно будет $a = (v^2/r)A/B = Av^2/B^2$. Сжимая круг радиуса A вдоль оси Y, таким же путем получаем ускорение в точке пересечения эллипса с малой осью. Оно равно $a = Bv^2/A^2$.

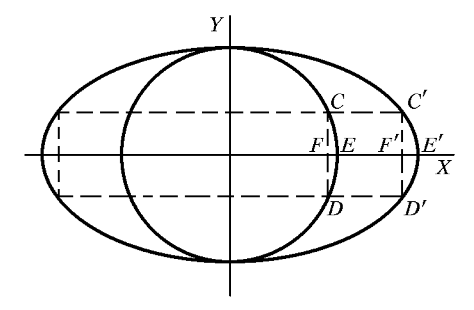


Рис. 11а

4. Установить связь между звездными и средними солнечными сутками. *Звездный год*, т. е. промежуток времени, в течение которого Солнце совершает свой видимый путь по небесной сфере относительно звезд, составляет 365,2564 средних солнечных суток. (Звездный год следует отличать от *тропи-*

ческого года, который соответствует периоду смены времен года и составляет 365,2422 средних солнечных суток.)

Решение. Пусть в положении *1* (рис. 12) плоскость земного меридиана AB проходит через центр Солнца C и какую-либо (бесконечно удаленную) звезду D. Когда Земля в своем орбитальном движении перейдет в положение *2*, плоскость того же меридиана повернется относительно направления на звезду на угол α, а относительно направления на центр Солнца — на угол β. Углы α и β могут превышать 2π, но они всегда связаны соотношением $\alpha = \beta + \gamma$, где γ — угол между направлениями на центр Солнца в положениях *1* и *2*. Спустя звездный год, когда Земля вернется в исходную плоскость ICD, угол γ примет значение 2π, а потому в этом положении $\alpha = \beta + 2\pi$. За это время пройдет $N_{зв} = \alpha/2\pi$ звездных и $N_{сол} = \beta/2\pi$ средних солнечных суток. Поэтому $N_{зв} = N_{сол} + 1$. Если $T_{зв}$ и $T_{сол}$ — продолжительность звездных и средних солнечных суток, то очевидно, что $N_{зв}T_{зв} = N_{сол}T_{сол}$, так как оба эти выражения представляют одно и то же время — звездный год. Используя соотношения $N_{зв} = N_{сол} + 1$, находим

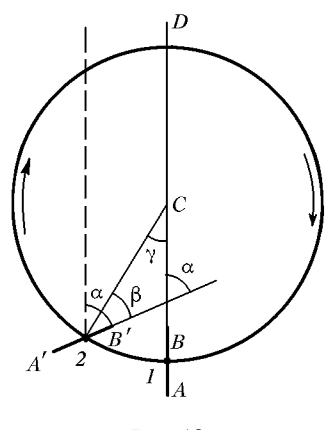


Рис. 12

$$T_{зв} = \frac{N_{сол}}{N_{сол}+1} T_{сол},$$

$$T_{сол} - T_{зв} = \frac{1}{N_{сол}+1} T_{сол}.$$

Подставив сюда $T_{сол} = 24 \cdot 60 \cdot 60 = 86\ 400$ с, $N_{сол} = 365{,}2564$, получим

$$T_{сол} - T_{зв} = 325{,}9003 \text{ с} \approx 236 \text{ с}, \quad T_{зв} \approx 86\ 164 \text{ с}.$$

Заметим, что при решении мы не вводили предположения, что Земля по своей орбите движется равномерно.

5. Определить скорость, с которой движется тень Луны по земной поверхности во время полного солнечного затмения.

Решение. Для простоты примем, что затмение наблюдается на экваторе и что земная ось перпендикулярна плоскостям солнечной и лунной орбит. Скорость света будем считать бесконечно большой по сравнению со всеми остальными скоростями, входящими в задачу. Пусть в рассматриваемый момент времени прямая Солнце—Луна перпендикулярна к земной поверхности в точке наблюдения A (рис. 13). Поверхность Земли в окрестности той же точки можно считать плоской. При решении выберем сначала систему отсчета, в которой Земля покоится. Пусть $\omega_С$ и $\omega_Л$ — угловые скорости вращения Солнца и Луны вокруг центра Земли, $R_С$ и $R_Л$ — расстояния их от того же центра, r — радиус Земли. За 1 с Солнце и Луна переместятся с востока на запад на расстояния $CC' = \omega_С R_С$ и $ЛЛ' = \omega_Л R_Л$. Соединив новые положения Солнца и Луны прямой линией, найдем, что за 1 с

граница лунной тени переместится по земной поверхности с запада на восток на расстояние $v = AA'$. Это расстояние и есть скорость движения тени Луны. Из рис. 13 видно, что

$$\frac{v}{\omega_С R_С} = \frac{x}{OC} \approx \frac{x}{R_С},$$

так как расстояние до Луны пренебрежимо мало по сравнению с расстоянием до Солнца, и можно принять $OC = R_С$. Таким образом, $v = \omega_С x$. Для нахождения x составляем пропорцию

$$\frac{\omega_С R_С}{\omega_Л R_Л} = \frac{CC'}{ЛЛ'} = \frac{OC}{OЛ}.$$

Полагая в ней $OC = R_С$, $OЛ = R_Л - x - r$, получим уравнение для нахождения x. Оно дает

$$x = \frac{\omega_С - \omega_Л}{\omega_С} R_Л - r.$$

Следовательно, скорость движения лунной тени с запада на восток будет

$$v = \omega_С x = (\omega_С - \omega_Л) R_Л - \omega_С r.$$

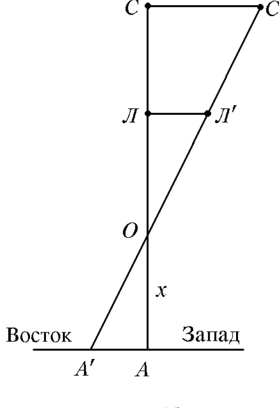


Рис. 13

Здесь $\omega_С = 2\pi/T_{сут}$, $\omega_С - \omega_Л = 2\pi/T_{мес}$, где $T_{сут} = 86\,400$ с — продолжительность солнечных суток, а $T_{мес} = 29{,}6\ T_{сут}$ — продолжительность месяца. Используя эти соотношения и подставляя числовые значения $R_Л = 3{,}8 \cdot 10^5$ км, $r = 6400$ км, получим

$$v = \frac{2\pi R_Л}{T_{мес}} - \frac{2\pi r}{T_{сут}} \approx 0{,}47 \text{ км/с}. \tag{4.17}$$

Смысл последней формулы легко уяснить, перейдя в систему отсчета, в которой Солнце покоится. Считая Солнце бесконечно удаленным, можно отвлечься от движения центра Земли, приняв во внимание лишь вращение Земли вокруг своей оси, а также движение Луны по ее орбите вокруг Земли. Луна движется по орбите с запада на восток со скоростью $v_Л = 2\pi R_Л / T_{мес}$. Если бы Земля не вращалась, то с той же скоростью и в том же направлении по ее поверхности бежала бы лунная тень. Но из-за вращения Земли экваториальные точки последней движутся с запада на восток со скоростью $v_З = 2\pi r / T_{сут}$. Для нахождения скорости лунной тени эту величину надо вычесть из $v_Л$, что и сделано в формуле (4.17).

§ 5. ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ КЛАССИЧЕСКОГО СПОСОБА ОПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

В классической механике состояние движения частицы в любой момент времени характеризуется положением (координатой x при одномерном движении) и *скоростью* $\mathbf{v}$. Вместо скорости можно поль-

зоваться также *импульсом*, т. е. величиной $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, равной произведению *массы частиц* m на ее скорость *). Образом частицы является геометрическая точка, описывающая с течением времени непрерывную траекторию. В квантовой механике показано, что такой способ описания движения имеет принципиальные границы применимости.

Здесь преждевременно вдаваться в подробное обсуждение этого вопроса. Достаточно ограничиться предварительным сообщением основного результата, не касаясь его обоснования.

Согласно квантовой механике состояние частицы в каждый момент времени нельзя характеризовать точными значениями ее координаты и импульсом в этот момент времени. Если в каком-либо состоянии координата известна с неопределенностью δx, а импульс — с неопределенностью δp, то обе эти величины одновременно не могут быть сделаны сколь угодно малыми. Они связаны соотношением

$$\delta x \cdot \delta p \gtrsim h, \tag{5.1}$$

где h — универсальная постоянная, называемая *постоянной Планка* в честь немецкого физика-теоретика Макса Планка (1858—1947). Она играет основную роль во всех квантовых явлениях. Ее числовое значением равно

$$h = 6{,}626171 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}.$$

Соотношение (5.1) называется *принципом неопределенностей Гайзенберга* по имени немецкого физика-теоретика Вернера Гайзенберга (1901--1976). Это соотношение определяет принципиальный предел точности одновременного измерения координаты и импульса частицы, который не может быть превзойден никаким усовершенствованием приборов и методов измерения. Дело здесь не в ошибках измерений. Такова уж природа реальных частиц, что мгновенные состояния их движения не могут быть охарактеризованы классически — точными значениями координат и импульсов. Частицы ведут себя более сложно, чем материальные точки классической механики. Классическая картина движения по непрерывным траекториям лишь приближенно соответствует законам природы. Границы ее применимости определяются соотношением неопределенностей (5.1). Из него следует, что мгновенное состояние движения частицы нельзя также характеризовать абсолютно точными значениями координаты и скорости. Неопределенности этих величин должны удовлетворять условию

$$\delta x \cdot m\delta v \gtrsim h. \tag{5.2}$$

Для макроскопических тел практическая применимость классического способа движения не вызывает сомнений. Допустим, например, что речь идет о движении шарика с массой $m = 1$ г. Обычно положение шарика практически может быть определено с точностью

*) Понятия массы и импульса вводятся и подробно обсуждаются в § 10.

до десятой или сотой доли миллиметра. Во всяком случае, вряд ли имеет смысл говорить о погрешности в определении положения шарика, меньшей размеров атома. Положим поэтому $\delta x = 10^{-8}$ см. Тогда из соотношения неопределенностей (5.1) найдем

$$\delta v \gtrsim \frac{6{,}63 \cdot 10^{-27}}{10^{-8}} \approx 10^{-18} \text{ см/с}.$$

Одновременная малость величин δx и δv и является доказательством практической применимости классического способа описания движения для макроскопических тел. Не так обстоит дело, когда речь идет об атомных явлениях — явлениях, происходящих с частицами очень малой массы в очень малых объемах пространства. Рассмотрим, например, движение электрона в атоме водорода. Масса электрона $m = 9{,}11 \cdot 10^{-28}$ г. Погрешность в положении электрона δx во всяком случае не должна превышать размеры атома, т. е. погрешность δx должна быть $< 10^{-8}$ см. Но тогда из соотношения неопределенностей получаем

$$\delta v = \frac{h}{m\delta x} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-27}}{9{,}11 \cdot 10^{-28} \cdot 10^{-8}} \approx 7 \cdot 10^{8} \text{ см/с}.$$

Эта величина не меньше, а даже больше самой скорости электрона в атоме, которая по порядку величины равна 10^8 см/с. При таком положении классическая картина движения теряет всякий смысл.

§ 6. О СМЫСЛЕ ПРОИЗВОДНОЙ И ИНТЕГРАЛА В ПРИЛОЖЕНИЯХ К ФИЗИЧЕСКИМ ВОПРОСАМ

1. Процесс предельного перехода (3.4), с помощью которого определяется производная, называется *дифференцированием*. Понятие производной широко используется в механике и во всех других разделах физики. Именно задача об определении скорости произвольного движения привела к этому понятию Ньютона, который, наряду с Готфридом Лейбницем (1646—1716), является основоположником дифференциального и интегрального исчислений. Обозначение $\frac{dx}{dt}$ для производной принадлежит Лейбницу. На символ $\frac{dx}{dt}$ в математике следует смотреть как на единое целое, а не как на отношение двух «бесконечно малых» приращений dx и dt. Смысл производной $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ точно определен соотношением (3.4). Сначала надо образовать отношение конечных приращений $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, предполагая, что Δt не равно нулю. Затем путем преобразований этого отношения или каким-либо иным способом следует совершить переход к пределу. Но ни в коем случае нельзя представлять себе, что сначала

совершен какой-то предельный переход от Δx и Δt к «бесконечно малым» величинам dx и dt, называемым *дифференциалами* функции x и аргумента t, а затем взято отношение этих дифференциалов $\frac{dx}{dt}$. Такой взгляд на производную существовал в начальной стадии развития дифференциального исчисления. Однако он несовместим с требованием математической ясности понятий, да и вообще лишен смысла. Правда, можно так определить дифференциалы dx и dt, что их отношение сделается равным производной $\dot{x}$. В математике дифференциал dt определяется как произвольное приращение аргумента t, а дифференциал dx — с помощью соотношения $dx = \dot{x}dt$. Но теперь в утверждении, что производная есть отношение двух конечных величин dx и dt, нет ничего удивительного, это — простая тавтология, иной способ выражения. Первичным по-прежнему является понятие производной, а не дифференциала.

Однако в приложениях математики к физике надо считаться с тем, что физические величины получаются в конце концов в результате конкретных измерений, а все измерения сопровождаются погрешностями и вносят искажения в естественный ход явлений. Это обстоятельство, строго говоря, делает невозможным предельный переход $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$, вводимый в математике при определении производной. Допустим, например, что измеряется скорость движущейся пули в воздухе. Задача сводится к измерению расстояния Δx и промежутка времени Δt, за который пуля проходит это расстояние. Если время Δt взять очень большим, то за это время скорость пули может заметно уменьшиться из-за сопротивления воздуха. Отношение $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ в этом случае может оказаться заметно меньше скорости пули в рассматриваемый момент времени. Уменьшая время Δt, мы заметим, что начиная с определенного момента отношение $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ в пределах доступной точности изменяется, если отвлечься от случайных погрешностей, сопровождающих каждое измерение. Дальнейшее уменьшение Δt бессмысленно. Оно может только ухудшить дело, так как при дальнейшем уменьшении Δt отношение $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ начинает изменяться снова и притом все более и более нерегулярно. Оно принимает различные значения от очень больших до очень малых. Это обусловлено тем, что точность любого измерения тем меньше, чем меньше измеряемая величина. Не представляет, например, особо большого труда измерить длину в 1 м с погрешностью до 1 мм, т. е. с относительной точностью 1/1000. Но измерить с такой же относительной точностью длину в 1 мм значительно труднее. Чем меньше Δt, тем больше погрешность, с которой мы вычисляем отношение $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Если Δt уменьшать беспредельно, то вычисленные значения отношения $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ не будут стремиться ни к какому определенному пределу. Это показывает, что в рассматриваемом

примере из-за погрешностей измерений предельный переход к $\Delta t \to 0$ не может быть осуществлен в строго математическом смысле. Вычислить истинную скорость или производную $v = \dot{x}$ из физических измерений можно лишь приближенно, отождествляя ее с отношением конечных приращений $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Оптимальное значение времени Δt, при котором точность вычисления истинной скорости максимальна, определяется конкретными условиями. Малые, но конечные приращения Δx и Δt, отношение которых с достаточной точностью аппроксимирует производную $\dot{x}$, физик называет *бесконечно малым* или, полнее, *физически бесконечно малыми величинами*. Он обозначает их через dx и dt и обращается с ними как с математическими дифференциалами. Таким образом, в *физике производная выступает как отношение конечных, но достаточно малых приращений функции и аргумента, а не как предел этого отношения.*

Однако не только погрешности измерений могут сделать невозможным практическое выполнение предельного перехода в строго математическом смысле. Такая невозможность может быть и принципиальной, обусловленной самой природой физических величин и физических законов. Так, точное выполнение предельного перехода невозможно из-за соотношения неопределенностей (5.1). Действительно, если промежуток времени Δt стремится к нулю, то при этом будет стремиться к нулю и проходимое расстояние Δx. Неопределенность δx в измерении проходимого расстояния не должна превосходить Δx. Иначе вычисление средней скорости по формуле $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ потеряло бы всякий смысл. Таким образом, при $\Delta t \to 0$ должна стремиться к нулю и неопределенность в координате δx. Но тогда, согласно соотношению (5.1), неопределенность скорости δv будет стремиться к бесконечности. Это значит, что погрешность, возникающая при вычислении скорости v по формуле (3.3), сколь угодно велика по сравнению с самой скоростью v.

2. Изложенные выводы относятся не только к производной координаты, но и к производным всяких физических величин. Допустим, например, что требуется определить плотность вещества в какой-либо точке пространства. С этой целью можно поступить следующим образом. Окружим рассматриваемую точку замкнутой поверхностью, ограничивающей объем ΔV. Обозначим через Δm массу вещества, содержащегося в этом объеме. Отношение

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

называется *средней плотностью вещества в объеме* ΔV. Средняя плотность, вообще говоря, зависит от объема ΔV, внутри которого находится рассматриваемая точка, а также от его формы. Чтобы исключить эту зависимость, вводят понятие *истинной плотности* вещества, определяя ее путем предельного перехода $\Delta V \to 0$. Обычно

говорят, что при этом средняя плотность $\rho_{\text{ср}}$ стремится к определенному пределу ρ, который и называется истинной плотностью вещества в рассматриваемой точке пространства:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}. \tag{6.1}$$

Истинная плотность определяется, таким образом, *как производная массы по объему.* Эта величина зависит только от положения точки, к которой она относится. Однако если в формуле (6.1) предельный переход понимать буквально в строго математическом смысле, то для реальных тел он выполнен быть не может из-за атомистической структуры вещества. При уменьшении объема в нем рано или поздно окажется лишь небольшое число молекул, например одна или даже ни одной молекулы. Кроме того, молекулы совершают беспорядочные тепловые движения, одни молекулы уходят из объема ΔV, другие вступают в него. Ввиду этого число молекул в фиксированном малом объеме ΔV весьма быстро и беспорядочно меняется во времени. При уменьшении ΔV отношение $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ будет быстро и беспорядочно меняться от нуля, когда внутри объема ΔV нет молекул, до очень больших значений, когда в него попадает одна или несколько молекул. При бесконечном уменьшении ΔV отношение $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ не будет стремиться к определенному пределу. Ввиду этого при определении истинной плотности вещества нельзя брать величины Δm и ΔV сколь угодно малыми. Объем ΔV должен иметь макроскопические размеры, т. е. содержать еще очень большое число молекул. Но он должен быть достаточно мал, чтобы содержащееся в нем вещество могло рассматриваться приближенно как макроскопически однородное. Если оба эти требования выполняются, то отношение $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ будет иметь практически вполне определенное значение, не меняющееся при дальнейшем уменьшении макроскопического объема ΔV. Это отношение мы и принимаем в физике за производную массу m по объему V. Величины Δm и ΔV, удовлетворяющие указанным двум требованиям, в физике рассматриваются как *физически бесконечно малые*, и с ними физика обращается как с математическими дифференциалами. Математически этому соответствует замена реального тела идеализированной моделью с непрерывным распределением масс.

3. Совершенно так же обстоит дело с понятием интеграла. В математике интеграл определяется предельным переходом

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Числовой промежуток (a, b) разбивается на n частичных промежутков $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. Длина каждого из них Δx_i умножается на

значение функции $f(x)$ в произвольной точке, лежащей внутри рассматриваемого частичного промежутка. Затем составляется сумма $\sum f(x_i)\,\Delta x_i$ и выполняется переход к пределу $n \to \infty$ в предположении, что длина каждого из частичных промежутков стремится к нулю. В физике, однако, из-за погрешностей измерений или по принципиальным соображениям (например, из-за атомистической структуры вещества) деление промежутка (a, b) на частичные промежутки меньше определенной длины (значение которой зависит от конкретных условий) теряет смысл. Ввиду этого предельный переход к $\Delta x_i \to 0$ не может быть выполнен до конца, а должен быть оборван в каком-то месте. Это означает, что *в физике интеграл выступает не как предел суммы, а как сумма большого числа достаточно малых слагаемых* $\sum f(x_i)\,\Delta x_i$.

§ 7. О ВЕКТОРАХ И СЛОЖЕНИИ ДВИЖЕНИЙ

1. Понятие вектора и основные операции векторной алгебры мы считаем известными. Остановимся только на разъяснении некоторых принципиальных моментов, представляющий особый интерес в физике. Среди физических величин встречаются величины, не имеющие направления, и величины, которым можно приписать определенное направление. Величины первого рода называются *скалярными*. К ним относятся, например, масса, энергия, температура, электрический заряд и пр. Величины второго рода называются *векторами*. Примерами векторов являются скорость, ускорение, сила, напряженности электрического и магнитного полей и пр. Векторы принято изображать направленными отрезками или стрелками и обозначать прямыми буквами полужирного шрифта ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, ...) или (реже) буквами, над которыми поставлены стрелки ($\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, ...).

В качестве дополнения к приведенному определению иногда указывают, что не всякие направленные величины являются векторами, а только такие, которые складываются *геометрически*, т. е. по *правилу параллелограмма*. Однако это указание остается расплывчатым и бессодержательным, пока не сказано, что следует понимать под сложением рассматриваемых физических величин. Смысл сложения физических величин еще не определяется их физической природой. Сначала надо указать, чтó мы понимаем под сложением двух физических величин, а затем уже находить правила, по которым должно проводиться это сложение. Только тогда указание, о котором говорилось выше, приобретает определенное содержание. Нередко для решения вопроса, являются ли рассматриваемые физические величины векторами или нет, в их сложение вкладывают такой смысл, который к этому вопросу не имеет никакого отношения.

2. Например, сложение скоростей в механике понимают в следующем смысле. Пусть точка движется относительно системы отсчета

S_1 со скоростью $\mathbf{v}_1$ (например, пассажир идет по палубе корабля). Пусть далее система отсчета S_1 сама движется со скоростью $\mathbf{v}_2$ относительно другой системы отсчета S_2, условно принимаемой за неподвижную (например, корабль движется относительно берега). Под сложением движения понимают операцию, с помощью которой по этим данным можно найти скорость $\mathbf{v}$ точки (пассажира) относительно неподвижной системы S_2 (берега). В релятивистской кинематике это определение должно быть дополнено указанием, что каждая из скоростей $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ измеряется с помощью линеек и часов в той системе отсчета, относительно которой рассматривается движение. В нерелятивистской кинематике такое указание излишне, так как длины и промежутки времени в ней имеют абсолютный смысл, т. е. не зависят от системы отсчета. И вот оказывается, что сложение движений в указанном смысле в нерелятивистской кинематике производится по правилу параллелограмма, а в релятивистской кинематике это правило не справедливо. Тем не менее скорость точки считается вектором как в той, так и в другой кинематике. Это показывает, что правило параллелограмма скоростей для сложения движений в указанном смысле не имеет никакого отношения к вопросу о том, является скорость вектором или нет *).

Да и в самой нерелятивистской кинематике можно указать величины, которые считаются векторами, но тем не менее не всегда складываются по правилу параллелограмма, если в сложение этих величин вложить примерно такой же смысл, что и в сложение скоростей в вышеприведенном примере. К таким величинам относится, например, ускорение. Пусть точка движется относительно системы отсчета S_1 с ускорением $\mathbf{a}_1$, а система S_1 имеет ускорение $\mathbf{a}_2$ относительно «неподвижной» системы отсчета S_2. По этим данным можно найти ускорение $\mathbf{a}$ точки относительно системы S_2 только в том случае, когда складываемые движения поступательные. В этом случае вектор $\mathbf{a}$ находится по правилу параллелограмма. В остальных случаях для нахождения результирующего ускорения знания ускорений $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ недостаточно, и само нахождение вектора $\mathbf{a}$ производится по более сложному правилу, которое будет рассмотрено в § 64.

3. Приведенные примеры показывают, что определение вектора нуждается в уточнении. Необходимость этого диктуется также сле-

*) Если бы все скорости измерялись в одной и той же «неподвижной» системе отсчета S_2, то правило параллелограмма сохраняло бы силу и в релятивистской кинематике. Однако при этом изменился бы смысл скорости $\mathbf{v}_1$. Под $\mathbf{v}_1$ следовало бы понимать скорость точки относительно движущейся системы отсчета S_1, *измеренную в «неподвижной» системе* S_2. При сложении же скоростей в том смысле, в каком оно понимается в тексте, $\mathbf{v}_1$ есть скорость точки относительно движущейся системы S_1, *измеренная в той же системе*. А это существенно иная величина. Только в предельном случае бесконечно медленных движений обе скорости совпадают. При изложении теории относительности затронутые вопросы будут разобраны подробно.

дующими соображениями. Не всегда очевидно, какое направление следует приписать той или иной физической величине. Например, в случае геометрического отрезка AB не возникает вопроса, что следует считать его направлением. За таковое можно принять либо направление от точки A к точке B, либо противоположное направление — от точки B к точке A. Не возникает вопроса, что́ следует считать направлением смещения, скорости или ускорения точки, а также направлением силы, на нее действующей. Однако не очевидно, что́ следует считать за направление угловой скорости или геометрической поверхности, в особенности, когда последняя изогнута. Наконец, точное определение вектора необходимо дать для того, чтобы обобщить это понятие на случай *многомерных пространств*. Чтобы прийти к такому определению, рассмотрим сначала простейший вектор, а именно геометрический прямолинейный отрезок, на котором установлено определенное направление. Такой направленный отрезок будем изображать стрелкой $\mathbf{a}$. Возьмем какую-либо произвольную прямоугольную или косоугольную систему координат и спроецируем отрезок $\mathbf{a}$ на координатные оси X, Y, Z. Проецирование будем производить плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Например, чтобы получить проекцию на ось X, надо через концы отрезка $\mathbf{a}$ провести плоскости, параллельные координатной плоскости YZ. Эти плоскости и отсекут на оси X отрезок a_x, являющийся проекцией отрезка $\mathbf{a}$ на рассматриваемую ось. Аналогично получаются проекции a_y и a_z. Обычно рассматривают прямоугольные координатные системы. Тогда a_x, a_y, a_z будут *прямоугольными*, или *ортогональными*, *проекциями* отрезка $\mathbf{a}$. Если проекции a_x, a_y, a_z известны в какой-либо системе координат S, то их можно найти и в любой другой координатной системе S', оси которой произвольным образом повернуты относительно системы S. Для этого по проекциям a_x, a_y, a_z в системе S надо восстановить отрезок $\mathbf{a}$ как диагональ параллелепипеда, построенного на отрезках a_x, a_y, a_z. Затем следует, спроецировать этот отрезок на оси X', Y', Z' новой системы координат S'. Получится тройка чисел $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$, которые и являются проекциями отрезка $\mathbf{a}$ в новой системе координат. Теперь мы даем следующее определение вектора.

Вектором $\mathbf{a}$ называется упорядоченная тройка чисел a_x, a_y, a_z, заданная в каждой системе координат. (Упорядочение состоит в том, что первое число a_x приводится в соответствии оси X, второе число a_y — оси Y, третье число a_z — оси Z.) Эти числа называются *проекциями вектора* $\mathbf{a}$ на соответствующие координатные оси. Их называют также *составляющими*, или *компонентами*, *вектора*. *При переносе начала и повороте координатных осей составляющие a_x, a_y, a_z преобразуются по правилу преобразования проекций геометрических отрезков.*

Короче, *вектором* называется упорядоченная тройка чисел, заданная в каждой системе координат, которые при переносе начала

и повороте координатных осей преобразуются как разности координатных концов направленного геометрического отрезка.

Отложив эти числа вдоль координатных осей X, Y, Z, мы отсечем на них три отрезка. Если на таких трех отрезках как ребрах построить параллелепипед, то его диагональ можно рассматривать как направленный отрезок, служащий наглядным изображением вектора. Этот отрезок получится одним и тем же, какую бы систему координат мы не использовали при его построении. В этом проявляется *инвариантный* характер вектора, т. е. независимость его от системы координат, использованной для его представления. Компоненты вектора a_x, a_y, a_z в разных системах координат разные, но самый вектор **a** один и тот же. Векторное равенство $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, записанное в координатной форме, равносильно трем равенствам $a_i = b_i$ $(i = x, y, z)$. При переходе к другой (штрихованной) системе координат обе части этих равенств преобразуются одинаково. Поэтому в новой системе координат они сохраняют прежний вид, т. е. $a_{i'} = b_{i'}$ $(i' = x', y', z')$. Уравнения, обе части которых при переходе к другой системе координат преобразуются одинаково и благодаря этому сохраняют свой вид во всех координатных системах, называются *ковариантными или инвариантными* по отношению к рассматриваемому преобразованию координатных систем. Мы видим, что *векторное уравнение* $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ *инвариантно по отношению к переносу начала и повороту координатных осей. Ввиду этой инвариантности уравнения, выражающие физические законы в векторной форме, не зависят от выбора осей координат.* С помощью векторов физические законы формулируются в простой и обозримой форме, которая не сохраняется, если выразить их через проекции векторов в какой-либо системе координат.

Заметим, что координатные оси X, Y, Z не обязательно должны поворачиваться вместе подобно повороту твердого тела. Определение предусматривает и такие случаи, когда оси X, Y, Z поворачиваются независимо. Путем поворотов такого типа может быть совершен переход от любой прямолинейной системы координат к другой прямолинейной системе — правой или левой, оси которой ориентированы совершенно произвольно. В частности, такими поворотами может быть осуществлена инверсия осей, т. е. одновременное изменение на противоположные положительных направлений всех трех осей.

Если обе координатные системы прямоугольные, то формулы преобразования проекций имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} a_{x'} &= \alpha_{x'x} a_x + \alpha_{x'y} a_y + \alpha_{x'z} a_z, \\ a_{y'} &= \alpha_{y'x} a_x + \alpha_{y'y} a_y + \alpha_{y'z} a_z, \\ a_{z'} &= \alpha_{z'x} a_x + \alpha_{z'y} a_y + \alpha_{z'z} a_z, \end{aligned} \tag{7.1}$$

где $\alpha_{x'x}$, $\alpha_{x'y}$, ... — косинусы углов между соответствующими координатными осями обеих систем координат. Например, $\alpha_{y'z}$ означает косинус угла между положительными направлениями осей Y' и Z.

4. Аналогично *скаляром* или *инвариантом* называется число, заданное в каждой системе координат, причем при переносе начала и повороте координатных осей это число остается неизменным. Таким образом, как и определение вектора, это определение предусматривает только перенос начала и поворот координатных осей. Оно предполагает, что обе координатные системы должны оставаться неподвижными одна относительно другой. Примерами скаляров являются время, масса, электрический заряд и пр. Абсцисса x неподвижной точки не является скаляром, так как ее числовое значение в разных системах координат разное. Скаляры можно образовывать из векторов. Например, скаляром является *длина вектора* или *ее квадрат*, который в прямоугольной системе координат представляется выражением $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$. *Скаляром является скалярное произведение двух векторов* **a** и **b**, *т. е. величина* $(\mathbf{ab}) = ab\cos\vartheta$, где ϑ — угол между этими векторами. В прямоугольной системе координат, как известно, скалярное произведение представляется выражением $(\mathbf{ab}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ (см. задачи 1 и 3 к этому параграфу).

5. На основании изложенного ясно, что для доказательства векторного характера той или иной направленной физической величины надо только установить, как определяются ее составляющие вдоль координатных осей и как они преобразуются при переходе от одной координатной системы к любой другой, оси которой повернуты относительно осей первоначальной системы. При этом имеются в виду координатные системы, неподвижные одна относительно другой.

Например, двум векторам **a** и **b** с составляющими a_x, a_y, a_z и b_x, b_y, b_z можно сопоставить в каждой системе координат упорядоченную тройку чисел $c_x = a_x + b_x$, $c_y = a_y + b_y$, $c_z = a_z + b_z$. Легко видеть, что такая тройка чисел образует вектор, так как эти числа подчиняются тем же правилам преобразования, что и составляющие векторов **a** и **b**. Вектор $\mathbf{c}(c_x, c_y, c_z)$ называется *суммой векторов* **a** *и* **b**. Легко доказать, что он может быть получен из векторов **a** и **b** геометрическим построением по правилу параллелограмма. Аналогично определяется и *вычитание векторов. Разность двух векторов* **a** и **b** есть вектор **d**, определяемый упорядоченной тройкой чисел $d_x = a_x - b_x$, $d_y = a_y - b_y$, $d_z = a_z - b_z$. Для его построения надо изменить на противоположное направление вектора **b** (получаемый таким путем вектор обозначают $-\mathbf{b}$), а затем на векторах **a** и $-\mathbf{b}$ построить параллелограмм.

В таком смысле сложение и вычитание векторов вводится путем *математического определения*. Над векторами можно производить и другие операции, вводимые таким же путем, например умножение вектора на скаляр или скалярное и векторное перемножение двух векторов. Все операции такого типа мы называем *математическими*. Их свойства устанавливаются соответствующими математическими теоремами. Не имеет смысла ставить вопрос об опытной

проверке результатов, получаемых с помощью таких математических операций. Например, о сложении векторов, как оно только что определено, мы будем говорить как о *математическом сложении* или *сложении в математическом смысле*. Но когда векторами изображают различные физические величины, часто в их сложение или вычитание вкладывается какой-то другой смысл. А именно для получения суммы или разности векторов над ними надо произвести какие-то (хотя бы мысленные) *физические операции*. Сложение и вычитание в таком смысле мы условимся называть *физическими*. Будет ли какое-либо конкретное физическое сложение совпадать с математическим (т. е. с правилом параллелограмма) и будет ли в результате такого сложения получаться вектор — это требует дополнительного исследования, в частности опытного.

6. Поставим, например, такой вопрос. Точка перешла из положения A в положение B вдоль прямолинейного отрезка $\overrightarrow{AB}$ (рис. 14). Затем из положения B она перешла в C вдоль отрезка $\overrightarrow{BC}$. Вдоль какого прямолинейного отрезка должна перемещаться точка, чтобы из A попасть в C? Ясно, что таким отрезком является отрезок $\overrightarrow{AC}$. Его можно рассматривать как геометрическую сумму отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. Сложение перемещений в таком понимании производится по правилу параллелограмма, т. е. совпадает с математическим сложением векторов. Тому же правилу подчиняется и сложение скоростей в следующем смысле. Точка в течение секунды перешла из A в B, двигаясь равномерно со скоростью $\mathbf{v}_1$. Затем также в течение секунды она перешла из B в C с постоянной скоростью $\mathbf{v}_2$. С какой постоянной скоростью v должна двигаться точка, чтобы в одну секунду перейти из A в C? Но в сложение скоростей обычно вкладывается другой смысл, разъяснимый на следующем примере. Точка перешла из A в B вдоль прямолинейного отрезка на палубе корабля, двигаясь равномерно со скоростью $\mathbf{v}_1$. За то же время сам корабль переместился относительно берега на отрезок BC, двигаясь с постоянной скоростью $\mathbf{v}_2$. С какой скоростью $\mathbf{v}$ двигалась точка относительно берега? Здесь сложение движений и их скоростей понимается в *другом смысле*. Оба движения рассматриваются в *разных* системах отсчета, движущихся одна относительно другой. Одной системой является корабль, и скорость $\mathbf{v}_1$ измеряется с помощью линеек и часов в этой системе. Другой системой является берег, и скорости $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}$ измеряются с помощью линеек и часов этой системы. На вопрос о результате сложения в таком смысле должен в конце концов ответить опыт. Дорелятивистская кинема-

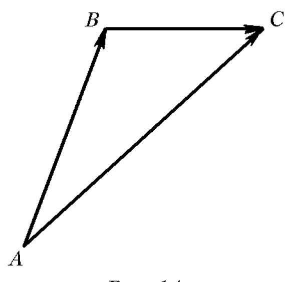


Рис. 14

тика утверждала, что по своему результату сложение движений во втором смысле не может отличаться от сложения в первом смысле. Это происходит потому, что в дорелятивистской физике длины отрезков и промежутков времени не зависят от того, в какой системе отсчета они измеряются. Сложение скоростей и во втором смысле в дорелятивистской кинематике происходило по правилу параллелограмма, т. е. совпадало с математическим сложением векторов. В релятивистской кинематике это уже не так. *Сложение скоростей во втором смысле не подчиняется правилу параллелограмма.* Это правило приближенно верно только в пределе, когда обе складываемые скорости очень малы по сравнению со скоростью света.

7. Каждому вектору $\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$ и скаляру λ можно аксиоматически сопоставить объект $\lambda\mathbf{a}$, задаваемой упорядоченной тройкой чисел λa_x, λa_y, λa_z. Легко убедиться, что такой объект будет вектором. Он называется *произведением скаляра* λ *на вектор* $\mathbf{a}$. Бесконечно малое приращение вектора $d\mathbf{a}$ само является вектором. Бесконечно малое приращение любого скаляра t есть также скаляр dt. Этим двум величинам можно сопоставить вектор $\frac{1}{dt}\,d\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{a}}{dt}$, называемый *производной вектора* $\mathbf{a}$ *по скаляру* t.

8. Теперь мы в состоянии доказать векторную природу многих физических величин, с которыми имеет дело механика. Прежде всего, *смещение точки из какого-либо положения A в другое положение B вдоль соединяющего их прямолинейного отрезка AB есть вектор.* Это очевидно, так как по самому определению при смещении начала и повороте координатных осей компоненты вектора должны преобразовываться так же, как проекции направленного отрезка. Обозначим рассматриваемый отрезок через $\mathbf{r}$. Продифференцируем этот отрезок по времени t в предположении, что начальная точка его закреплена. *Производная* $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ *будет вектором*, так как время — скаляр. Но такая производная есть скорость точки $\mathbf{v}$. Таким образом, *скорость* $\mathbf{v}$ также есть *вектор*. Дифференцируя $\mathbf{v}$ снова по t, найдем *другой вектор — ускорение точки* $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$. *Масса точки* m *является скаляром.* Умножая его на скорость $\mathbf{v}$, получаем вектор $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, называемый *импульсом точки*. Дифференцируя его по времени, получаем *силу* $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$, действующую на точку. Таким образом, *сила есть вектор.*

9. Приведем несколько более сложные примеры векторов. Возьмем в пространстве какой-либо *ориентированный контур* L, т. е. не самопересекающуюся замкнутую кривую, проходимую в каком-то опредленном направлении. Спроецируем этот контур на координатные плоскости прямоугольной системы координат XYZ. Получим три ориентированных плоских замкнутых контура L_x, L_y, L_z, лежа-

щих в координатных плоскостях YZ, ZX, XY соответственно (на рис. 15 контур L не изображен, изображены только его проекции). Обозначим через S_x, S_y, S_z площади, ограниченные замкнутыми контурами L_x, L_y, L_z. Эти величины будем считать положительными, если контуры L_x, L_y, L_z обходятся в *положительных направлениях*, и отрицательными — в противоположном случае. Положительные направления обхода контуров L_x, L_y, L_z задаются по-разному в зависимости от того, какая используется система координат — правая или левая. В правой системе координат направления обхода контуров L_x, L_y, L_z считаются положительными, если они находятся в *правовинтовом соотношении* с положительными направлениями координатных осей X, Y, Z соответственно, а в левой системе — в *левовинтовом*. Это значит, например, что в правой системе координат вращение ручки буравчика с правой нарезкой в положительном направлении контура L_z приводит к поступательному перемещению буравчика в положительном направлении оси Z. В левой системе будет то же самое, если взять буравчик с левой нарезкой. При таком соглашении о знаках площади S_x, S_y, S_z представляются интегралами

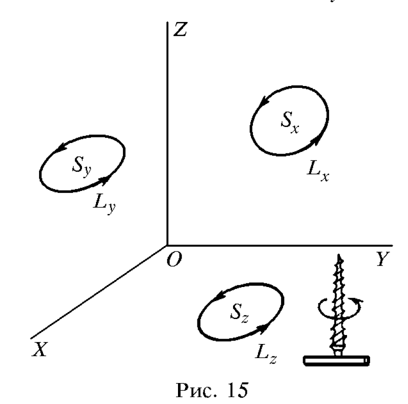


Рис. 15

$$S_x = \int\limits_{L_x} y\, dz, \qquad S_y = \int\limits_{L_y} z\, dx, \qquad S_z = \int\limits_{L_z} x\, dy, \tag{7.2}$$

взятыми по контурам L_x, L_y, L_z, независимо от того, применяется ли правая или левая система координат.

Мы утверждаем, что тройка чисел S_x, S_y, S_z образует вектор, с одной оговоркой, о которой будет сказано ниже. Для доказательства рассмотрим сначала частный случай, когда контур L плоский. Вдоль нормали к плоскости контура отложим направленный отрезок A, длина которого численно равна площади S, ограниченной контуром L, а направление находится в правовинтовом соотношении с направлением обхода по контуру, если используется правая система координат, и в левовинтовом соотношении, если используется левая система координат (рис. 16).

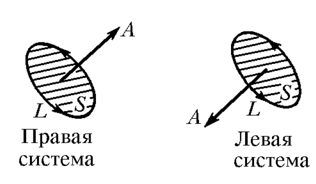


Рис. 16

Сначала будем пользоваться системами координат только какого-либо определенного типа: либо только одними правыми, либо только одними левыми. Построенный нами отрезок **A** совершенно не зави-

сит от выбора координатных осей, а потому является вектором. В самом деле, его проекции на координатные оси равны

$$A_x = A\cos(\mathbf{A}, X), \quad A_y = A\cos(\mathbf{A}, Y), \quad A_z = A\cos(\mathbf{A}, Z).$$

С другой стороны, по известной геометрической теореме

$$S_x = S\cos(\mathbf{A}, X), \quad S_y = S\cos(\mathbf{A}, Y), \quad S_z = S\cos(\mathbf{A}, Z).$$

Так как длину **A** мы выбрали численно равной S, то в любой системе координат $S_x = A_x$, $S_y = A_y$, $S_z = A_z$. Отсюда следует, что при вращении координатной системы S_x, S_y, S_z преобразуются так же, как компоненты вектора **A**. Поэтому S_x, S_y, S_z образуют вектор. Его мы будем обозначать буквой **S** и называть *вектором площади*, ограниченной ориентированным контуром L. В этом смысле говорят, что площадь является вектором. Это утверждение доказано нами для плоских контуров и плоских площадей.

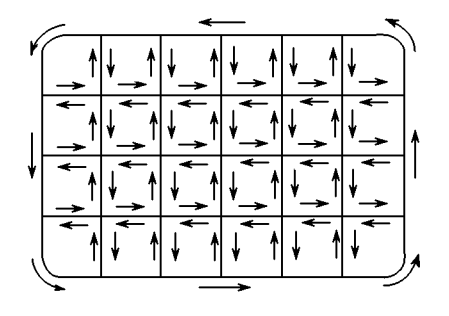


Рис. 17

Обобщение на случай неплоских контуров и площадей не представляет затруднений. Пусть L — такой контур. Натянем на него совершенно произвольную поверхность и разобъем ее на достаточно большое число n малых ориентированных областей, как указано на рис. 17. Проецируя их на координатные плоскости, получим

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} S_{ix}, \quad S_y = \sum_{i=1}^{n} S_{iy}, \quad S_z = \sum_{i=1}^{n} S_{iz},$$

где S_{ix}, S_{iy}, S_{iz} — проекции на те же плоскости i-й элементарной области. Число n можно взять сколь угодно большим и рассматривать каждую малую область S_i как плоскую. Тогда на основании доказанного можно утверждать, что S_{ix}, S_{iy}, S_{iz} образуют вектор. Будет образовывать вектор и тройка чисел S_x, S_y, S_z, так как эти числа получаются путем сложения компонентов векторов $\mathbf{S}_i$.

10. В одном отношении, однако, тройка чисел S_x, S_y, S_z отличается от вектора. Эти числа преобразуются так же, как компоненты вектора при *вращении координатной системы как целого*, когда система координат все время остается либо правой, либо левой. Однако они ведут себя существенно иначе при *переходе от правой системы координат к левой или наоборот*, например при инверсии координатных осей. В этом случае для нахождения направления **S** надо перейти от одного винта к другому. Если в правой системе координат величину S изобразить стрелкой, то при переходе к левой

направление стрелки надо изменить на противоположное. Величины такого типа называются *псевдовекторами*, или *аксиальными векторами*, в отличие от *полярных векторов*, которые мы рассматривали до сих пор. *При повороте координатной системы как целого аксиальные векторы ведут себя в точности так же, как и полярные векторы. При инверсии координатных осей компоненты полярных векторов заменяют знаки, в то время как компоненты аксиальных векторов остаются неизменными.*

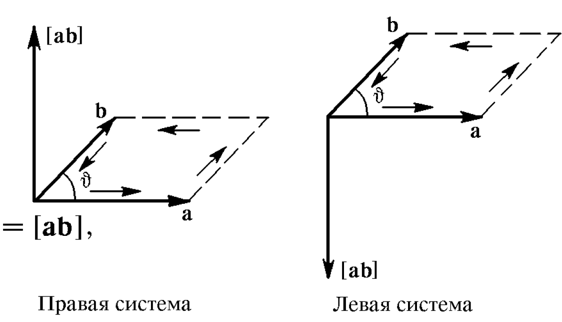
Можно было бы обойтись и без введения аксиальных векторов. Но тогда не все формулы имели бы один и тот же вид в правых и левых координатных системах. Например, если бы в правых системах координат мы определили тройку чисел S_x, S_y, S_z формулами (7.2), а в левых — теми же формулами, но с измененными знаками, то такая тройка чисел образовывала бы полярный вектор. Аксиальные векторы для того и вводятся, чтобы все формулы имели совершенно одинаковый вид в правых и левых системах координат.

Аналогично наряду с *истинными скалярами* вводятся так называемые *псевдоскаляры. Скаляр, или инвариант*, есть число, остающееся неизменным во всех системах координат, как правых, так и левых. *Псевдоскаляр, или псевдоинвариант, остается неизменным при переходах от правых систем координат к правым же или от левых к левым же. При переходе от правой системы к левой или наоборот псевдоскаляр меняет знак, оставаясь неизменным по абсолютной величине. Произведение псевдоскаляра на полярный вектор есть вектор аксиальный. Произведение псевдоскаляра на аксиальный вектор есть вектор полярный.* Если пользоваться одними только правыми или одними только левыми системами координат (а в физике, как уже упоминалось, применяется почти исключительно правая система), то отпадает необходимость разделения векторов на полярные и аксиальные, а скаляров — на истинные скаляры и псевдоскаляры.

Операция сложения двух векторов имеет смысл только тогда, когда складываемые векторы оба полярные или оба аксиальные. Сумма $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ не имеет смысла, если один из векторов полярный, а другой — аксиальный. Сумма такого рода не преобразовывалась бы по правилу преобразования полярного или аксиального вектора, а потому она не могла бы быть ни тем, ни другим.

11. Частным случаем вектора, представляющего площадку или поверхность, является так называемое *векторное произведение* двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Оно определяется как вектор площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Чтобы ориентировать этот параллелограмм, надо обходить его периметр от начала вектора $\mathbf{a}$ к его концу, затем от конца вектора $\mathbf{a}$ параллельно вектору $\mathbf{b}$ и т. д., пока при таком обходе мы не вернемся в исходную точку (рис. 18). Короче говоря, первый вектор $\mathbf{a}$ надо проходить в прямом, а второй вектор $\mathbf{b}$ — в обратном направлениях. В согласии с изложенным выше векторное произведение можно изобразить стрелкой, направленной

перпендикулярно к плоскости параллелограмма и находящейся в нужном винтовом соотношении с направлением обхода периметра параллелограмма.



Правая система

Левая система

Рис. 18

Длина стрелки численно равна площади параллелограмма, т. е. $ab \sin \vartheta$, где ϑ — угол между векторами **a** и **b**. Векторное произведение мы будем обозначать символом $\mathbf{c} = [\mathbf{ab}]$, т. е. будем заключать векторы **a** и **b** в квадратные скобки. Часто употребляется также косой крест: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. *Если векторы* **a** *и* **b** *— полярные, то векторное произведение их будет вектором аксиальным. Векторное произведение полярного вектора на аксиальный есть вектор полярный. Векторное произведение двух аксиальных векторов есть также аксиальный вектор.*

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что если **a** и **b** — два полярных или два аксиальных вектора, то в прямоугольных системах координат выражение $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ есть инвариант. (Это выражение называется *скалярным произведением* векторов **a** и **b** и обозначается символом (**ab**) или **ab**.)

Указание. Воспользоваться инвариантами $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$, $b_x^2 + b_y^2 + b_z^2$ и $(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2$.

2. Доказать, что скалярное произведение полярного вектора на аксиальный есть псевдоскаляр (псевдовариант).

3. Доказать, что скалярное произведение любых двух векторов **a** и **b** представляется выражением $(\mathbf{ab}) = ab \cos \vartheta$, где ϑ — угол между этими векторами.

Доказательство. Направим ось X вдоль вектора **a**. Тогда $a_y = a_z = 0$, $b_x = b \cos \vartheta$. Так как скалярное произведение $(\mathbf{ab}) \equiv a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ есть инвариант, то $(\mathbf{ab}) = a_x b_x = ab \cos \vartheta$.

4. Скалярное произведение вектора **a** на векторное произведение других векторов [**bc**] называется смешанным произведением трех векторов **a**, **b**, **c** и обозначается как (**a**[**bc**]). Показать, что оно является псевдоскаляром, если один из этих векторов или все три полярные. Если же полярных векторов два или совсем нет, то смешанное произведение будет скаляром (инвариантом). Показать, что смешанное произведение численно равно объему параллелепипеда, построенного на векторах **a**, **b**, **c**. Пользуясь этим, доказать, что

$$(\mathbf{a}[\mathbf{bc}]) = (\mathbf{b}[\mathbf{ca}]) = (\mathbf{c}[\mathbf{ab}]) = -(\mathbf{a}[\mathbf{cb}]) = -(\mathbf{b}[\mathbf{ac}]) = -(\mathbf{c}[\mathbf{ba}]), \quad (7.3)$$

т. е. *смешанное произведение не меняется при любой циклической перестановке перемножаемых векторов*, а при нарушении цикличности меняет знак.

5. Доказать формулу

$$[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]] = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}. \tag{7.4}$$

Доказательство. Представим вектор $\mathbf{a}$ в виде $\mathbf{a} = \mathbf{a}_\parallel + \mathbf{a}_\perp$, где $\mathbf{a}_\parallel$ — составляющая вектора $\mathbf{a}$ вдоль вектора $\mathbf{d} \equiv [\mathbf{bc}]$, а $\mathbf{a}_\perp$ — составляющая, перпендикулярная к $\mathbf{d}$. Тогда

$$[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]] \equiv [\mathbf{ad}] = [\mathbf{a}_\perp\mathbf{d}].$$

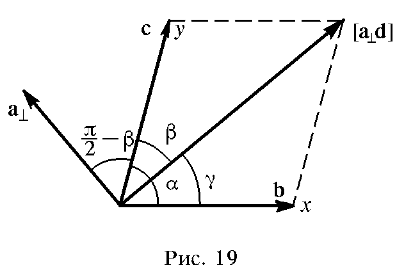


Рис. 19

Три вектора $\mathbf{a}_\perp$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ лежат в одной плоскости. Примем ее за плоскость рисунка (рис. 19). Вектор $\mathbf{d}$ перпендикулярен к этой плоскости, его длина равна $bc \sin\alpha$, если α — угол между векторами $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Поэтому длина вектора $[\mathbf{a}_\perp\mathbf{d}]$ будет $a_\perp bc \sin\alpha$. Поскольку этот вектор лежит в плоскости рисунка, его можно разложить по векторам $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, т. е. представить в виде

$$[\mathbf{a}_\perp\mathbf{d}] = x\mathbf{b} + y\mathbf{c}.$$

Неизвестные числа x и y найдутся с помощью теоремы синусов:

$$\frac{xb}{a_\perp bc \sin\alpha} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \quad \frac{yc}{a_\perp bc \sin\alpha} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Отсюда

$$x = a_\perp c \sin\beta = a_\perp c \cos(\mathbf{a}_\perp, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}_\perp\mathbf{c}) = (\mathbf{ac}),$$

$$y = a_\perp b \sin\gamma = -a_\perp b \cos(\mathbf{a}_\perp, \mathbf{b}) = -(\mathbf{a}_\perp\mathbf{b}) = -(\mathbf{ab}).$$

6. Доказать формулу

$$([\mathbf{ab}]\,[\mathbf{cd}]) = (\mathbf{ac})\,(\mathbf{bd}) - (\mathbf{ad})\,(\mathbf{bc}).$$

7. Показать, что векторное произведение $[\mathbf{ab}]$ можно записать в виде символического определителя

$$[\mathbf{ab}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \tag{7.5}$$

если условиться разлагать его по элементам первой строки, состоящей из единичных векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ вдоль координатных осей прямоугольной системы координат. Запись справедлива и в правых, и в левых системах координат. Компоненты векторного произведения определяются одними и теми же формулами, независимо от того, какие (прямоугольные) системы координат используются. С этим и связано то обстоятельство, что векторное произведение — аксиальный вектор.

8. Доказать, что в прямоугольной системе координат

$$(\mathbf{A}[\mathbf{BC}]) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \tag{7.6}$$

9. Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — произвольные векторы, не лежащие в одной плоскости. Векторы

$$\mathbf{e}_1^* = \frac{[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]}{(\mathbf{e}_1[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3])}, \quad \mathbf{e}_2^* = \frac{[\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1]}{(\mathbf{e}_1[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3])}, \quad \mathbf{e}_3^* = \frac{[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]}{(\mathbf{e}_1[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3])} \tag{7.7}$$

называются по отношению к ним *взаимными*. Очевидно, что они также лежат в одной плоскости. Показать, что

$$\mathbf{e}_1 = \frac{[\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3^*]}{(\mathbf{e}_1^*[\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3^*])}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{[\mathbf{e}_3^*\mathbf{e}_1^*]}{(\mathbf{e}_1^*[\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3^*])}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{[\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*]}{(\mathbf{e}_1^*[\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3^*])}. \tag{7.8}$$

Показать, далее, что

$$(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k^*) = \delta_{ik}, \tag{7.9}$$

где δ_{ik} — символ Кронекера, т. е. $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$ и $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$.

Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — произвольные векторы. Представим их в виде

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{B} = B_1^*\mathbf{e}_1^* + B_2^*\mathbf{e}_2^* + B_3^*\mathbf{e}_3^*.$$

Показать, что

$$(\mathbf{AB}) = A_1B_1^* + A_2B_2^* + A_3B_3^*. \tag{7.10}$$

§ 8. СТЕПЕНИ СВОБОДЫ И ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ

1. Положение точки в пространстве можно задать тремя прямоугольными координатами x, y, z. Но это можно сделать и иначе. Например, вместо прямоугольных можно взять *полярные* или какие-либо другие координаты. Существенно, однако, что при любом выборе число независимых координат, требующихся для однозначного определения положения точки, которая может перемещаться в пространстве как угодно, равно *трем*. Про такую точку говорят, что она обладает *тремя степенями свободы.*

Может случиться, что перемещение точки в заданных условиях не может быть каким угодно. Рассмотрим, например, маленький шарик, привязанный к концу нерастяжимой нити, другой коней которой закреплен (математический маятник). Если нить натянута, то шарик может перемещаться только по поверхности сферы с центром в точке закрепления. Можно привести много других примеров, в которых материальная точка все время вынуждена находиться на какой-либо заданной поверхности. В подобных случаях говорят, что на ее движение *наложены связи.* Координаты x, y, z такой точки должны удовлетворять соотношению вида $f(x, y, z) = 0$, которое является уравнением рассматриваемой поверхности. Ввиду этого независимыми остаются только две координаты, например x и y. Третья координата z может быть вычислена из уравнения связей $f(x, y, z) = 0$. В этих случаях говорят, что такая точка обладает *двумя степенями свободы.*

Если точка может перемещаться только вдоль какой-либо заданной кривой, то число независимых координат, требующихся для определения ее положения, снижается до одного. За координату можно принять, например, расстояние материальной точки от какой-либо точки рассматриваемой кривой, отсчитанное вдоль этой кривой. В таких случаях говорят, что точка обладает одной *степенью свободы*.

2. Все сказанное без труда обобщается на случай механической системы, состоящей из произвольного числа n материальных точек. Если эти точки могут перемещаться без всяких ограничений, то для определения мгновенного положения их надо задать $3n$ координат (по три координаты для каждой точки). В этом случае говорят, что система обладает $3n$ *степенями свободы*. В некоторых задачах, однако, свобода перемещения материальных точек ограничена. На $3n$ координат налагаются дополнительные условия, называемые *связями*. Для однозначного определения положения всех материальных точек системы достаточно знать меньшее число координат. Обозначим его через f. Остальные $3n - f$ координат могут быть вычислены из уравнений связи. Не обязательно в качестве независимых координат брать прямоугольные координаты. Для этой цели могут быть использованы любые f величины $q_1, q_2, \ldots, q_f$, заданием которых положение материальных точек системы определяется однозначно. Такие величины называются *обобщенными координатами*. Движение системы определится полностью, если обобщенные координаты будут найдены как функции времени. Производные обобщенных координат по времени $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ называются *обобщенными скоростями*. Так, при вращении материальной точки по окружности ее положение можно задать значением центрального угла φ, который радиус-вектор вращающейся точки образует с положением его в некоторый момент времени (например, в момент $t = 0$). Обобщенная скорость в этом случае $\omega = \dot{\varphi}$ имеет смысл угловой скорости вращающейся точки.

Обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_f$ могут быть выбраны как угодно, лишь бы они в любой момент времени полностью определяли положение механической системы. Однако число независимых обобщенных координат f во всех случаях будет одно и то же. Оно называется *числом степеней свободы системы*.

3. Определим, например, число степеней свободы *идеально твердого тела. Идеально твердым телом* в механике называют идеализированную систему материальных точек, все расстояния между которыми при движении системы не изменяются с течением времени. Докажем, что *идеально твердое тело, если на его движение не наложены никакие ограничения, обладает шестью степенями свободы*. Действительно, чтобы однозначно определить положение твердого тела, достаточно задать положение каких-либо трех его точек A, B, C, не лежащих на одной прямой (рис. 20). Для доказательства возьмем произвольную четвертую точку тела D. Расстояния AD, BD и CD для

рассматриваемого твердого тела могут считаться известными, так как при любых движениях эти расстояния не изменяются. Кроме того, следует учесть, что при любых движениях твердого тела точка D все время должна находиться по одну и ту же сторону плоскости треугольника ABC, никогда не пересекая ее. Чтобы определить положение в пространстве точки D, построим по заданным длинам AC, AD, CD треугольник ADC. Его основание AC в пространстве фиксировано. Чтобы найти положение вершины D, будем вращать треугольник ADC вокруг основания AC, пока вершина D не окажется на заданном расстоянии от третьей точки B. Этому условию удовлетворяют две точки D и D'. Но вторая из них не удовлетворяет условиям задачи, так как она находится не с той стороны от плоскости треугольника ABC. Таким образом, зная положение трех точек A, B, C, можно геометрическим построением найти положение любой другой точки твердого тела.

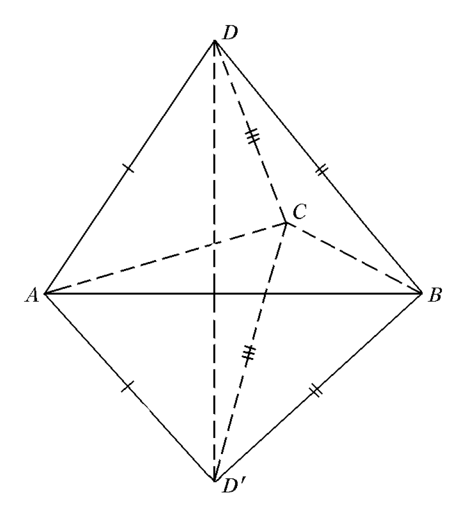


Рис. 20

Положение трех точек A, B, C можно задать их прямоугольными координатами x_A, y_A, z_A; x_B, y_B, z_B; x_C, y_C, z_C. Эти девять координат, однако, не независимы, а связаны тремя соотношениями

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = AB^2 = \text{const},$$

$$(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_{C)}^2 + (z_B - z_C)^2 = BC^2 = \text{const},$$

$$(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 = CA^2 = \text{const},$$

поскольку длины AB, BC и CA не изменяются. Независимых координат остается только шесть — твердое тело имеет шесть степеней свободы.

При ограничении свободы движения число степеней свободы твердого тела уменьшается. Так, *твердое тело, одна из точек которого неподвижно закреплена, может только вращаться вокруг этой неподвижной точки и имеет три степени свободы. Твердое тело, которое может только вращаться вокруг закрепленной оси, имеет одну степень свободы. Если же твердое тело может скользить вдоль закрепленной оси и одновременно вращаться вокруг нее, то число степеней свободы становится равным двум и т. д.*

ГЛАВА II

ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

В этой главе излагаются основные законы *динамики* — той части классической механики, которая занимается изучением движения тел в связи с действующими на них силами. Сила, действующая на тело, является мерой взаимодействия его с окружающими материальными объектами (другими телами, полями). Более полное определение приводится несколько ниже.

Законы динамики были установлены Ньютоном и носят его имя. Как и другие принципы, лежащие в основе физики, они являются *обобщением опытных фактов*. На них следует смотреть не как на изолированные независимые утверждения, а как на *систему взаимосвязанных законов*. Опытной проверке подвергается не каждый закон в отдельности, а вся система в целом.

Ввиду исключительной роли, которую играют законы Ньютона в механике, приведем их в том виде, в каком они были сформулированы самим Ньютоном (перевод акад. А. Н. Крылова (1863–1945)). Формулировке основных законов Ньютон предпосылает восемь определений, из которых для нас здесь важны первые четыре.

Определение 1. *Количество материи (масса) есть мера таковой, устанавливаемая пропорционально плотности и объему ее.*

Определение 2. *Количество движения есть мера такового, устанавливаемая пропорционально скорости и массе.*

Определение 3. *Врожденная сила материи есть присущая ей способность сопротивления, по которой всякое отдельно взятое тело, поскольку оно предоставлено самому себе, удерживает свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.*

Определение 4. *Приложенная сила есть действие, производимое над телом, чтобы изменить его состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.*

Закон 1. *Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.*

Закон 2. *Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.*

Закон 3. *Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе — воздействие двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны.*

Понятие массы у Ньютона отличается неясностью, поскольку им не было дано определения плотности. Кроме того, представление массы как произведения объема тела на плотность содержащегося в нем вещества возможно только для макроскопических тел, но не для элементарных и атомных частиц. Поэтому ньютоново определение массы не удержалось в науке и было заменено другими определениями.

Аристотель (384—322 до н. э.) и его последователи рассматривали силу как причину движения. Они считали, что с прекращением действия силы прекращается и движение тела. Сила необходима для поддержания движения. Установление первого закона Ньютона означало, что такое представление о силе является неправильным, так как для поддержания (равномерного) движения никаких «сил» не требуется. Силу стали рассматривать как *причину изменения количества движения тела.* А так как это изменение вызывается другими телами, то можно дать следующее определение силы. *Сила есть мера интенсивности взаимодействия тел, проявляющаяся в изменении их количества движения.*

Ниже мы подробно разберем содержание законов Ньютона и связанных с ними понятий, хотя и не будем следовать той системе изложения, которая была принята самим Ньютоном.

§ 9. ЗАКОН ИНЕРЦИИ. ИНЕРЦИАЛЬНАЯ СИСТЕМА ОТСЧЕТА

1. *В качестве первого закона движения* Ньютон принял *закон инерции*, высказанный в частной форме еще Галилеем. Согласно этому закону *тело* (*материальная точка*), *не подверженное внешним воздействиям*, *либо находится в покое*, *либо движется прямолинейно и равномерно.* Такое тело называется *свободным*, а его движение — *свободным движением* или *движением по инерции.*

Свободных тел, грубо говоря, не существует. Они являются физическими абстракциями. Однако можно поставить тело в такие условия, когда внешние воздействия на него по возможности устранены или практически компенсируют друг друга. Представив себе, что эти воздействия беспредельно уменьшаются, мы и приходим в пределе к представлению о свободном теле и свободном движении.

Здесь, однако, возникает следующая трудность. Как убедиться в том, что тело не подвержено внешним воздействиям? Об этом нельзя судить по отсутствию ускорений. Нужны какие-то другие независимые способы. Иначе закон инерции потерял бы всякое содержание. Вполне удовлетворительного ответа на этот вопрос не существует. В отсутствие внешних воздействий мы убеждаемся по отсутствию растягивающих пружин или веревок, которые тянут тело, по отсутствию тел, которые давят на него, т. д. Но тело может испытывать воздействия не только со стороны тел, с которыми оно

соприкасается. Оно может подвергаться воздействиям также со стороны различного рода *силовых полей*, возбуждаемых другими телами. Поэтому вопрос сводится к тому, как убедиться в том, что воздействиям со стороны силовых полей тело не подвергается.

Все силы, встречающиеся в природе, известные в настоящее время, сводятся к *силам гравитационного притяжения*, *электромагнитным силам, сильным и слабым взаимодействиям*. Сильные и слабые взаимодействия проявляются в атомных ядрах и в мире элементарных частиц. Они действуют на малых расстояниях: сильные — на расстояниях порядка 10^{-13} см, слабые — на расстояниях порядка 10^{-16} см. В макромире, который только и изучает классическая механика, от сильных и слабых взаимодействий можно отвлечься.

Электромагнитные и гравитационные силы, напротив, являются силами *дальнодействующими*. С расстоянием они убывают медленно. Если это статические силы, то они убывают обратно пропорционально квадрату расстояния. Если же они переменные (электромагнитные волны), то убывание происходит еще медленнее — обратно пропорционально расстоянию. Только благодаря электромагнитным волнам (свет, радиоизлучение, рентгеновское излучение), исходящим от планет, звезд, пульсаров, галактик и пр., мы и знаем о существовании этих небесных объектов. Поэтому нет оснований утверждать, что удаленные источники не возбуждают заметных электромагнитных и гравитационных полей в рассматриваемой нами области пространства. Однако в отсутствие электромагнитных полей всегда можно убедиться, так как они действуют *по-разному* на положительные и отрицательные заряды, из которых состоят тела. Под действием таких полей возникло бы некоторое разделение положительных и отрицательных зарядов, которое можно было бы обнаружить на опыте. Заряженный шарик, помещенный в одну и ту же точку пространства, двигался бы по-разному в зависимости от того, заряжен он положительно или отрицательно. Все имеющиеся факты не противоречат утверждению, что удаленные тела Вселенной не возбуждают сколько-нибудь заметных статических электромагнитных полей в малых областях пространства (порядка размеров Солнечной системы или Галактики).

О гравитационных полях этого нельзя сказать с той же уверенностью. Но если бы такие поля и существовали, то с ними можно было бы не считаться. Дело в том, что всем телам, независимо от их состава, одно и то же гравитационное поле сообщает в точности одинаковое ускорение. Статическое гравитационное поле удаленных тел Вселенной в малых областях пространства можно считать практически однородным. Можно ввести систему отсчета, свободно падающую в таком однородном гравитационном поле. На явлениях, происходящих в такой системе отсчета, наличие этого однородного гравитационного поля никак не сказывается. Здесь все происходит в точности так же, как в кабине космического корабля, свободно дви-

жущегося в космическом пространстве. В такой кабине космонавты не чувствуют наличия поля тяготения (невесомость). Переменные же гравитационные поля (гравитационные волны) слишком слабы. Попытки их экспериментального обнаружения стали предприниматься лишь в последнее время. Однако из-за малости ожидаемых эффектов гравитационные волны еще не обнаружены экспериментально. Ограничимся здесь этими замечаниями, откладывая более подробный разбор вопроса до гл. IX.

2. В кинематике выбор системы отсчета не был существенным. Все системы отсчета *кинематически эквивалентны*. Не так обстоит дело в динамике. Уже закон инерции с особой остротой ставит вопрос о выборе системы отсчета. Одно и то же движение выглядит *по-разному* в разных системах отсчета. Если в какой-либо системе отсчета тело движется прямолинейно и равномерно, то в системе отсчета, движущейся относительно первой ускоренно, этого уже не будет. Отсюда следует, что закон инерции не может быть справедлив во всех системах отсчета. Без указания системы отсчета он просто теряет смысл. Классическая механика постулирует, что *существует система отсчета, в которой все свободные тела движутся прямолинейно и равномерно*. Такая система называется *инерциальной системой отсчета*. Содержание закона инерции, в сущности, сводится к утверждению, что существует по крайней мере одна инерциальная система отсчета.

Это утверждение является обобщением громадной совокупности опытных фактов. Точно так же, только опытным путем, можно установить, какие системы отсчета являются инерциальными, а какие — не инерциальными. Допустим, например, что речь идет о движении звезд и других астрономических объектов в доступной нашему наблюдению части Вселенной. Тогда можно утверждать, что система отсчета, в которой Земля принимается неподвижной (такую систему мы будем называть *земной*), не будет инерциальной. Действительно, в такой системе звезды совершают суточные вращения на небесном своде. Так как расстояния до звезд очень велики, то при этом развиваются очень большие центростремительные ускорения, направленные к Земле. Между тем каждая звезда, ввиду ее громадной удаленности от других небесных тел, практически является свободной. Свободное движение звезды в земной системе отсчета совершается по кругу, а не по прямой линии. Оно не подчиняется закону инерции, а потому земная система отсчета не будет инерциальной. Надо испытать на инерциальность другие системы отсчета. Попробуем взять *гелиоцентрическую систему отсчета*, иначе называемую *системой Коперника* (по имени польского астронома Николая Коперника (1473—1543)). Это есть координатная система, начало которой помещено в центре Солнца (точнее, в центре масс Солнечной системы), а координатные оси являются прямыми, направленными на три удаленные звезды и не лежащими в одной плоскости. Материальными объектами, с помощью которых реализуют-

ся эти оси, являются световые лучи, приходящие от звезд в Солнечную систему. Благодаря относительному движению звезд углы между координатными осями в системе Коперника не остаются постоянными, а медленно изменяются с течением времени. Однако ввиду колоссальности расстояний до звезд изменения направлений координатных осей происходят настолько медленно, что, как правило, их можно не принимать во внимание. Система Коперника практически является инерциальной системой, по крайней мере при изучении движений, происходящих в масштабе нашей планетной системы, а также всякой другой системы, размеры которой малы по сравнению с расстоянием до тех трех звезд, которые в системе Коперника выбраны в качестве опорных. Это доказывается опытами, большинство из которых являются косвенными. Некоторые прямые опыты (маятник Фуко и пр.) будут рассмотрены в гл. IX. Эти же опыты доказывают неинерциальность земной системы отсчета.

3. Неинерциальность земной системы отсчета объясняется тем, что Земля вращается вокруг собственной оси и вокруг Солнца, т. е. *движется ускоренно относительно системы Коперника.* Впрочем, оба эти вращения происходят медленно*). Поэтому *по отношению к громадному кругу явлений земная система отсчета ведет себя практически как инерциальная система.* Обычные, сравнительно грубые наблюдения и опыты над движением тел не позволяют обнаружить отступления от инерциальности земной системы отсчета. Для этого требуются более точные и тонкие опыты. Вот почему при установлении основных законов динамики можно начать с изучения движения тел относительно Земли, отвлекаясь от ее вращения, т. е. принять Землю за *приблизительно инерциальную систему отсчета.*

4. Если три звезды, используемые в системе Коперника для фиксирования направлений координатных осей, принадлежат нашей Галактике, то, разумеется, такая система может играть роль инерциальной или, точнее, приблизительно инерциальной системы отсчета только тогда, когда речь идет о движении объектов, малых по сравнению с размерами Галактики, например, о движении Солнечной системы или ее частей. Но при рассмотрении движений всей Галактики или нескольких галактик это будет уже не так. Тогда для построения (приблизительно) инерциальной системы отсчета можно использовать какие-либо другие четыре астрономических объекта, расстояния между которыми весьма велики по сравнению с размерами области пространства, внутри которой совершается движение рассматриваемых тел. Центр одного из этих астрономических объектов можно принять за начало координат, а остальные три объекта использовались для фиксирования направлений координатных осей.

При изучении движения тел мы будем сначала предполагать, что движение отнесено к инерциальной системе отсчета. После этого в

*) В каком смысле следует понимать медленность вращения выяснится в гл. IX.

гл. IX мы изучим, как изменится форма законов движения, когда оно рассматривается относительно неинерциальных систем отсчета.

§ 10. МАССА. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

1. Всякое тело оказывает сопротивление при попытках привести его в движение или изменить модуль или направление его скорости. Это свойство тел называется *инертностью*. У разных тел оно проявляется в разной степени. Так, сообщить одно и то же ускорение большому камню значительно труднее, чем маленькому мячику. *Мера инертности называется массой.*

Для точного количественного определения массы введем понятие *изолированной* или *замкнутой системы*. Так называют систему тел, настолько удаленных от всех остальных тел, что они практически не оказывают никакого действия на рассматриваемую систему. Тела системы могут взаимодействовать только между собой. Рассмотрим теперь изолированную систему, состоящую из двух материальных точек. Скорости точек должны быть малы по сравнению со скоростью света. В результате взаимодействия материальных точек их скорости меняются. Пусть $\mathbf{v}_1$ — скорость точки *1*, $\mathbf{v}_2$ — скорость точки *2*, а $\Delta\mathbf{v}_1$ и $\Delta\mathbf{v}_2$ — приращения этих скоростей за один и тот же промежуток времени Δt. Векторы $\Delta\mathbf{v}_1$ и $\Delta\mathbf{v}_2$ имеют противоположные направления и связаны между собой соотношением

$$m_1\Delta\mathbf{v}_1 = -m_2\Delta\mathbf{v}_2, \tag{10.1}$$

где коэффициенты m_1 и m_2 постоянны и имеют одинаковые знаки. Они совершенно не зависят от характера взаимодействия между материальными точками *1* и *2*. Например, взаимодействие может происходить путем столкновения материальных точек между собой. Его можно осуществить, сообщив материальным точкам электрические заряды или поместив между ними маленькую пружинку и т. д. Продолжительность времени Δt можно менять произвольным образом. Векторы $\Delta\mathbf{v}_1$ и $\Delta\mathbf{v}_2$ при этом будут меняться. Однако коэффициенты m_1 и m_2, точнее, их отношение, останутся одними и теми же. Эти результаты надо рассматривать как *опытные факты*, подтвержденные бесчисленным множеством примеров. Коэффициенты m_1 и m_2 могут зависеть только от *самих материальных точек системы*. Они называются *массами* или, точнее, *инертными массами* материальных точек *1* и *2*.

Таким образом, по определению *отношение масс двух материальных точек равно взятому с противоположным знаком отношению приращений скоростей этих точек в результате взаимодействия между ними.* При этом предполагается, что рассматриваемые

точки образуют изолированную систему и движутся с нерелятивистскими скоростями.

2. Чтобы от отношения масс перейти к самим массам, надо условиться массу какого-либо определенного тела считать равной единице. Такое тело называется *эталоном массы.* Тогда массы всех остальных тел определятся однозначно. В частности, все они окажутся *положительными*, так как знаки всех масс одинаковы, а масса эталонного тела положительна. В физике в качестве основной единицы массы принят *килограмм.* Килограмм есть масса эталонной гири из сплава иридия с платиной, хранящейся в Севре (Франция) в Международном бюро мер и весов. Приближенно килограмм равен массе кубического дециметра чистой воды при температуре 4 °С. Тысячная доля килограмма называется *граммом.* В отличие от длины и времени, для которых установлены *естественные единицы*, единица массы определена, таким образом, как масса некоторого случайно выбранного тела. И для массы было бы лучше установить естественную единицу. Можно было бы основным эталоном массы считать массу какой-либо элементарной частицы, например протона.

Отметим еще одно существенное обстоятельство, являющееся также результатом опыта. Отношение m_2/m_1 можно найти не только путем непосредственного сравнения масс рассматриваемых тел, но и следующим косвенным способом. Сначала измеряются отношения масс обоих тел к массе третьего тела, а затем эти отношения делятся одно на другое. Результат не зависит от массы третьего тела и совпадает с отношением m_2/m_1, полученным непосредственным сравнением масс m_1 и m_2.

Если соотношение (10.1) поделить на время взаимодействия Δt, то получится

$$m_1\mathbf{a}_{1\text{ср}} = -m_2\mathbf{a}_{2\text{ср}}, \qquad (10.2)$$

а после перехода к пределу

$$m_1\mathbf{a}_1 = -m_2\mathbf{a}_2. \qquad (10.3)$$

Этими соотношениями нахождение отношения масс двух тел сводится к сравнению *средних* или *истинных ускорений*, развивающихся во время их взаимодействия.

3. Придадим соотношению (10.1) другую форму. Пусть $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — скорости тел до взаимодействия, $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_2'$ — после взаимодействия. Тогда $\Delta\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_1$, $\Delta\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_2$. Подставляя эти выражения в (10.1), получим

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2'. \qquad (10.4)$$

Назовем *импульсом* или *количеством движения материальной точки* вектор, равный произведению массы точки на ее скорость:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \qquad (10.5)$$

Импульсом или *количеством движения системы материальных точек* назовем векторную сумму импульсов отдельных материальных точек, из которых эта система состоит. Для системы из двух материальных точек $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$. Равенству (10.4) можно придать вид

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}', \tag{10.6}$$

где $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}' = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2'$ — импульсы системы до и после взаимодействия. Таким образом, *импульс изолированной системы двух материальных точек сохраняется, т. е. остается постоянным во времени, каково бы ни было взаимодействие между ними.* Это положение называется *законом сохранения импульса.* Оно является результатом опыта и введенного выше определения массы. То обстоятельство, что для величины $m\mathbf{v}$ имеет место «закон сохранения», и делает целесообразным дать этой величине специальное название и ввести для нее особое обозначение. Таким свойством не обладает, например, величина $m^2\mathbf{v}$, а потому она не играет никакой роли в механике. В дальнейшем закон сохранения импульса будет распространен на изолированные системы, состоящие из какого угодно числа материальных точек.

4. Закон сохранения импульса в приведенной выше форме есть закон нерелятивистской механики. Он справедлив только для медленных движений. В релятивистской механике этот закон обобщается на случай быстрых движений. Это обобщение будет подробно рассмотрено при изложении теории относительности. Сейчас же ограничимся предварительным сообщением основного результата. В релятивистской механике импульс частицы также определяется выражением (10.5), однако масса m зависит от скорости согласно формуле

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{10.7}$$

Здесь m_0 — постоянная для данной частицы величина, называемая ее *массой покоя.* Она совпадает с массой, рассматриваемой в нерелятивистской механике. Величина m, определяемая выражением (10.7), называется *массой движения* или *релятивистской массой.* Таким образом, в релятивистской механике закон сохранения импульса изолированной системы, состоящей их двух взаимодействующих частиц с массами покоя m_{01} и m_{02}, математически формулируется следующим образом:

$$\frac{m_{01}v_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} + \frac{m_{02}v_2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} = \frac{m_{01}v_1'}{\sqrt{1 - v_1'^2/c^2}} + \frac{m_{02}v_2'}{\sqrt{1 - v_2'^2/c^2}}. \tag{10.8}$$

Следует, однако, сделать оговорку, что эта формула относится к тому случаю, когда весь импульс сосредоточен только в *движущихся частицах.* Это было бы так, если бы частицы не взаимодействовали,

а также в случае, когда взаимодействие между ними распространялось бы мгновенно. Но теория относительности отвергает мгновенные взаимодействия. Все взаимодействия осуществляются *полями* и распространяются с конечными скоростями, не превышающими скорость света в вакууме c. Поля же — это материальные объекты, обладающие импульсом и энергией. Поэтому в общем случае формулу (10.8) следует обобщить, включив в нее импульсы полей. Только в частном случае, когда изменениями импульсов полей можно пренебречь, можно пользоваться законом сохранения импульса в приближенной форме (10.8).

Для медленных движений, когда $v^2/c^2 \ll 1$, зависимостью массы от скорости можно пренебречь, полагая $m = m_0$. Тогда релятивистская механика переходит в нерелятивистскую как в свой предельный приближенный случай. Чтобы составить представление о погрешности, которая возникает при таком пренебрежении, рассмотрим космический корабль, движущийся со скоростью $v = 8$ км/с. В этом случае $(v/c)^2 = (8/300\,000)^2 \approx 7 \cdot 10^{-10}$. Если масса космического корабля $m = 5$ т $= 5 \cdot 10^6$ г, то релятивистская масса m будет превышать массу покоя всего на $m - m_0 = 3{,}5 \cdot 10^{-3}$ г. При всех расчетах движения космического корабля такой поправкой не только можно, но и нужно пренебречь, хотя бы потому, что входные данные, необходимые для расчетов, не могут быть измерены с такой высокой точностью.

§ 11. ВТОРОЙ ЗАКОН НЬЮТОНА. СИЛА

1. Общие законы движения Ньютон сформулировал с использованием понятия *силы*. Представление о силе возникает в связи с ощущением мускульного усилия, которое у нас возникает при поднятии тяжелых тел или при приведении их в движение. Но всякое ощущение слишком неопределенно и субъективно. Оно может дать только интуитивное представление о силе, но не может служить основанием для точного определения этой величины, равно как и для всякого другого научного понятия. *Под силой в механике понимают всякую причину, изменяющую импульс движущегося тела.* Это определение также недостаточно, так как оно чисто качественное. Количественное определение можно дать на основе следующего факта, являющегося обобщением опытных фактов.

В инерциальной системе отсчета производная импульса $\mathbf{p}$ материальной точки по времени представляется уравнением

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \equiv \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}, \tag{11.1}$$

или для медленных движений (когда массу m можно считать не зависящей от скорости $\mathbf{v}$)

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}, \tag{11.2}$$

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}. \tag{11.3}$$

Здесь $\mathbf{F}$ однозначно определяется свойствами рассматриваемой материальной точки и окружающих ее тел, а также положениями и скоростями этих тел относительно материальной точки. Величина $\mathbf{F}$ называется силой, действующей на рассматриваемую материальную точку. В частных случаях сила $\mathbf{F}$ может определяться одним только положением материальной точки или только одной ее скоростью, но по самому смыслу в механике Ньютона она не может явно зависеть от ускорения этой точки. Очевидно, *сила* $\mathbf{F}$ *есть вектор*, поскольку она равна производной вектора $\mathbf{p}$ по времени. Отсюда следует, что сложение сил подчиняется правилу параллелограмма.

Таким образом, в *инерциальной системе отсчета производная импульса материальной точки по времени равна действующей на нее силе.* Это утверждение называется *вторым законом Ньютона*, а соответствующие ему уравнения — *уравнениями движения материальной точки.* В случае системы материальных точек уравнения движения должны быть написаны для каждой из них и учтено их взаимодействие между собой. Следует, однако, иметь в виду, что второй закон Ньютона только тогда имеет смысл закона, а не определения понятия силы, когда в нем сила $\mathbf{F}$ определена не по сообщаемому ей действию (т. е. не по ускорению или изменению импульса тела), а другим *независимым способом* (именно, по расположению и движению окружающих тел).

Конечно, если движение тела (материальной точки) известно, т. е. известны ее координаты как функции времени t, то простым дифференцированием по t можно определить величину действующей силы как функцию того же времени. Однако природа силы может считаться установленной только тогда, когда будет выяснено, как эта сила зависит от состояния (положения и скоростей) окружающих тел.

2. Приведем простейший пример, ограничиваясь ради простоты одномерным движением материальной точки.

Подвесим тело на спиральной пружине (рис. 21). Когда система успокоится, немного оттянем тело вниз из положения равновесия, а затем отпустим. Возникнут колебания вверх и вниз. При подходящих параметрах системы они будут затухать слабо. Тело успеет совершить несколько десятков колебаний, прежде чем колебания заметно затухнут. Мгновенное положение тела можно характеризовать одной координатой x — смещением тела из положения равновесия. Для определения функции $x = x(t)$ можно через малые промежутки вре-

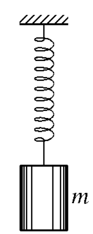


Рис. 21

мени фотографировать тело на кинопленку, а затем обработать фотографию и построить график $x = x(t)$. Можно поступить и как-нибудь иначе. Для слабо затухающих колебаний график почти не отличается от синусоиды (рис. 22) и представляется уравнением

$$x = A\cos\frac{2\pi t}{T}, \tag{11.4}$$

где A и T — постоянные, называемые *амплитудой* и *периодом колебаний*. Дважды дифференцируя это выражение, находим скорость и ускорение:

$$\dot{x} = -\frac{2\pi A}{T}\sin\frac{2\pi t}{T}, \quad \ddot{x} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A\cos\frac{2\pi t}{T}.$$

Сравнивая, последнее выражение с (11.4), получаем

$$\ddot{x} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x,$$

или после умножения на массу тела

$$m\ddot{x} = -kx, \tag{11.5}$$

где введено обозначение

$$k = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 m. \tag{11.6}$$

Сравнивая (11.5) с (11.3), находим силу

$$F = -kx. \tag{11.7}$$

Мы видим, что величина F зависит только от удлинения пружины x — единственного переменного параметра, определяющего положения внешних тел, оказывающих действие на рассматриваемое тело. Если к пружине подвесить тело другой массы, то изменится и период колебаний T. Однако опыт показывает, что отношение m/T^2, а с ним и коэффициент k остаются без изменения. Значит, сила F определяется только растяжением пружины и совершенно не зависит от того, каким телом это растяжение вызвано. Эти опытные факты могут служить подтверждением второго закона Ньютона. Следовательно, можно ожидать, что если, кроме пружины, на тело больше ничто не действует, то его ускорение всегда будет равно kx/m и направлено вдоль оси пружины в сторону, противоположную ее удлинению x. Оно совершенно не зависит от того, как движется тело: прямолинейно, по кругу или как-нибудь иначе. Это предположение также подтверждается опытами.

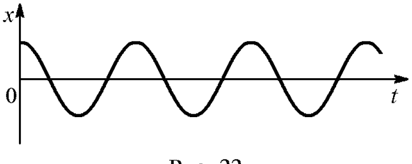


Рис. 22

Одновременно мы видим, что *сила натяжения пружины* F *пропорциональна ее удлинению* x. Как показали более точные исследования, этот результат является приближенным. Им можно пользоваться, когда удлинение пружины не очень велико. Он называется *законом Гука* (по имени английского физика Роберта Гука (1635—1703)). Величина k называется жесткостью пружины (коэффициентом жесткости). Для конкретной пружины жесткость постоянна, но может меняться от пружины к пружине.

Необходимо сделать два замечания относительно приведенного примера. Во-первых, силу F можно было бы найти исключением времени из двух уравнений (11.4). Таким путем величина F была бы выражена как функция координаты x и скорости $\dot{x}$. Уравнение (11.2), конечно, было бы удовлетворено, но так найденное выражение для F содержало бы в качестве параметра также амплитуду A, и чтобы уравнение (11.2) удовлетворялось, амплитуда A должна иметь уже определенное значение. При той же пружине и массе m, но другой амплитуде A уравнение (11.2) не удовлетворялось бы. Это значит, что при заданных k и m и найденном значении F уравнение (11.2) описывало бы только *вполне определенный частный вид движения*. Между тем требуется получить такое выражение для F, которое *не содержало бы параметра* A. Тогда уравнение (11.2) будет описывать *все движения, возможные при заданных* k *и* m (т. е. движения с произвольной амплитудой A).

Во-вторых, каждой силе F соответствует определенное удлинение пружины. Получается проградуированная пружина, которую можно использовать для измерения сил в различных случаях. Описанный способ градуировки, основанный на втором законе Ньютона, принципиально возможен, но практически для градуировки пружины к ней подвешивают грузы различного веса и измеряют соответствующие удлинения. Нет необходимости описывать, как этим способом градуируются различные *динамометры* и как ими пользуются. Важно подчеркнуть, что при наличии динамометра можно независимо измерить силу и ускорение и проверить справедливость второго закона Ньютона.

Опыт показывает, что колебания тела, подвешенного на пружине, постепенно затухают и в конце концов прекращаются. Отсюда следует, что уравнение движения (11.5) является приближенным. Оказывается, что тело, движущееся в газообразной или жидкой среде, встречает сопротивление, зависящее от скорости тела. Если скорость тела (относительно окружающей среды) не очень велика, то эта сила приблизительно пропорциональна первой степени скорости. Так, в случае шара на пружине затухание его колебаний в газе довольно точно описывается уравнением

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}, \tag{11.8}$$

где b — постоянный коэффициент, зависящей от размеров шара и рода газа, в котором он колеблется. Здесь мы имеем пример силы, которая зависит не только от положения, но и от скорости шара.

3. Для решения задач на движение материальных точек и их систем нужны *дифференциальные уравнения движения*. Способ получения таких уравнений не имеет значения. В частности, их можно было бы получать и строить всю механику без введения понятия силы.

При рассмотрении различных динамических задач механика ставит и решает два вопроса: 1) по заданному движению тел вычислить силы, действующие на них; 2) по заданным силам определить движение тел. Задачи первого типа сравнительно просты. Они сводятся к вычислению ускорений материальных точек, из которых состоит система. Примером таких задач может служить разобранная нами задача о силе, действующей на колеблющееся тело, подвешенное на пружине. Задачи второго типа много сложнее и являются основными в механике. Здесь прежде всего надо написать уравнение движения для каждой материальной точки, входящей в систему. Это сводится к отысканию сил как функций координат и скоростей взаимодействующих точек. В результате получится система дифференциальных уравнений, решение которой (при определенных начальных условиях) даст полное представление о всех деталях движения. Таким образом, при решении таких задач требуется *интегрирование дифференциальных уравнений*, а это значительно сложнее дифференцирования.

Могут быть и задачи смешанного типа. Сюда относятся, например, такие задачи, когда на движение системы наложены определенные ограничения, например движущаяся точка должна находиться на какой-то линии или поверхности. Такого рода ограничения называются *связями*. Действие таких линий или поверхностей, как и всяких связей, ограничивающих свободу движения, сводится к тому, что они воздействуют на движущиеся тела с определенными силами, называемыми *реакциями связей*. Во всех подобных случаях задача сводится не только к определению движения каждой материальной точки системы, но и к нахождению реакций связей.

4. Остановимся на вопросе о соотношении между первым и вторым законами Ньютона. Если в уравнении (11.1) положить $\mathbf{F} = 0$, то получится $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$. Отсюда следует, что $\mathbf{p} = \text{const}$, т. е. импульс, а с ним и скорость свободно движущейся материальной точки постоянны. Таким образом, формально первый закон Ньютона является следствием второго. Почему же тогда он выделяется в самостоятельный закон? Дело в том, что уравнение (11.1), выражающее второй закон Ньютона, только тогда имеет смысл, когда указана система отсчета, в которой оно справедливо. Выделить же такую систему (или такие системы) отсчета позволяет первый закон. Он утверждает, что существует система отсчета, в которой свободная мате-

риальная точка движется без ускорения. В такой системе отсчета (и в этом состоит второй закон) движение всякой материальной точки подчиняется уравнению (11.1). Таким образом, по существу, первый закон нельзя рассматривать как простое логическое следствие второго. Связь между этими законами более глубокая.

5. Уравнение (11.2) предопределяет выбор единицы силы. Поскольку единицы длины, массы и времени уже установлены, это уравнение вынуждает нас за единицу силы принять такую силу, которая единице массы сообщает ускорение, равное единице. В 1960 г. XI Генеральная конференция по мерам и весам приняла так называемую *Международную систему единиц* SI (в русской транскрипции СИ). В основу этой системы положены семь *независимых* единиц: единица длины *метр* (м), единица времени *секунда* (с), единица массы *килограмм* (кг), единица разности температур *кельвин* (К), единица силы тока *ампер* (А), единица силы света *кандела* (кд) и единица количества вещества *моль* (моль). Остальные единицы являются их *производными*. Смысл термина «производная единица» легко уясняется на примере единицы силы. В системе СИ за единицу силы принимается ньютон (Н). Ньютон — эта такая сила, которая массе в 1 кг сообщает ускорение в 1м/с^2. Наряду с системой СИ в физике широко употребляется система СГС. Основными единицами в этой системе являются: *сантиметр* (см) — единица длины, *секунда* (с) — единица времени, *грамм* (г) — единица массы. Единицей силы в системе СГС является *дина* (дин). Дина есть сила, сообщающая массе в 1 г ускорение 1 см/с^2. Очевидно,

$$1\ \text{Н} = 10^5\ \text{дин}.$$

В механике обе системы одинаково удобны. Ни одна из них не обладает преимуществом по сравнению с другой, так как между ними нет разницы по существу. Обе системы в механике отличаются друг от друга только *масштабами* основных единиц — единицы длины и единицы массы. Все понятия механики имеют один и тот же смысл, а формулы пишутся совершенно одинаково в обеих системах единиц. Не так обстоит дело в учении об электрических, оптических и атомных явлениях. Для изучения таких явлений система СГС значительно лучше приспособлена, чем система СИ. Поэтому в нашем курсе отдается предпочтение системе СГС.

6. В заключение этого параграфа остановимся на вопросе о *сложении сил*. Как уже было сказано выше, *сила является вектором*. Этим мы хотим сказать только то, что при повороте координатных осей составляющие силы преобразуются как составляющие вектора. Как и для всякого вектора, для силы можно ввести операцию сложения в математическом смысле (см. § 7). По определению каждым двум силам $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ приводится в соответствие новый объект, изображающийся диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$. Этот объект, как легко доказать, является вектором. Он

называется *равнодействующей* или *результирующей* сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ или их *геометрической суммой*. Проверять на опыте результат такого сложения имеет столько же смысла, что и проверять на опыте правильность арифметического равенства $2+3=5$. Результат верен *по самому определению* сложения векторов. Однако сложение сил понимают иногда и в другом (*физическом*) смысле. И именно о нем идет речь, когда в элементарной физике впервые говорят о сложении сил. При этом самый вопрос формулируется недостаточно ясно. Говорят, что на материальную точку одновременно действуют две силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$. После этого спрашивают, какой одной силой $\mathbf{F}$ их можно заменить, чтобы получить тот же результат? Неясность заключается в том, что не указывается, в каком смысле следует понимать выражение: «На материальную точку одновременно действуют две силы». На всякую материальную точку в данных конкретных условиях действует всегда только одна сила, величина и направление которой определяется расположением этой точки относительно всех окружающих тел. Какой же смысл вкладывается в содержание поставленного вопроса? Разъясним это на двух примерах.

Допустим, что к некоторой материальной точке A прикреплена растянутая пружина, которая тянет ее с некоторой силой $\mathbf{F}_1$. Уберем эту пружину и будем тянуть ту же материальную точку A другой растянутой пружиной с силой $\mathbf{F}_2$. О направлении и модуле сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ мы судим по направлениям осей пружин и степени их растяжения. Прикрепим теперь к материальной точке A обе пружины вместе, направив и растянув их по-прежнему. Вопрос заключается в том, чтобы определить силу $\mathbf{F}$, которая вызывает такое же движение точки, что и обе силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ вместе.

В качестве второго примера рассмотрим неподвижный точечный заряд q, помещенный в некоторой точке пространства A. Пусть в точках B и C находятся другие точечные заряды, q_1 и q_2. Пусть они вместе действуют на заряд q с силой $\mathbf{F}$. Уберем второй из них и обозначим через $\mathbf{F}_1$ силу, с которой на q будет действовать заряд q_1. Аналогично определяется сила $\mathbf{F}_2$, с которой заряд q_2 действует на q в отсутствие заряда q_1. Вопрос опять заключается в том, как по силам $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ найти силу $\mathbf{F}$.

Пусть $\mathbf{F}_i$ означает силу, действующую на рассматриваемую материальную точку со стороны какого-то другого i-го тела (источника силы $\mathbf{F}_i$), когда все остальные источники сил удалены ($i=1, 2, \ldots, n$). Чему будет равна действующая сила $\mathbf{F}$, когда все n источников действуют одновременно? Это *физический вопрос*, на который нельзя дать ответ путем определения. Обычно говорят, что сила $\mathbf{F}$ равна геометрической сумме сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, …, $\mathbf{F}_n$. Однако такой ответ не является логическим следствием законов Ньютона или каких-либо других законов. Он может быть верным, но может быть и

неверным. Это может решить только опыт. Опыт показывает, например, что для растянутых пружин или электрических сил, возбуждаемых точечными зарядами, ответ верен. Если это имеет место, то говорят, что силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ... подчиняются *принципу суперпозиции.* В основе принципа суперпозиции лежит представление о *независимости действия сил.* Говорят, что силы действуют *независимо*, если каждая сила $\mathbf{F}_i$ сообщает рассматриваемому телу одно и то же ускорение $\mathbf{a}_i$, независимо от того, действует только один i-й источник сил или все n источников одновременно. Так как ускорение является вектором, то результирующее ускорение найдется векторным сложением всех $\mathbf{a}_i$. Поэтому и результирующая сила $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ также найдется векторным сложением независимо действующих сил $\mathbf{F}_i = m\mathbf{a}_i$. Следовательно, применимость правила параллелограмма для сложения сил в рассматриваемом физическом смысле эквивалентна предположению о независимости действия сил. Но когда тела, являющиеся источниками сил, влияют друг на друга и вследствие этого меняют свое состояние, то результат вычисления силы $\mathbf{F}$ по указанной схеме может оказаться неверным. Это получится, например, когда во втором примере вместо точечных зарядов q_1 и q_2 взять протяженные тела, заряженные электричеством. При сближении таких тел распределение электричества на них изменится из-за индукции, а это отразится на значении действующей силы. Но и в этом случае можно воспользоваться принципом суперпозиции, если заряды на телах в их окончательных положениях мысленно разделить на достаточно малые части. Считая такие части точечными зарядами, можно вычислить создаваемые ими электрические поля по *закону Кулона,* а затем воспользоваться принципом суперпозиции. Такое утверждение следует рассматривать как обобщение опытных фактов.

ЗАДАЧИ

1. Лифт движется с ускорением $a = \alpha g$, причем $|\alpha| < 1$. Зная вес покоящегося лифта P (вместе с нагрузкой), определить во время ускоренного движения натяжение троса T, на котором он подвешен.

Ответ. $T = P(1 - \alpha)$. Дробь α следует считать положительной, когда ускорение a направлено вниз, и отрицательной, когда оно направлено вверх.

2. К пружине прикреплено тело, которое может смещаться вдоль определенной прямой (например, вдоль стержня, на который оно надето). Эта система может служить *акселерометром,* т. е. прибором для измерения ускорения тела, на котором такой прибор установлен (автомобиля, самолета, поезда и пр.). Опишите принцип действия такого акселерометра.

3. Самолет совершает вираж, двигаясь по окружности с постоянной скоростью v на одной и той же высоте. Определить радиус r этой окружности, если плоскость крыла самолета наклонена к горизонтальной плоскости под постоянным углом α.

Ответ. $r = \dfrac{v^2}{g \operatorname{tg} \alpha}$.

Указание. Когда самолет летит прямолинейно, плоскость крыла горизонтальна. Подъемная сила в этом случае направлена вертикально вверх, т. е. перпендикулярна к плоскости крыла. При повороте корпуса самолета вокруг продольной оси подъемная сила поворачивается на тот же угол, т. е. продолжает оставаться перпендикулярной к плоскости крыла, так как силы взаимодействия самолета с окружающей средой зависят лишь от относительного движения самолета и среды.

§ 12. ТРЕТИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА И ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

1. Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двух взаимодействующих материальных точек. В этом случае справедлив закон сохранения импульса

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{const}.$$

Дифференцируя это соотношение по времени, получим

$$\dot{\mathbf{p}}_1 + \dot{\mathbf{p}}_2 = 0,$$

или, на основании второго закона Ньютона (11.1),

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2, \qquad (12.1)$$

где $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ — силы, с которыми рассматриваемые материальные точки действуют друг на друга. Привлечем сюда опытный факт, согласно которому силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ направлены *вдоль прямой*, соединяющей взаимодействующие точки. Тогда мы придем к *третьему закону Ньютона*:

Силы взаимодействия двух материальных точек равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки.

Одну из сил, $\mathbf{F}_1$ или $\mathbf{F}_2$, согласно Ньютону, иногда называют *действием*, а другую — *противодействием*, и формулируют третий закон следующим образом. *Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.* Следует, однако, заметить, что «действие» по своей физической природе ничем не отличается от «противодействия». Если действующая сила обусловлена деформацией, всемирным тяготением или наличием электрического поля, то и противодействующая сила обусловлена тем же самым. Так, тяжелое тело, лежащее на столе, давит на стол, испытывая со стороны стола противоположно направленное противодавление. Действие — давление камня на стол — обусловлено деформацией камня, противодействие — давление стола на камень — обусловлено деформацией стола. В основе подразделения сил на «действующие» и «противодействующие» лежит представление об *активных телах*, производящих действие, и *пассивных телах*, оказывающих противодействие.

Так, если лошадь тянет телегу, то активным телом, производящим действие, будет лошадь, а пассивным телом, оказывающим противодействие, — телега. Однако подразделение тел на активные и пассивные можно провести далеко не всегда. Например, когда Солнце и планета притягиваются друг к другу силами всемирного тяготения, то в этом взаимодействии они выступают совершенно равноправно, и нельзя указать, какое из этих взаимодействующих тел является активным, а какое пассивным. Какую из сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ назвать действием и какую противодействием — это в большинстве случаев вопрос соглашения.

2. Третий закон Ньютона мы сформулировали для замкнутой системы, состоящей из двух взаимодействующих материальных точек. Постулируем теперь его справедливость для системы из произвольного числа материальных точек. Мы исходим из представления, что и в этом случае взаимодействие сводится к силам *попарного взаимодействия* между материальными точками. Пусть $\mathbf{F}_{ik}$ — сила, с которой i-я материальная точка действует на k-ю, а $\mathbf{F}_{ki}$ — сила, с которой k-я точка действует на i-ю. Третий закон утверждает, что обе эти силы направлены вдоль прямой, соединяющей взаимодействующие точки, причем $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$. В таком понимании третий закон Ньютона позволяет выполнить переход от *механики отдельной материальной точки к механике системы материальных точек.* В частности, он позволяет распространить закон сохранения импульса на случай системы произвольного числа n взаимодействующих материальных точек. Рассмотрим этот вопрос, а также другие связанные с ним важные вопросы.

Силы, действующие на материальные точки системы, можно разделить на *внутренние* и *внешние.* Внутренние силы — это силы взаимодействия между материальными точками самой системы. Выше мы обозначили их символами $\mathbf{F}_{ik}$ с двумя индексами i и k, которые указывают, какие точки взаимодействуют. Внешние силы — это такие силы, с которыми на материальные точки системы действуют внешние тела. Согласно третьему закону Ньютона $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$, т. е. $\mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_{ki} = 0$. Отсюда следует, что геометрическая сумма всех внутренних сил, действующих в системе, равна нулю. Запишем этот результат в виде соотношения

$$\mathbf{F}_1^{(i)} + \mathbf{F}_2^{(i)} + \ldots + \mathbf{F}_n^{(i)} = 0, \tag{12.2}$$

снабдив каждую силу верхним индексом (i), который указывает, что речь идет о внутренних силах. Нижний индекс обозначает номер материальной точки, на которую действует сила. Таким образом, $\mathbf{F}_1^{(i)}$, например, обозначает полную внутреннюю силу, действующую на первую материальную точку. Обозначим далее символами $\mathbf{F}_1^{(e)}$, $\mathbf{F}_2^{(e)}$, ... внешние силы, действующие на материальные

точки системы. Тогда на основании второго закона Ньютона можно написать

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_1^{(i)} + \mathbf{F}_1^{(e)},$$

$$\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_2^{(i)} + \mathbf{F}_2^{(e)},$$

. . . .

Сложив почленно эти уравнения и приняв во внимание соотношение (12.2), найдем

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \ldots + \mathbf{p}_n) = \mathbf{F}_1^{(e)} + \mathbf{F}_2^{(e)} + \ldots + \mathbf{F}_n^{(e)},$$

или

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}^{(e)}, \tag{12.3}$$

где $\mathbf{p}$ — импульс всей системы, $\mathbf{F}^{(e)}$ — равнодействующая всех внешних сил, действующих на нее. Таким образом, *производная по времени от импульса системы материальных точек равна геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему.* Внутренние силы исключаются третьим законом Ньютона. Уравнение (12.3) является обобщением соответствующего уравнения для одной материальной точки.

Допустим теперь, что геометрическая сумма всех внешних сил равна нулю (это имеет место, например, для замкнутой системы). Тогда $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$. Производная постоянной величины равна нулю. Справедливо и обратное утверждение: если производная некоторой величины равна нулю, то эта величина постоянна. Поэтому из последнего уравнения следует, что $\mathbf{p} = \text{const}$.

Итак, *если геометрическая сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то импульс системы сохраняется, т. е. не меняется со временем.* В частности, это имеет место, когда система замкнута.

Допустим теперь, что $\mathbf{F}^{(e)} \neq 0$, однако равна нулю проекция силы $\mathbf{F}^{(e)}$ на какое-либо направление, например на направление оси X. Тогда из уравнения (12.3) следует, что для этой проекции $\frac{d\mathbf{p}_x}{dt} = 0$, а потому $\mathbf{p}_x = \text{const}$. Таким образом, полный импульс системы не сохраняется, но сохраняется проекция импульса на направление оси X. Например, импульс свободно падающего тела не может сохраняться, так как на тело действует вниз сила тяжести. Под действием этой силы вертикальная составляющая импульса непрерывно изменяется. Однако горизонтальная составляющая импульса при свободном падении остается неизменной. (Мы учитываем действие только силы тяжести и отвлекаемся от силы сопротивления воздуха и прочих сил.)

3. Относительно приведенного вывода закона сохранения импульса надо сделать следующее замечание. Вывод предполагает, что материальные точки замкнутой системы взаимодействуют между собой попарно, и это взаимодействие подчиняется третьему закону Ньютона. Для справедливости результата достаточно потребовать выполнения более слабого условия (12.2). Достаточно, чтобы обращалась в нуль геометрическая сумма внутренних сил, действующих в системе. Соблюдение этого условия, как будет показано в § 38, является следствием весьма общего свойства пространства — его *однородности.* Возможно, что и это более слабое условие не является необходимым. Возможно, что закон сохранения импульса останется справедливым даже в тех случаях, когда теряет смысл разделение системы на части и нельзя пользоваться представлением о силах взаимодействия между ними, а также другими представлениями и понятиями классической механики. Возможно, что такая ситуация встречается внутри атомных ядер или при превращениях «элементарных» частиц. Опыт показывает, что *закон сохранения импульса,* надлежащим образом обобщенный, *является фундаментальным законом природы, не знающим никаких исключений.* Однако в таком широком понимании он уже не может рассматриваться как следствие законов Ньютона.

4. В нашем изложении закон сохранения импульса для замкнутой системы из двух взаимодействующих материальных точек был постулирован. Его доказательством служил опыт. Это было сделано для того, чтобы ввести понятие массы. Но можно ввести это понятие иначе, а именно определить отношение масс сравниваемых тел по обратному отношению ускорений, сообщаемым им равными силами. Этот способ *не требует предварительного измерения сил.* Достаточно лишь располагать критерием *равенства сил.* Например, если на два тела последовательно подействовать одной и той же пружиной, растянутой на одну и ту же длину, то можно утверждать, что действующие на них силы одинаковы. В сущности, способ определения массы, использованной нами в § 10, является частным случаем этого второго, более общего способа. Он использует то обстоятельство, что два тела, приведенные во взаимодействие, подвергаются согласно третьему закону Ньютона воздействию сил, равных по модулю. Понятно, что если при определении массы не опираться на третий закон Ньютона, а пользоваться каким-либо другим *независимым способом,* то при доказательстве закона сохранения импульса не потребуется особо выделять случай двух взаимодействующих материальных точек. И в этом случае закон сохранения импульса будет теоремой механики. Определение массы, принятое нами в § 10, обладает, однако, тем преимуществом, что оно не нуждается в указании дополнительного критерия, позволяющего судить о равенстве действующих сил. В общем случае такой критерий, не опирающийся на третий закон Ньютона, указать затруднительно.

5. Иногда взаимодействие двух тел A и B осуществляется посредством третьего тела. Тогда мы имеем дело с системой трех тел, и надо принимать во внимание уравнение движения этого третьего тела. Между тем во многих случаях рассуждают так, как если бы этого третьего тела совсем не было. Выясним, когда такой способ рассуждения допустим и не приводит к ошибкам. Для этого рассмотрим следующим пример.

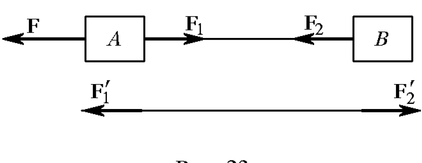


Рис. 23

Тела A и B связаны между собой нерастяжимой нитью (рис. 23). На тело A действует сила $\mathbf{F}$, натягивающая нить, вследствие чего оба тела A и B движутся с одним и тем же ускорением a. Обычно рассуждают следующим образом. Обозначим через F_1 силу, с которой тело B действует на тело A посредством натянутой нити, а через F_2 — противоположно направленную силу, с которой тело A действует на тело B. Тогда

$$m_A a = F - F_1, \quad m_B a = F_2, \tag{12.4}$$

где m_A и m_B — массы тел A и B. По третьему закону Ньютона $F_1 = -F_2$. Исключая F_1 и F_2, находим ускорение

$$a = \frac{F}{m_A + m_B},$$

а затем силы F_1 и $-F_2$:

$$F_2 = -F_1 = \frac{m_B}{m_A + m_B} F.$$

Это рассуждение неполно и может привести к неправильному результату. Из рассуждения выпало третье тело — нить, которая также движется ускоренно. Тела A и B не взаимодействуют непосредственно между собой. Они взаимодействуют с *нитью*, и третий закон Ньютона надо применять именно к таким взаимодействиям. Вот более подробное рассуждение, в котором учитывается ускорение, сообщаемое нити. В нем под F_1 и F_2 следует понимать силы, с которыми на тела A и B действует *натянутая нить*. Силы, с которыми на нить действуют тела A и B, обозначим через F'_1 и F'_2. К уравнениям (12.4) надо присоединить уравнение движения нити: $ma = F'_1 - F'_2$, где m — масса нити. Ввиду равенства действия и противодействия $F'_1 = F_1$, $F'_2 = F_2$, так что

$$ma = F_1 - F_2.$$

Решая это уравнение совместно с (12.4), получим

$$a = \frac{F}{m_A + m_B + m},$$

$$F_2 = m_B a, \quad F_1 = (m_B + m)\, a.$$

Теперь $F_1 \neq F_2$, поскольку $m \neq 0$. Допустим, однако, что масса нити пренебрежимо мала по сравнению с массами тел A и B. Тогда, отбрасывая член ma, получим приближенно $F_1 = F_2$. В этом приближении результат получается такой же, как если бы тела A и B *непосредственно* взаимодействовали между собой. Идеализируя задачу, говорят, что взаимодействие между телами A и B осуществляется посредством *«безмассового» тела* (нити). Подобные случаи встречаются очень часто. Безмассовые тела просто выбрасываются из рассмотрения. Однако безмассовых тел в действительности не существует, они являются идеализированными абстракциями. Надо отдавать себе отчет, когда можно и когда нельзя пользоваться такими идеализированными абстракциями. В приведенном примере было бы грубой ошибкой пользоваться соотношением $F_1 = F_2$ в тех случаях, когда масса нити сравнима с массами тела A и B.

§ 13. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТЕЛ НА РАССТОЯНИИ И ПОЛЕВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

1. Взаимодействие тел может происходить либо при их *непосредственном* соприкосновении, либо *на расстоянии*. В первом случае взаимодействующие тела тянут или толкают друг друга. Возникающие при этом силы обычно вызываются *деформациями тел*. Деформации могут быть малы и не представлять непосредственного интереса в изучаемом явлении. Тогда от них можно отвлечься, учтя их влияние введением соответствующих сил *натяжения* и *давления*. Но если нас интересует происхождение и механизм действия сил, то надо подробно рассмотреть картину деформаций, возникающих в телах. Так, в примере, рассмотренном в конце предыдущего параграфа, нить действует на тела A и B (см. рис. 23) потому, что она растянута. В приведенных там расчетах мы отвлеклись от этого обстоятельства, так как предполагали, что растяжение нити мало, так что скорости связанных тел A и B можно было считать одинаковыми. В этом случае результаты расчета не зависят от степени растяжения нити. Это было бы, вообще говоря, не так, если вместо нити взять мягкую пружину. Мы не можем также отвлечься от растяжения нити, если хотим понять происхождение сил F_1 и F_2, с которыми нить действует на тела A и B. Точно также надо рассмотреть деформации тел A и B, если мы хотим понять, почему эти тела растягивают нить. Ведь тела A и B действуют на нить только потому, что они деформированы. Камень, привязанный к веревке, заставляют вращаться по окружности. При этом неизбежно возникнут деформации. Если бы камень не был деформирован, то он не мог бы двигаться с ускорением. Всякая мысленно вырезанная малая часть камня движется с ускорением потому, что на нее действуют окру-

жающие части камня. А это возможно только тогда, когда камень деформирован.

Помимо сил, зависящих от деформации тел, возможны и более сложные случаи. Например, силы взаимодействия могут зависеть не только от самих деформаций, но и от их *скоростей*. Примером могут служить силы трения. Но и эти силы возникают лишь при непосредственном соприкосновении взаимодействующих тел. Во всех этих случаях говорят, что силы взаимодействия являются *силами близкодействия*.

2. Помимо сил, действующих при соприкосновении тел, в природе существуют силы, которые, во всяком случае при непосредственном созерцании, воспринимаются нами как силы, *непосредственно действующие на расстоянии* без какого бы то ни было участия промежуточной среды. Они существуют даже тогда, когда взаимодействующие тела разделены «пустым» пространством. К силам такого рода относятся, например, гравитационные силы, а также силы взаимодействия наэлектризованных и намагниченных сил.

Согласно основным представлениям механики Ньютона силы, действующие на всякое тело в какой-либо момент времени, зависят от положения и скоростей остальных тел в тот же момент времени. Когда взаимодействующие тела не соприкасаются, такое представление предполагает либо непосредственное действие на расстоянии, либо передачу взаимодействий с *бесконечно большой скоростью.* Ньютоновская механика принципиально допускала взаимодействия, передающиеся с бесконечно большими скоростями. Логически против такого допущения возразить ничего нельзя. Вопрос должен быть решен опытом. Опытные факты привели к заключению, что мгновенных взаимодействий не существует. Скорость распространения взаимодействий ограничена (она не превосходит скорости света в вакууме). Отсюда следует, что описание взаимодействий, даваемое ньютоновской механикой, может привести и действительно приводит к практически верным результатам только тогда, когда скорости всех тел рассматриваемой системы пренебрежимо малы по сравнению со *скоростью распространения взаимодействия* (скоростью света). Но принципиально такое описание неверно. Для иллюстрации рассмотрим третий закон Ньютона. Из-за наличия конечной скорости распространения взаимодействий этот закон не может быть всегда верным для взаимодействий, осуществляющихся на расстоянии. Действительно, пусть две материальные точки длительно находятся в покое в положениях A и B (рис. 24). Допустим, что силы их взаимодействия в этих положениях подчиняются третьему закону Ньютона. Если первая точка перейдет в новое положение A' настолько быстро, что за время перехода взаимодействие не успеет распространиться до точ-

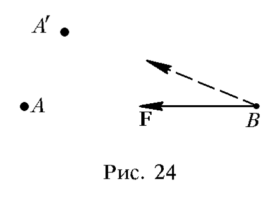


Рис. 24

ки B, то сила **F** при этом не изменится. Она будет определяться не новым, а прежним расположением материальных точек, т. е. будет направлена вдоль прямой BA, а не вдоль прямой BA', как должно было бы быть по третьему закону Ньютона. Получилось нарушение третьего закона, а с ним и механического закона сохранения импульса взаимодействующих сил. *Суммарный импульс тел A и B, вообще говоря, не может сохраняться из-за конечности скорости распространения взаимодействий.*

3. Физик XIX века сказал бы, что такое нарушение третьего закона Ньютона и механического закона сохранения импульса является кажущимся. В действительности нет непосредственного действия тел на расстоянии. Непосредственное действие тел на расстоянии предполагает, что тело может оказывать действие в тех местах, где оно находится и от которых оно отделено пустым пространством. По этой причине такое действие невозможно. Все взаимодействия осуществляются посредством промежуточной среды. Тело A, действуя на окружающую среду, вызывает в ней какие-то изменения, например, напряжения и давления, распространяющиеся с конечными скоростями. Когда эти изменения доходят до тела B, они проявляются в виде сил, действующих на него. Но как быть в тех случаях, когда взаимодействующие тела отдалены друг от друга совершенно пустым пространством? На это физик XIX века отвечал бы, что абсолютно пустого пространства не существует. Все пространство заполнено какой-то средой, например *мировым эфиром*, через которую и осуществляется взаимодействие. Такую гипотетическую среду физик XIX века наделял свойствами, аналогичными свойствам привычных нам твердых, жидких и газообразных тел. Третий закон Ньютона всегда справедлив — сказал бы он, — но его надо применять не к силам взаимодействия непосредственно между удаленными телами A и B (таких сил просто не существует, они кажущиеся), а к силам взаимодействия между этими телами и окружающей средой. Закон сохранения импульса также всегда справедлив. Однако полный импульс слагается не только из импульсов тел, входящих в систему, но и из импульса промежуточной среды, через которую передаются взаимодействия.

Физик нашего времени рассуждает аналогично, но более осторожно и абстрактно. Он также не признает непосредственного действия тел на расстоянии. Однако он не признает и промежуточной среды, через которую якобы передаются взаимодействия. Он говорит, что все взаимодействия осуществляются *полями* — гравитационными, электромагнитными и прочими. Тело A возбуждает в окружающем пространстве *силовое поле*, которое в месте нахождения тела B проявляется в виде действующих на него сил. В свою очередь, тело B возбуждает аналогичное силовое поле, действующее на тело A. Никаких других силовых взаимодействий, помимо полевых, современная физика не признает. Взаимодействия прикосновением являются частными случаями полевого взаимодействия. Они осуществляются *молекулярными полями.* Молекулярные поля быстро

убывают с расстоянием и проявляются, когда расстояние между взаимодействующими телами не превышает примерно 10^{-7} см. Вот почему такие *полевые взаимодействия* макроскопически воспринимаются как *«взаимодействия прикосновением»*.

4. Возникает вопрос, не является ли различие между точками зрения современного физика и физика прошлого века чисто терминологическим: раньше говорили о промежуточной среде, теперь говорят о поле. Дело, конечно, не в терминологии, а в существе, в реальных физических свойствах поля и гипотетической среды — мирового эфира, посредством которой, по воззрениям физиков XIX века, осуществляются взаимодействия тел. Мировому эфиру приписывались свойства, аналогичные свойствам обычных тел. Можно было говорить о покое и движении эфира, о его упругости, плотности, силах, действующих на эфир. Можно было говорить о движении тел относительно эфира, с эфиром можно было связать систему отсчета и т. д. Обо всем этом не имеет смысла говорить, когда речь идет о поле. На поле современная физика смотрит как на некоторую объективную реальность, посредством которой передаются взаимодействия. Поле может существовать и самостоятельно, независимо от возбудивших его тел. Таковы, например, электромагнитные волны, излучаемые радиостанциями. Радиостанция может прекратить работу, а излученное ею электромагнитное поле продолжает существовать и распространяться в пространстве. Достигнув удаленного приемника, оно доставляет информацию, которую несколько ранее передала радиостанция. Нет абсолютно пустого пространства, пространство заполнено полями. Поле, наряду с веществом, является *одним из видов материи*. Физикам XIX века казалось, что понять природу сил взаимодействия — это значит свести их к механическим силам, возникающим при соприкосновении тел, например, к силам упругости. Современная физика отрицает такую постановку вопроса.

Упругие силы, силы давления и натяжения, мускульная сила и прочие силы издавна были привычны человеку. Он считал эти силы чем-то простым и понятным. Электрические и магнитные силы, с которыми он столкнулся позднее, были восприняты им как нечто таинственное и непонятное. Возникло естественное стремление свести эти таинственные силы к более простым и привычным силам упругости, к силам давления и натяжения. Однако в действительности дело обстоит как раз наоборот. Более простыми и «понятными» являются силы электромагнитных взаимодействий, а упругие и прочие силы — более сложными. По современным представлениям силы упругости, силы трения, силы химического сродства, молекулярные силы, мускульная сила и прочие обычные силы, с которыми сталкивается человек, за исключением сил всемирного тяготения, являются не чем иным, как проявлением электромагнитных сил. Поэтому задача сведения электромагнитных сил к силам упругости просто бессмысленна.

Поле действует на тела с определенными силами. Однако не имеет смысла говорить о механических силах, действующих на поля. Поэтому с точки зрения полевого взаимодействия третий закон Ньютона может нарушаться: на тело действует сила, но нет силы противодействия, действующей на другое тело. Закон сохранения импульса, однако, остается верным, так как импульсом могут обладать не только тела, но и поля. Импульс поля проявляется в изменении импульса тела, излучившего или поглотившего энергию поля. При излучении тело теряет импульс, уносимый полем, при поглощении оно приобретает импульс за счет поглощения энергии поля.

5. Примером проявления импульса электромагнитного поля может служить *давление света*. Опытами русского физика-экспериментатора П. Н. Лебедева (1866—1912) было показано, что свет оказывает давление на тела, на которые он падает. Рассмотрим изолированную систему из двух тел A и B (рис. 25). Пусть тело A излучило кратковременный световой сигнал по направлению к телу B. Дойдя до тела B, свет поглощается, оказывая на него давление. В результате тело B приходит в движение, его импульс меняется. Закон сохранения импульса, очевидно, был бы нарушен, если бы свет, направлявшийся к телу B, не обладал импульсом. Мы должны приписать ему импульс, равный импульсу, приобретенному телом B после поглощения света. Но если свет обладает импульсом, то при его излучении излучающее тело A должно испытывать *отдачу*. Иначе процесс излучения света сопровождался бы нарушением закона сохранения импульса.

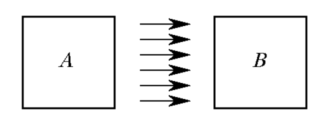


Рис. 25

Эти рассуждения можно облечь в количественную форму и прийти к важным соотношениям. Допустим, что на полностью поглощающее тело B перпендикулярно к его поверхности падает параллельный пучок света. Опытами Лебедева было показано, что давление π, оказываемое светом на единицу площади тела B, равно объемной плотности энергии падающего пучка. Обозначим через l длину, а через S — площадь поперечного сечения падающего пучка. Тогда $\pi = \frac{\varepsilon}{Sl}$, где ε — энергия пучка. Сила действующая на тело B, равна $F = \pi S = \varepsilon/l$. Она действует в течение времени $\tau = l/c$ (c — скорость света в вакууме), сообщая телу импульс $p = F\tau = \varepsilon/c$ (см. § 18). Это и есть импульс света, поглощенного телом B. Итак, свет, распространяющийся в определенном направлении, обладает импульсом

$$p = \frac{\varepsilon}{c}. \tag{13.1}$$

Поскольку распространение идет со скоростью c, целесообразно представить импульс в виде $p = mc$, рассматривая величину m как *массу света*. Она равна

$$m = \frac{\varepsilon}{c^2}. \qquad (13.2)$$

Соотношение (13.2) получено здесь для энергии света. Теория относительности показала, что оно справедливо для любых видов энергии. В таком расширенном понимании соотношение (13.2) выражает фундаментальный закон Эйнштейна о *взаимосвязи между массой и энергией*.

6. В механике нам не придется сталкиваться с явлениями, в которых проявляются импульсы полей. Мы ограничимся изучением только таких явлений, для которых третий закон Ньютона и закон сохранения импульса в их старом — ньютоновском — смысле выполняются.

§ 14. РОЛЬ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

1. Векторное уравнение движения материальной точки (11.3) можно записать в *координатной форме*:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z. \qquad (14.1)$$

Одно векторное уравнение (11.3) эквивалентно трем числовым уравнениям (14.1). Все эти уравнения являются *дифференциальными*, а потому их недостаточно для однозначного определения движения материальной точки. Каждое из них есть уравнение *второго порядка*. (Порядок дифференциального уравнения определяется производной высшего порядка, входящей в это уравнение). По этой причине для однозначного определения движения точки к уравнениям движения надо присоединить дополнительные данные, определяющие значения двух векторных или шести числовых постоянных. В качестве таковых обычно берут значения радиуса-вектора **r** и скорости **v** или каких-либо двух функций их в момент времени $t = 0$. Эти значения называются *начальными условиями*. Выясним этот вопрос на примере свободного движения материальной точки в поле тяжести Земли.

2. Галилеем было установлено, что *все тела в пустоте падают с одинаковым ускорением*. Для качественного подтверждения этого положения может служить стеклянная трубка длиной около одного метра, из которой откачан воздух. В трубку помещаются различные тела, например дробинка, кусочек пробки, перышко, кусочек бумаги. Пока трубка не откачана, бумажки и перышки падают во много раз медленнее остальных тел, что объясняется сопротивлением воздуха. Но если воздух из трубки откачать, то все тела начнут падать

одинаково быстро. Более точное доказательство дают наблюдения за качаниями маятника: опыт показывает, что период качания маятника не зависит от материала, из которого он изготовлен. Ускорение свободного падения меняется с географической широтой: на полюсе оно максимально и составляет 9,83 м/с^2, на экваторе — минимально и равно 9,78 м/с^2. Ускорение g уменьшается с высотой над земной поверхностью: при поднятии на 1 м оно убывает приблизительно на $3 \cdot 10^{-6}$ м/с^2. Для средних широт можно принять, что вблизи земной поверхности $g = 9{,}80$ м/с^2. В расчетах, не требующих особой точности, ускорение свободного падения g может считаться одним и тем же для всей земной поверхности.

На тело в поле тяжести Земли действует сила $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, а потому уравнение движения (11.8) переходит в уравнение

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{g}. \tag{14.2}$$

Мы пренебрегли всеми силами и учли только силу тяжести. Зависимостью g от географической широты и высоты над земной поверхностью также будем пренебрегать. Итак, ускорение g будем считать постоянным. Уравнение (14.2) эквивалентно двум уравнениям:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g}, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}. \tag{14.3}$$

Простым дифференцированием нетрудно убедиться, что этим уравнениям удовлетворяют следующие решения:

$$\mathbf{v} = \mathbf{g}t + \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{r} = \frac{1}{2}\,\mathbf{g}t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \tag{14.4}$$

при произвольных значениях постоянных векторов $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$. Решение (14.4) является *общим.* Это значит, что любое решение уравнения (14.2) может быть представлено в виде (14.4). Общее решение — это, в сущности, не одно решение, а целое *семейство решений,* зависящее от двух произвольных векторных постоянных $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$. Придавая этим постоянным какие-либо конкретные значения, мы выделяем из этого семейства определенное *частное решение.* Постоянная $\mathbf{v}_0$ есть начальная скорость движущейся точки, $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор ее в начальный момент времени. В этом легко убедиться, если с помощью формул (14.4) найти значения $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$ при $t = 0$. Постоянные $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$ нельзя определить из дифференциального уравнения движения (14.2), так как при любых значениях этих постоянных выражения (14.4) являются решениями этого уравнения. Величины $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$ определяются *начальными условиями.* В зависимости от значений $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$ движения могут сильно отличаться друг от друга. Тело может подниматься вверх или опускаться вниз по прямой линии; оно может описывать параболу, достигая или не достигая ее вершины; дуга параболы может быть изогнута сильнее или

слабее и т. д. Получается довольно разнообразный и запутанный класс движений. Заслуга Ньютона, между прочим, и состоит в том, что он подметил, что вся эта сложность исчезает, а все многообразие движений может быть описано единой формулой, не содержащей никаких произвольных постоянных, если от положений и скоростей материальной точки перейти к ее ускорению.

3. Полученные результаты допускают обобщения. Допустим, что имеется система N материальных точек, взаимодействующих между собой и с внешними телами, положение которых предполагается заданным в любой момент времени. Записав математически второй закон Ньютона для каждой материальной точки, мы получим систему N векторных или $3N$ эквивалентных им числовых дифференциальных уравнений второго порядка. Можно показать, что для однозначного решения этих уравнений надо задать $2N$ векторных или $6N$ числовых величин, определяющих начальные значения координат и скоростей материальных точек системы.

ЗАДАЧА

Тело брошено вверх под углом α к горизонту с начальной скоростью $\mathbf{v}_0$. Исследовать его движения, пренебрегая сопротивлением воздуха. Найти уравнение траектории, дальность полета и максимальную высоту подъема, считая земную поверхность горизонтальной. При каком угле α дальность полета максимальна?

Р е ш е н и е. Точку земной поверхности, откуда брошено тело, примем за начало координат ($\mathbf{r}_0 = 0$). Тогда, как видно из (14.4), движение будет происходить в вертикальной плоскости, в которой лежат векторы $\mathbf{g}$ и $\mathbf{v}_0$. Примем ее за координатную плоскость XY, направив ось X горизонтально в сторону движения, а ось Y — вертикально вверх. Запишем уравнение (14.4) в проекциях на координатные оси,

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \quad v_y = v_0 \sin\alpha - gt, \quad x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} gt^2.$$

Исключая из последних двух уравнений время t, найдем уравнение траектории

$$y = x \operatorname{tg}\alpha \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Это уравнение параболы. Отсюда находим дальность полета

$$x = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

и максимальную высоту поднятия

$$y_{\text{макс}} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Максимальная дальность достигается при $\alpha = 45°$ и равна

$$x_{\text{макс}} = \frac{v_0^2}{g}.$$

§ 15. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ГАЛИЛЕЯ

1. Уравнение, выражающее закон Ньютона,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \tag{15.1}$$

отчетливо показывает, что этот закон не может быть справедлив в любой системе отчета. Действительно, ускорение $\mathbf{a}$, вообще говоря, имеет разные значения в различных системах отсчета, движущихся относительно друг друга с ускорением. Сила же $\mathbf{F}$ не может зависеть от выбора системы отсчета, так как она определяется только взаимными расположениями и относительными скоростями материальных точек системы, а эти величины согласно нерелятивистской кинематике от выбора системы отсчета не зависят. Отсюда следует, что если второй закон Ньютона справедлив в какой-либо системе отсчета, то он не может оставаться справедливым в другой системе отсчета, движущейся относительно первой с ускорением.

2. Допустим, что система отсчета S инерциальна. Рассмотрим вторую систему отсчета S', движущуюся относительно первой поступательно с постоянной скоростью $\mathbf{V}$. Пусть известно движение материальной точки в одной из этих систем, например в системе S. Как найти движение той же точки в системе S'? Задача в дорелятивистской ее постановке сводится к нахождению формул, выражающих координаты x', y', z' движущейся точки в системе S' через ее координаты x, y, z в системе S в один и тот же момент времени.

Начало координат и направление координатных осей можно выбрать произвольно как в системе S, так и в системе S'. Если координатные системы неподвижны друг относительно друга и отличаются друг от друга только положениями начал и направлениями координатных осей, то преобразование координат есть чисто геометрическая задача. Ее решение известно из аналитической геометрии.

Остается только выяснить, что нового вносит в вопрос о преобразовании координат движение одной системы отсчета относительно другой? Для простоты можно принять, что координатные оси X', Y', Z' соответственно параллельны координатным осям X, Y, Z и что в начальный момент времени $t = 0$ начало O' совмещается с началом O. Кроме того, можно считать, что скорость $\mathbf{V}$ параллельна оси X. При этих условиях ось X' все время будет совпадать с осью X.

Такие упрощения в постановке задачи не лишают ее общности, поскольку переход к общим формулам может быть совершен дополнительным переносом начал координат и поворотом координатных осей.

Пусть в момент времени t движущаяся точка находится в положении M (рис. 26). Тогда $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$. За время t начало ко-

ординат системы S' переходит из положения O в положение O', причем $\overrightarrow{OO'} = \mathbf{V}t$. Ввиду этого предыдущее соотношение принимает вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t', \quad t = t', \tag{15.2}$$

где $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$, $\mathbf{r}' = \overrightarrow{O'M}$ — радиусы-векторы движущейся точки в системах S и S' соответственно. Запишем соотношение (15.2) в проекциях на координатные оси:

$$x = x' + \mathbf{V}t', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \tag{15.3}$$

Формулы обратного преобразования имеют вид

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t, \quad t' = t, \tag{15.4}$$

или в координатной форме

$$x' = x - \mathbf{V}t, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \tag{15.5}$$

Эти формулы и дают решение поставленной задачи. Они называются *преобразованием Галилея.* Мы присоединили к формулам преобразования координат дополнительную формулу $t' = t$, чтобы явно отметить, что в нерелятивистской кинематике время считается абсолютным, а потому не преобразуется.

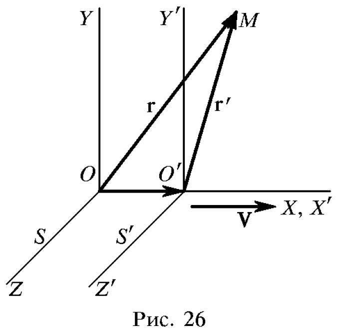


Рис. 26

С точки зрения «здравого смысла» преобразование Галилея кажется самоочевидным. Однако в основе его вывода лежит предположение дорелятивистской кинематики об абсолютности длин и промежутков времени. Абсолютность времени явно отмечена в уравнении $t = t'$. При выводе остальных формул использовано предположение об абсолютности длин. Действительно, формулы (15.2), (15.3) и (15.4) были бы самоочевидными, если бы радиусы-векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, а с ними и все координаты x, y, z, x', y', z' измерялись в одной и той же системе отсчета, например S. Но в действительности формулы предполагают, что «нештрихованные» величины $\mathbf{r}$, x, y, z измеряются в системе S, а «штрихованные» $\mathbf{r}'$, x', y', z' — в системе S'. По этой причине при выводе формул преобразования Галилея без предположения абсолютности расстояний и промежутков времени обойтись нельзя. Релятивистская физика отказалась от такой абсолютности. Преобразование Галилея она заменила *преобразованием Лоренца* (по имени ирландского физика-теоретика Лоренца (1853—1928)). Этот вопрос будет подробно рассмотрен при изложении теории относительности (см. т. IV). Сейчас достаточно отметить, что преобразование Галилея является предельным случаем преобразования Лоренца и получается из последнего, когда скорость V пренебрежимо мала по срав-

нению со скоростью света в вакууме. При изучении «медленных движений» ($V^2/c^2 \ll 1$) можно пользоваться преобразованием Галилея. В случае «быстрых движений» этого делать нельзя.

3. Дифференцируя соотношение (15.2) по времени t, получим

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} + \mathbf{V}',$$

или

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}, \tag{15.6}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость точки в системе S, а $\mathbf{v}'$ — в системе S'. Эта формула выражает *нерелятивистский закон сложения скоростей* (в физическом смысле). Она выведена здесь в предположении, что скорость $\mathbf{V}$ постоянна. Но формула верна и в случае, когда скорость $\mathbf{V}$ не постоянна. Однако для целей настоящего параграфа достаточно скорость $\mathbf{V}$ считать величиной постоянной.

Дифференцируя второй раз в предположении постоянства $\mathbf{V}$, получим

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv'}{dt} = \frac{dv'}{dt'},$$

или

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'. \tag{15.7}$$

Здесь $\mathbf{a}$ — ускорение точки в системе S, а $\mathbf{a}'$ — ускорение той же точки в системе S'. Таким образом, ускорение в обеих системах отсчета одно и то же. Говорят, что *ускорение инвариантно относительно преобразования Галилея.*

Свободная материальная точка движется в системе S без ускорения, так как по предположению система S инерциальна. Формула (15.7) показывает, что ее движение в системе S' будет также неускоренным. Следовательно, система S' — тоже инерциальная система отсчета. Таким образом, *система отсчета, движущаяся прямолинейно и равномерно относительно инерциальной системы, сама является инерциальной системой отсчета.* Если существует хотя бы одна инерциальная система отсчета, то существует и бесконечное множество инерциальных систем, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно. Сила является функцией только инвариантных величин: разностей координат и разностей скоростей взаимодействующих материальных точек. Поэтому она не меняется при переходе от одной системы отсчета к другой: $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$. Иначе говоря, *сила инварианта относительно преобразования Галилея.* Так как ускорение инвариантно: $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$, то из уравнения (15.1) следует

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}'.$$

Это уравнение выражает второй закон Ньютона в «штрихованной» системе отсчета S'. Оно имеет такой же вид, что и в «нештрихованной» системе S. Уравнения, остающиеся неизменными при переходе от одной системы отсчета к другой, называются *инвариантными*. Таким образом, *уравнения механики Ньютона инвариантны относительно преобразования Галилея*. Это утверждение называется *принципом относительности Галилея*.

4. Принцип относительности Галилея утверждает полное равноправие всех инерциальных систем отсчета. Значит ли это, что одно и то же движение выглядит одинаково во всех инерциальных системах отсчета? Конечно, нет. Движение тела, свалившегося с полки равномерно движущегося вагона, является прямолинейным, если его рассматривать относительно вагона. Но то же движение происходит по параболе в системе отсчета, связанной с полотном железной дороги, хотя законы механики Ньютона одинаковы в обеих системах отсчета. *Движение выглядит по-разному потому, что законы Ньютона выражаются дифференциальными уравнениями, а таких уравнений недостаточно, чтобы полностью определить движение.* Для этого к дифференциальным уравнениям надо присоединить начальные условия — задать начальное положение тела и его начальную скорость. В приведенном примере дифференциальные уравнения движения тела одни и те же в обеих системах отсчета, однако начальные условия разные. В вагоне тело падает с полки с начальной скоростью, равной нулю. В системе отсчета, связанной с полотном железной дороги, то же тело имеет начальную скорость в горизонтальном направлении, равную скорости поезда. Этим и объясняется различный характер движения в обеих системах отсчета. Для того чтобы движение получилось одинаковым, надо в обеих системах отсчета создать одинаковые начальные условия. Это надо понимать в следующем смысле.

Допустим, что имеются две замкнутые системы тел — две большие лаборатории, движущиеся относительно друг друга прямолинейно и равномерно. Каждая из лабораторий может служить системой отсчета. Пусть эти системы инерциальны. Предположим, что обе лаборатории совершенно тождественны, т. е. состоят из одного и того же набора одинаковых тел и оборудованы совершенно одинаково. Явления, происходящие внутри лабораторий, не зависят от того, что происходит в окружающем внешнем мире, так как по предположению лаборатории являются замкнутыми системами. Принцип относительности Галилея утверждает, что *основные механические законы, которыми определяются изменения состояния движения тел, в обеих лабораториях одни и те же.* Под основными механическими законами здесь понимаются законы, однозначно определяющие движение системы по начальным условиям, в которых она находилась, т. е. по значениям координат и скоростей всех материальных точек системы в произвольный момент времени, условно принимаемый за начальный. Если в обеих лабораториях создать

одинаковые начальные условия для всех без исключения тел, то все последующие движения их будут протекать совершенно одинаково в обеих лабораториях. Именно в таком смысле понимал принцип относительности сам Галилей. Он писал:

«Уединитесь с каким-нибудь приятелем в просторное помещение под палубой большого корабля и пустите туда мух, бабочек и других подобных мелких летающих насекомых. Пусть там находится также большой сосуд с водой и плавающими в нем рыбками. Подвесьте далее наверху ведерко, из которого капля за каплей вытекала бы вода в другой сосуд с узким горлышком, подставленный внизу. Пока корабль стоит неподвижно, наблюдайте старательно, как мелкие летающие живые существа с одной и той же скоростью летают во всех направлениях внутри помещения. Рыбки, как вы увидите, будут плавать безразлично во все стороны. Все падающие капли будут попадать в подставленный сосуд. Бросая приятелю какую-нибудь вещь, вам не придется применять бóльшую силу, чтобы бросить ее в одну сторону, чем в другую, если только вещь бросается на одни и те же расстояния. Прыгая двумя ногами, вы сделаете прыжок на одно и то же расстояние, независимо от его направления. Наблюдайте хорошенько за всем этим, хотя у нас не возникает никакого сомнения в том, что пока корабль остается неподвижным, все должно происходить именно так. Пусть теперь корабль приведен в движение с какой угодно скоростью. Если движение будет равномерным и без качки в ту и другую сторону, то во всех указанных явлениях вы не обнаружите ни малейшего изменения и ни по одному из них вы не сможете установить, движется ли корабль или стоит на месте».

Далее Галилей повторяет, как будут протекать на движущемся корабле все явления, описанные выше. Он замечает, в частности, что если бросить с одинаковой силой (надо было сказать — с одинаковой скоростью относительно корабля) один и тот же предмет сначала к корме, а затем к носу корабля, то в первом случае предмет пройдет относительно пола корабля не большее расстояние, чем во втором, хотя за время, пока предмет находится в воздухе, пол движущегося корабля успеет переместиться на значительное расстояние навстречу предмету. Аналогичные замечания делаются им и в отношении остальных явлений. Отмечая независимость всех явлений, наблюдаемых в закрытом помещении под палубою корабля, от равномерного движения последнего, Галилей приходит к следующему выводу:

«Причина согласованности всех этих явлений в том, что движение корабля обще всем находящимся в нем предметам, так же как и воздуху. Поэтому-то я и сказал, что вы должны находиться под палубой».

5. Было бы неправильно давать принципу относительности следующую формулировку: «Если в двух различных инерциальных системах отсчета в начальный момент времени *все без исключения тела и объекты Вселенной* поставить в совершенно одинаковые условия, то в дальнейшем в обеих системах отсчета все явления будут протекать совершенно одинаково». Такое утверждение бессодержательно и не может выражать никакого физического закона. Действительно, если две системы отсчета движутся одна относительно другой, то *все без исключения тела Вселенной* не могут в один и тот же момент времени находиться

в них в совершенно одинаковых условиях: скорости одних и тех же тел в этих двух системах отсчета будут разными. Поэтому предпосылка, о которой говорится в приведенной (неправильной) формулировке, не может быть выполнена, поскольку она имеет в виду все без исключения тела Вселенной. Принцип относительности (в правильной формулировке) является нетривиальным физическим законом потому, что в нем речь идет не о явлениях во всей Вселенной, а о явлениях внутри *конечных замкнутых систем* и *систем, находящихся в неизменных внешних условиях.* Примером может служить закрытое помещение на корабле, о котором говорил Галилей. Помещение должно быть закрыто. Иначе явления, в нем происходящие, зависели бы от скорости ветра, меняющейся с изменением скорости движения корабля. Такое помещение все же не является вполне замкнутой системой. Тела, в нем находящиеся, подвержены внешним явлениям: на них действует поле силы тяжести Земли. Однако это поле одно и то же, независимо от того, движется корабль равномерно или стоит на месте. Поэтому закрытое помещение с находящимися в нем телами ведет себя так же, как замкнутая система, хотя оно и находится во внешнем поле тяжести.

Принцип относительности иногда формулируют еще так: «Законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета». Недостаток этой формулировки состоит в том, что «одинаковость законов природы» может быть истолкована в смысле одинаковости протекания одного и того же явления во всех инерциальных системах отсчета. Это, как подробно разъяснено выше, неверно. Характер протекания физических явлений определяется не только основными законами природы, но и значениями параметров, определяющих начальные условия, в которых находилась система. Чтобы не возникло подобных неверных представлений, лучше говорить не просто о «законах природы», а по примеру Эйнштейна о «законах, по которым *происходят изменения состояний физических систем*», формулируя принцип относительности следующим образом:

Законы природы, по которым изменяются состояния физических систем, не зависят от того, к какой из инерциальных систем отсчета относятся эти изменения.

Эта формулировка является более общей, чем прежняя, в которой говорилось об инвариантности законов Ньютона относительно преобразования Галилея. Во-первых, здесь идет речь об инвариантности *всех физических законов,* а не только законов механики, каковыми являются законы Ньютона. Во-вторых, здесь не указан конкретный вид преобразований координат и времени, относительно которых законы природы инвариантны. Такие преобразования надо найти из *самого принципа относительности* и некоторых дополнительных соображений. Именно так в теории относительности получаются преобразования Лоренца, о которых было упомянуто выше. Законы природы инвариантны относительно преобразования Лорен-

ца. Принцип относительности в такой формулировке называется *принципом относительности Эйнштейна.* О нем будет идти речь в т. IV нашего курса.

§ 16. АДДИТИВНОСТЬ И ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАССЫ

1. Пусть два тела с массами m_1 и m_2 сталкиваются между собой и соединяются в одно — составное — тело. Примером может служить слипание двух глиняных шаров при столкновении их между собой. Другим примером является *химическая реакция,* в которой два атома или ядра соединяются в молекулу. Требуется определить массу составного тела m, зная массы m_1 и m_2 соединяющихся тел. На первый взгляд ответ кажется тривиальным, а именно $m = m_1 + m_2$. Хотя это в какой-то мере и правильно, но требует обоснования. Обоснование в механике Ньютона можно дать на основе принципа относительности Галилея.

Рассмотрим процесс столкновения в какой-либо инерциальной системе отсчета S. Обозначим через $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ скорости тел до столкновения, а через $\mathbf{v}$ — скорость составного тела после столкновения. На основании закона сохранения импульса можно написать

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m\mathbf{v}. \tag{16.1}$$

Рассмотрим теперь тот же процесс в системе отсчета S', движущейся относительно системы S прямолинейно и равномерно со скоростью $\mathbf{V}$. Согласно принципу относительности закон сохранения импульса справедлив также в системе S' и записывается в виде

$$m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2' = m\mathbf{v}'. \tag{16.2}$$

Ввиду полного равноправия инерциальных систем отсчета массы всех тел в системе S' такие же, какими они были в системе S. В нерелятивистской физике скорости $\mathbf{v}_1'$, $\mathbf{v}_2'$ и $\mathbf{v}'$ в системе S' связаны с соответствующими скоростями в системе S соотношениями

$$\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1 - \mathbf{V}, \quad \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - \mathbf{V}, \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}.$$

Поэтому (16.2) преобразуется в

$$m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{V}) + m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{V}) = m(\mathbf{v} - \mathbf{V}),$$

или на основании соотношения (16.1)

$$(m_1 + m_2)\mathbf{V} = m\mathbf{V}.$$

Отсюда ввиду произвольности $\mathbf{V}$

$$m = m_1 + m_2. \tag{16.3}$$

Масса составного тела, как мы и ожидали, *равна сумме масс составляющих тел. Это свойство называется аддитивностью массы.*

Доказательство может быть обобщено. Нет необходимости предполагать, что сталкиваются только два тела и что после столкновения они соединяются в одно тело. Можно взять, например, произвольную химическую реакцию, в которой реагирует несколько молекул или атомов, а в результате реакции получается несколько других молекул или атомов. Тогда, повторяя рассуждения, приведшие нас к соотношению (16.3), мы придем к более общему заключению, что *сумма масс веществ до реакции равна сумме масс веществ после реакции.* Это *закон сохранения вещества* или, точнее, *закон сохранения массы.* Масса пропорциональна весу. Поэтому этот закон называли также *законом сохранения веса.* Такое название применялось в старой литературе, но оно неудачно и теперь почти вышло из употребления. Однако Ломоносов (1711—1765) и Лавуазье (1743—1794), с именами которых обычно связывают утверждение в науке *закона сохранения вещества*, пришли к своему открытию на основании опытов по взвешиванию продуктов химических реакций. Поэтому то, что непосредственно доказали эти ученые, есть именно «закон сохранения веса».

2. Ньютон определил массу тела как *количество вещества,* содержащегося в нем. Такое определение бессодержательно, пока не указано, что следует понимать под «количеством вещества». Ньютон просто заменил термин «количество вещества» новым термином «масса», не дав ни одному из них точного определения. Однако с ньютоновским определением массы интуитивно связано представление об ее аддитивности. Если, например, две одинаковые гири с массами 1 кг каждая соединить в одну, то «интуитивно ясно», что получится гиря с массой 2 кг, ибо «количество вещества» в двух гирях вдвое больше, чем в одной из них. Интуиция является мощным источником научного творчества. Но в науке она не может служить доказательством. Доказательство должно основываться на точных определениях и законах природы. Точное определение понятия массы было дано в § 10. Если пользоваться только этим определением, то совсем не очевидно, что масса является величиной аддитивной. Необходимость доказательства этого свойства следует уже из того, что *аддитивность и закон сохранения массы вещества верны лишь приближенно.* В самом деле, этот закон мы получили как следствие галилеева принципа относительности. Но *галилеев принцип относительности не есть вполне точный закон природы — он является приближенным предельным случаем эйнштейновского принципа относительности.* Поэтому приведенное выше рассуждение должно быть пересмотрено — в основу его надо положить не галилеев, а эйнштейнов принцип относительности. Это будет сделано в т. IV при изложении теории относительности. Сейчас же мы ограничимся сообщением основного результата ввиду его фундаментального зна-

чения. *Закон сохранения массы в старом его понимании — сумма масс тел до реакции равна сумме масс тел после реакции — оказывается неверным. Законы сохранения массы и энергии, которые в дорелятивистской физике считались двумя независимыми точными законами природы, в релятивистской физике утратили свою независимость и были объединены в единый закон сохранения массы — энергии. Всякая энергия обладает массой, равной количеству энергии, деленному на квадрат скорости света в вакууме.* К такому заключению мы уже пришли в частном случае лучистой энергии (см. конец § 13). В балансе массы должна учитываться не только масса вещества, но и масса выделяющейся или поглощающейся энергии. Во всех процессах природы сумма массы вещества и энергии остается постоянной.

То обстоятельство, что в химических реакциях не было обнаружено изменение массы вещества, связано с их относительно очень малым энергетическим выходом. Изменение массы за счет выделения или поглощения энергии столь мало, что его обнаружение находится за пределами точности измерений. Так, при сгорании 12 г углерода с образованием углекислого газа CO_2 выделяется около 99 ккал тепла. В эргах величина равна $\varepsilon = 99 \cdot 4{,}19 \cdot 10^{10} \approx 4 \cdot 10^{12}$ эрг. По формуле (13.2) ей соответствует масса

$$\Delta m \approx \frac{4 \cdot 10^{12}}{9 \cdot 10^{20}} \approx 0{,}5 \cdot 10^{-8} \text{ г.}$$

Полная масса веществ, участвующих в реакциях, равна $m = 12 + 32 = 44$ г. Поэтому

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-8}}{44} \approx 10^{-10}.$$

Чтобы обнаружить взвешиванием изменение массы вещества при химических реакциях, необходима относительная точность измерений не менее 10^{-10}.

Энергетический выход ядерных реакций в миллионы раз больше, чем химических реакций. На ядерных реакциях соотношение между массой и энергией (13.2) подтверждено экспериментально. В ядерной физике и физике элементарных частиц это соотношение играет исключительную роль.

§ 17. О ЗАКОНАХ ТРЕНИЯ

1. В механике обычно имеют дело с силами всемирного тяготения, упругими силами и силами трения. Иногда в механику включаются также задачи на движение электрически заряженных частиц в электрических и магнитных полях. Тогда к указанным силам добавляются еще электромагнитные силы, т. е. силы, которым подвер-

жены заряженные частицы со стороны таких полей. Силы всемирного тяготения и упругие силы будут подробно рассмотрены в дальнейшем. Сейчас же мы кратко рассмотрим *силы трения.* Заметим при этом, что механика не занимается изучением физической природы действующих сил — эти вопросы рассматриваются в других разделах физики. Поэтому мы здесь совсем не будем затрагивать вопрос о происхождении сил трения, а ограничимся описанием эмпирически найденных *законов трения.* Понятно, что эти вопросы при всей их важности не имеют все же того фундаментального значения, каким характеризуются, например, законы Ньютона, а сами законы трения являются приближениями, часто довольно грубыми.

Упругие силы, силы всемирного тяготения, а также силы притяжения и отталкивания электрически заряженных тел зависят только от *конфигурации тел,* т. е. от их взаимного расположения, но не от их скоростей. Силы трения, помимо конфигурации, зависят еще *от относительных скоростей тел,* между которыми они действуют.

Силы трения могут действовать между соприкасающимися телами или их частями как при их относительном движении, так и при их относительном покое. Трение называется *внешним,* если оно действует между различными соприкасающимися телами, не образующими единого тела (например, трение между бруском и наклонной плоскостью, на которой он лежит или с которой он соскальзывает). Если же трение проявляется между различными частями одного и того же тела, например между различными слоями жидкости или газа, скорости которых непрерывно меняются от слоя к слою, то трение называется *внутренним.* Впрочем, разделение трения на внутреннее и внешнее носит условный характер. Если соприкасающиеся тела объединить в одну механическую систему, то трение, которое ранее рассматривалось как внешнее, становится внутренним. Трение, испытываемое твердым телом при движении в жидкости (или газе), есть внутреннее трение в жидкости, а не внешнее трение между жидкостью и твердым телом. Действительно, опыт показывает, что слои жидкости или газа, непосредственно примыкающие к поверхности тела, прилипают к ней и движутся вместе с телом, а трение возникает в окружающей среде между различными слоями ее, соприкасающимися друг с другом.

Трение между поверхностью твердого тела и окружающей его жидкой или газообразной средой, в которой оно движется, а также трение между различными слоями такой среды, называется *вязким.*

Трение между поверхностями двух соприкасающихся твердых тел при отсутствии между ними жидкой или газообразной прослойки (смазки) называется *сухим.* Применительно к этому случаю, когда соприкасающиеся тела движутся друг относительно друга, различают *трение скольжения* и *трение качения.*

2. Рассмотрим сначала законы сухого трения. Такое трение возникает не только при скольжении одного тела по поверхности другого, но и при всякой попытке вызвать такое скольжение. В последнем слу-

чае трение называется *трением покоя* или *трением сцепления.* Наличие трения покоя — характерная особенность сухого трения. В более общем смысле, безотносительно к тому, между какими телами возникает трение, оно называется *сухим,* если силы трения не исчезают при обращении в нуль относительных скоростей соприкасающихся тел. В противоположном случае трение называется *жидким.* Положим тяжелый брусок на поверхность горизонтального стола (рис. 27). В состоянии покоя вес бруска P уравновешен силой нормального давления f_n, с которой на брусок действует стол $(P = f_n)$. Приложим затем к бруску горизонтальную силу f, лежащую в вертикальной плоскости, проходящей через его центр масс, как можно ближе к поверхности стола, чтобы предотвратить опрокидывание бруска, когда он придет в движение. Опыт показывает, что если сила f не превосходит некоторой определенной величины f_0 $(f < f_0)$, то брусок не приходит в движение. Отсюда следует сделать вывод, что на брусок со стороны стола действует равная и противоположно направленная сила $f_{\text{тр}}$, уравновешивающая силу f. Это и есть сила трения, а именно трения покоя. Такая же сила трения, но в противоположном направлении, действует на поверхность стола со стороны бруска. Сила трения покоя автоматически принимает значения, равные внешней силе f. Максимальное значение силы трения покоя равно f_0.

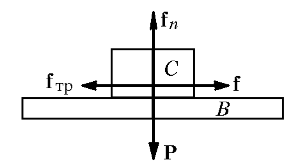


Рис. 27

Допустим теперь, что брусок скользит по поверхности стола со скоростью v. При равномерном движении действующая сила f по-прежнему уравновешивается силой $f_{\text{тр}}$. Если равновесия нет, то движение будет ускоренным. В обоих случаях сила трения $f_{\text{тр}}$, вообще говоря, зависит от скорости v. Характер этой зависимости графически изображен на схематическом рис. 28. Сила трения, приложенная к поверхности бруска, всегда действует против направления движения последнего. На графике это отражено тем, что знаки величин $f_{\text{тр}}$ и v всегда противоположны. При $v = 0$ график вырождается в отрезок вертикальной прямой. Этому соответствует тот факт, что сила трения покоя может принимать любое значение от $-f_0$ до $+f_0$. При увеличении модуля скорости модуль силы трения сначала убывает, проходит через минимум, а затем начинает возрастать. Вся кривая симметрична относительно начала координат $[f(+v) = -f(-v)]$. Как экспериментально установил Кулон, сила трения $f_{\text{тр}}$ не зависит от площади поверхности, вдоль которой тела

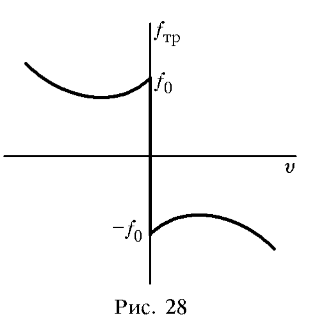


Рис. 28

соприкасаются, и пропорциональна силе нормального давления f_n, с которой одно тело действует на другое. Поэтому можно написать

$$f_{\text{тр}} = \mu f_n. \tag{17.1}$$

Постоянная μ называется *коэффициентом трения* и зависит от природы и состояния трущихся поверхностей. Если тело действительно скользит по поверхности другого тела, то μ называют *коэффициентом трения скольжения*. Если же тела покоятся друг относительно друга, то его называют *коэффициентом трения покоя*. В последнем случае предполагается, что в формуле $f_{\text{тр}}$ равно f_0, т. е. максимальному значению, которое может принимать сила трения покоя. В соответствии с рис. 28 коэффициент трения μ, вообще говоря, зависит от скорости v. Впрочем, как также установил Кулон, эта зависимость, как правило, выражена слабо, так что, когда не требуется большая точность, коэффициент μ можно считать не зависящим от скорости. Тогда кривая рис. 28 вырождается в кривую рис. 29. Сила трения и в этом идеализированном случае зависит от скорости v, поскольку при переходе скорости через нуль она меняет знак, а при $v = 0$ становится неопределенной. Во всех задачах на силы трения, приводимых в конце этого параграфа, предполагается, что μ не зависит от v.

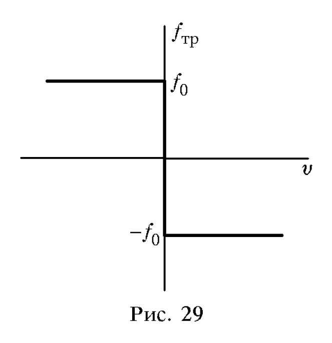


Рис. 29

Независимость силы трения покоя от площади соприкосновения тел можно демонстрировать с помощью следующего опыта. Брусок (например, кирпич), имеющий силу прямоугольного параллелепипеда, кладется различными гранями на наклонную плоскость. Увеличивая угол наклона наклонной плоскости, на опыте убеждаемся, что скольжение начинается при одном и том же угле, независимо от того, какой гранью брусок был положен на наклонную плоскость.

3. При наличии сухого трения тело может находиться в состоянии покоя, даже если на него подействовать какой-либо силой. Если приложенная сила f не превосходит максимального значения f_0 силы трения покоя, то тело не придет в движение. С этой особенностью сухого трения связано так называемое *явление застоя*. Допустим, например, что тело A, лежащее на поверхности горизонтального стола, находится в равновесии, когда обе прикрепленные к нему пружины не растянуты одинаково (рис. 30). В этом положении сила, действующая на тело A, равна нулю. Сместим тело A из положения равновесия в ту или другую сторону. Если сила f, действующая со стороны растянутых пружин, не превосходит f_0, то тело

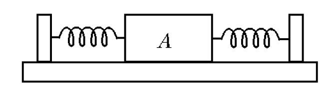


Рис. 30

A и в новом положении останется в равновесии. На поверхности стола не существует определенного положения равновесия тела. Напротив, существует область, при смещении в пределах которой тело остается в равновесии. Эта область называется *областью застоя.* Сухое трение, действующее, например, в подшипниках измерительных приборов со стрелками, ограничивает чувствительность таких приборов. Наличие же области застоя делает неопределенным положение равновесия, в котором устанавливается стрелка при измерениях, т. е. ограничивает точность измерения.

4. Во многих случаях силы трения оказываются полезными. Так, автомобиль приводится в движение силами трения, действующими между шинами колес и полотном дороги. Силы трения приводят в движение поезда. Силы трения, возникающие между приводным ремнем и шкивами, осуществляют передачу движения от одного маховика к другому. Подобных примеров можно привести неограничено много. Но сплошь и рядом силы трения являются вредными. Таковы, например, силы трения, возникающие между осью и втулкой, а также между другими деталями машины. Они приводя к преждевременному износу машин, и с ними приходится бороться. Для этой цели применяется *смазка.* Однако более радикальным способом уменьшения силы трения является замена трения скольжения *трением качения* (шарикоподшипники). Под трением качения понимают трение, возникающее, например, между шарообразным или цилиндрическим телом, катящимся без скольжения по плоской или изогнутой поверхности. Трение качения формально подчиняется тем же законам, что и трение скольжения. Однако коэффициент трения при качении значительно меньше, чем при скольжении. Наиболее радикальным способом уменьшения силы трения, который за последнее время начинает получать все большее и большее распространение, является создание «воздушной подушки» между соприкасающимися поверхностями.

5. Как уже говорилось выше, в отличие от сил сухого трения силы жидкого или вязкого трения обращаются в нуль вместе с относительными скоростями между соприкасающимися слоями среды. Более подробно вопрос о вязком трении будет разобран в механике жидкостей и газов, а также в кинетической теории газов. Здесь же мы очень кратко рассмотрим только силы жидкого трения, возникающие при движении твердого тела в жидкой или газообразной среде. Помимо сил, обусловленных собственно внутренним трением, на поверхность движущегося тела со стороны среды действуют также силы нормального давления. Результирующая этих нормальных давлений имеет составляющую, направленную против движения тела. Такая составляющая называется *силой сопротивления среды.* При больших скоростях она во много раз превосходит силы сопротивления, обусловленные собственно вязким трением. При рассмотрении движения тела в вязкой среде эти две силы целесообразно объединить вместе. Такую суммарную силу, направленную против

скорости движущегося тела, условно будем называть также *силой трения* и обозначать символом $\mathbf{f}_{тр}$.

При малых скоростях сила $\mathbf{f}_{тр}$ пропорциональна первой степени скорости тела:

$$\mathbf{f}_{тр} = -k_1\mathbf{v}. \tag{17.2}$$

При возрастании скорости зависимость становится более сложной, а затем сила трения начинает возрастать приблизительно пропорционально квадрату скорости:

$$\mathbf{f}_{тр} = -k_2 v^2 \frac{\mathbf{v}}{v} = -k_2 v\mathbf{v}. \tag{17.3}$$

Коэффициенты k_1 и k_2, а также область скоростей, в которой осуществляется переход от линейного закона (17.2) к квадратичному (17.3), в сильной степени зависят от формы и размеров тела, направления его движения, состояния поверхности тела и от свойств окружающей среды. Искусственно увеличивая поверхность тела и придавая ей надлежащую форму, можно сильно увеличить значения коэффициентов k_1 и k_2. На этом основано устройство и действие парашюта (см. задачу 8 к этому параграфу).

ЗАДАЧИ

1. Удобный метод измерения коэффициента трения покоя состоит в следующем. Тело кладется на наклонную плоскость. Измеряется минимальный угол наклона плоскости α, при котором начинается скольжение. Найти связь между углом α и коэффициентом трения μ.

Ответ: $\mu = \operatorname{tg}\alpha$.

2. Человек может, хотя и медленно, привести в движение тяжелую баржу на воде, если он будет тянуть за канат, привязанный к ней. Но он не в состоянии сделать это с тяжелым телом, лежащим на земле, если даже вес этого тела заметно меньше веса баржи. Почему?

3. Положите стержень в горизонтальном положении на указательные пальцы ваших рук. Вначале пальцы должны быть разведены, а стержень должен лежать на них своими концами. Затем приближайте пальцы друг к другу. Около какой точки стержня они сойдутся? После этого пальцы снова разведите так, чтобы стержень все время лежал на них в горизонтальном положении. В каком месте будет находиться один из пальцев, когда другой достигнет конца стержня? Произведите этот опыт и объясните наблюдаемые явления.

4. Шофер, едущий на автомобиле по горизонтальной площади в тумане, внезапно заметил недалеко впереди себя стену, перпендикулярную к направлению движения. Что выгоднее: затормозить или повернуть в сторону, чтобы предотвратить аварию?

Ответ. Затормозить.

5. Автомобиль движется «равномерно» вдоль извилистой горизонтальной дороги. Принимая дорогу за синусоиду, найти максимальную скорость, которую может развить автомобиль, чтобы не было заноса.

Решение. Если автомобиль движется по криволинейной траектории «равномерно», то его ускорение a будет только нормальным. Это ускорение создается силой трения покоя между колесами автомобиля и полотном дороги: $f_{\text{тр}} = ma$. Если скорость автомобиля превзойдет определенный предел, то для удержания автомобиля на требуемой траектории, где кривизна ее велика, максимальной силы трения f_0 будет недостаточно ($f_0 < ma$). Автомобиль начнет скользить в направлении нормали к траектории. При этом в соответствии с графиком рис. 28 сила трения скольжения уменьшится, что приведет к дальнейшему боковому смещению автомобиля с траектории. В этом и состоит явление заноса. При движении по синусоиде нормальное ускорение максимально в ее вершинах, где кривизна кривой максимальна. Если $y = y(x)$ — уравнение синусоиды, то в вершинах $y' = 0$, и радиус кривизны в этих точках можно вычислить по формуле $1/R = |y''|$. Имея все это в виду и записав уравнение синусоиды $y = A\sin\frac{2\pi x}{l}$ (амплитуда A и пространственный период l постоянны), нетрудно получить условие, при котором заноса не будет:

$$v < \frac{l}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu g}{A}},$$

где μ — коэффициент трения, g — ускорение свободного падения.

6. Решить ту же задачу, предполагая, что автомобиль движется равномерно по эллипсу с полуосями A и B. В каких точках траектории нормальное ускорение автомобиля достигает максимального и минимального значений? Найти эти значения.

Ответ. $a_{\text{макс}} = \frac{Av^2}{B^2}$, $a_{\text{мин}} = \frac{Bv^2}{A^2}$. Заноса не будет при условии $v < B\sqrt{\frac{\mu g}{A}}$.

7. Предполагая, что обе пружины на рис. 30 одинаковы, найти для тела A размеры области застоя.

Ответ. Центр основания тела A может находиться в равновесии в любой точке в пределах области

$$-\frac{\mu P}{2k} < x < +\frac{\mu P}{2k},$$

где P — вес тела, μ — коэффициент трения, k — жесткость пружины (одной). За начало координат принят центр области застоя.

8. Парашютист совершает затяжной прыжок. Считая массу парашютиста m равной 70 кг, найти установившиеся скорости его падения без парашюта и с раскрытым парашютом. Для человеческого тела при падении без парашюта коэффициент $k_2 = 2$ г/см. При раскрытом парашюте этот коэффициент возрастает примерно в 100 раз, т. е. составляет приблизительно 200 г/см.

Решение. Установившаяся скорость падения найдется из условия, чтобы вес человека $P = mg$ уравновешивался силой трения. Это дает

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k_2}} \approx \begin{cases} 60 \text{ м/с без парашюта;} \\ 6 \text{ м/с с раскрытым парашютом.} \end{cases}$$

ГЛАВА III

НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ И ПРИМЕНЕНИЯ ЗАКОНОВ НЬЮТОНА

§ 18. ИМПУЛЬС СИЛЫ И ИЗМЕНЕНИЕ ИМПУЛЬСА

1. Как было показано в § 12, производная импульса $\mathbf{p}$ системы материальных точек по времени определяется уравнением

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}^{(e)}, \tag{18.1}$$

где $\mathbf{F}^{(e)}$ — геометрическая сумма всех внешних сил, действующих на систему. Внутренние силы не входят в это уравнение из-за третьего закона Ньютона. В случае одной материальной точки уравнение (18.1) переходит в уравнение, выражающее второй закон Ньютона. Допустим, что сила $\mathbf{F}^{(e)}$ постоянна. Тогда из уравнения (18.1) следует

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \mathbf{F}^{(e)}(t - t_0), \tag{18.2}$$

где векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}_0$ означают импульсы системы в моменты времени t и t_0 соответственно.

Произведение постоянной силы $\mathbf{F}^{(e)}$ на время ее действия называется *импульсом силы* за то же время. Это понятие нельзя смешивать с ранее введенной величиной $\mathbf{p} = m_1\mathbf{v}_1 + \ldots + m_n\mathbf{v}_n$, которая называется *импульсом системы материальных точек* или *импульсом тела.* Недоразумений возникнуть не может, так как слово «импульс» отдельно нигде встречаться не будет. Оно будет входить в комбинации либо со словом «сила», либо со словом «тело» (или «материальная точка» и «система материальных точек»). Поэтому всякий раз будет ясно, о каком импульсе идет речь. Впрочем, понятие импульса силы будет встречаться сравнительно редко.

2. Соотношение (18.2) означает, что приращение импульса тела или системы тел равно импульсу геометрической суммы всех внешних сил, действующих на систему. Этот результат получен нами в предположении, что сила $\mathbf{F}^{(e)}$ постоянна. Он может быть обобщен и на тот случай, когда эта сила меняется во времени.

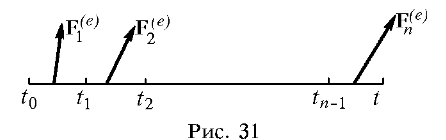


Рис. 31

Разделим промежуток времени $t - t_0$ на более мелкие промежутки $(t_1 - t_0)$, $(t_2 - t_1)$, ..., $(t - t_{n-1})$ (рис. 31). Выберем эти промежутки

настолько малыми, чтобы на каждом из них силу $\mathbf{F}^{(e)}$ без большой ошибки можно было считать приблизительно постоянной. Соответствующие значения силы $\mathbf{F}^{(e)}$ на таких промежутках обозначим через $\mathbf{F}_1^{(e)}, \ldots, \mathbf{F}_n^{(e)}$. Тогда на основании соотношения (18.2) можно написать приближенно

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 = \mathbf{F}_1^{(e)}(t_1 - t_0),$$

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \mathbf{F}_2^{(e)}(t_2 - t_1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_{n-1} = \mathbf{F}_n^{(e)}(t - t_{n-1}),$$

где $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_{n-1}$ — импульсы системы в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ соответственно. Складывая эти равенства, получим

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} \Delta t_i,$$

где использовано стандартное обозначение $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Последнее равенство является приближенным и не совсем определенным, поскольку значения внешней силы $\mathbf{F}_1^{(e)}, \mathbf{F}_2^{(e)}, \ldots, \mathbf{F}_n^{(e)}$ не фиксированы точно. Однако эта неопределенность устраняется и указанное равенство переходит в точное соотношение, если перейти к пределу, устремляя к нулю наибольший из промежутков времени Δt_i при неизменной длине временного интервала $t - t_0$. В результате такого предельного перехода получится

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} \Delta t_i.$$

Как известно, предел, стоящий в правой части этого равенства, называется определенным интегралом функции $\mathbf{F}^{(e)}(t)$ в пределах от t_0 до t:

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}^{(e)}(\tau)\, d\tau \equiv \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} \Delta t_i.$$

Аргумент функции $\mathbf{F}^{(e)}$, по которому производится интегрирование, обозначен через τ, чтобы не смешивать его с верхним пределом интеграла t. Величина τ называется *переменной интегрирования*. Значение определенного интеграла при заданной подынтегральной функции определяется только значениями пределов интегрирования t_0 и t.

Таким образом, обобщением соотношения (18.2) является формула

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}^{(e)}(\tau)\, d\tau. \qquad (18.3)$$

Интеграл, стоящий в правой части этого равенства называется *импульсом силы* $\mathbf{F}^{(e)}$ *за время от* t_0 *до* t. Следовательно, и в случае силы, меняющейся во времени, *приращение импульса системы материальных точек равно импульсу геометрической суммы всех действующих на нее внешних сил.* Внутренние силы, как уже подчеркивалось выше, не влияют на изменение полного импульса системы, поскольку они всегда входят попарно и удовлетворяют принципу равенства действия и противодействия.

3. Импульс, приобретаемый телом, зависит, таким образом, не только от силы, но и от продолжительности ее действия. Иллюстрацией этого может служить следующий простой опыт. Тяжелая гиря (рис. 32) подвешена на нити, снизу к ней прикреплена такая же нить. Если медленно тянуть за нижнюю нить, то рвется верхняя нить. Причина ясна. Так как гиря практически все время находится в покое, разность натяжений нити $T_1 - T_2$ должна уравновешивать вес груза P: $T_1 - T_2 = P$. Отсюда следует $T_1 > T_2$. Обозначим символом T_0 максимальное натяжение, которое может выдержать нить, не разрываясь. Когда мы медленно тянем за нижнюю нить, то в некоторый момент времени натяжение T_1 достигает предельной величины T_0. В этот момент натяжение нижней нити T_2 еще меньше T_0. Поэтому нижняя нить остается целой, а верхняя рвется. Однако если быстро дернуть за нижнюю нить, то верхняя нить остается целой, а нижняя рвется. Дело в том, что для разрыва верхней нити ее необходимо растянуть на определенную длину. А для этого надо привести в движение гирю. Чтобы сообщить гире необходимое смещение, требуется конечное время, даже когда на нее действует большая сила. Быстро дергая за нижнюю нить, мы не успеваем сообщить гире достаточное смещение. В нижней нити возникает натяжение, превосходящее предельное T_0, в то время как верхняя нить еще не успевает растянуться, и ее натяжение практически остается неизменным. Поэтому и рвется нижняя нить.

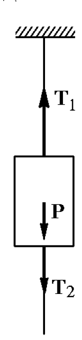


Рис. 32

Опишем второй опыт, иллюстрирующий влияние продолжительности действия силы. Из ватманской бумаги вырезаются два одинаковых кольца с наружным диаметром около 20 см и внутренним диаметром около 15 см. Кольца подвешиваются на двух горизонтальных металлических стержнях, зажатых в штативах. В кольца вставляется четырехугольная сосновая планка длиной 1 м с поперечным сечением 2—3 см^2. Расстояние между бумажными кольцами должно быть лишь немного меньше длины планки. Если плавно нажимать на середину планки, то одно из бумажных колец (или оба вместе), рвется, а планка остается целой. Нанесем теперь по середине планки резкий сильный удар тяжелым металлическим стерж-

нем. Планка ломается, а кольца остаются целыми. Поразительным в этом опыте является не то, что ломается планка, — она переломилась бы и при отсутствии колец, а то, что остаются целыми бумажные кольца.

§ 19. ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

В нерелятивистской механике, ввиду независимости массы от скорости, импульс системы $\mathbf{p} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \ldots$ может быть выражен через скорость ее *центра масс*. *Центром масс* или *центром инерции системы* называется такая воображаемая точка, радиус-вектор $\mathbf{R}$ которой выражается через радиусы-векторы $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots$ материальных точек по формуле

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots}{m}, \tag{19.1}$$

где $m = m_1 + m_2 + \ldots$ — общая масса всей системы. Эту точку мы обычно будем обозначать буквой C.

Если продифференцировать выражение (19.1) по времени и умножить на m, то получится

$$m\dot{\mathbf{R}} = m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 + \ldots,$$

или

$$m\mathbf{V} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \ldots,$$

где $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$ — скорость центра масс системы. Таким образом,

$$\mathbf{p} = m\mathbf{V}. \tag{19.2}$$

Подставив это выражение в формулу (18.1), получим

$$m\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}^{(e)}. \tag{19.3}$$

Отсюда следует, что *центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна суммарной массе всей системы, а действующая сила — геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему.* Этот результат называется *теоремой о движении центра масс.*

Примером может служить движение снаряда по параболе в безвоздушном пространстве. Если в какой-либо момент времени снаряд разорвется на мелкие осколки, то эти осколки под действием внутренних сил будут разлетаться в разные стороны. Однако центр масс осколков и газов, образовавшихся при взрыве, будет продолжать свое движение по параболической траектории, как если бы никакого взрыва не было.

Центр масс системы совпадает с ее *центром тяжести,* т. е. с точкой приложения параллельных сил, действующих на матери-

альные точки системы в однородном поле тяжести. Поэтому вместо терминов «центр масс» и «центр инерции» употребляют также термин «центр тяжести». Однако в теореме о движении центра масс термином «центр тяжести» лучше не пользоваться, так как к этой теореме тяжесть не имеет прямого отношения. Термин «центр тяжести» распространен в курсах теоретической механики, особенно старых. В физике этот термин практически вышел из употребления.

Если система замкнута, то $\mathbf{F}^{(e)} = 0$. В этом случае уравнение (19.3) переходит в $\frac{d\mathbf{V}}{dt} = 0$, из которого следует $\mathbf{V} = \text{const}$. Центр масс замкнутой системы движется прямолинейно и равномерно.

ЗАДАЧИ

1. На дне маленькой запаянной пробирки, подвешенной над столом на нити, сидит муха, масса которой равна массе пробирки, а расстояние от дна до поверхности стола равно длине пробирки l. Нить пережигают, и за время падения муха перелетает со дна в самый верхний конец пробирки. Определить время, по истечении которого нижний конец пробирки стукнется о стол.

Ответ. $t = \sqrt{l/g}$.

2. Металлическое кольцо, подвешенное на нити к оси центробежной машины, как указано на рис. 33, равномерно вращается с угловой скоростью ω настолько быстро, что его плоскость вращения практически горизонтальна. Нить составляет угол α с осью. Найти расстояние от центра кольца до оси вращения.

Ответ. $x = \frac{g \operatorname{tg} \alpha}{\omega^2}$.

3. Однородный стержень длины l равномерно вращается вокруг свободной оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его центр. Какова должна быть угловая скорость вращения ω, при которой стержень еще не разрывается под действием внутренних напряжений, возникающих в нем

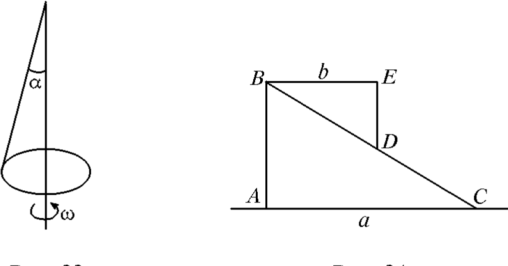


Рис. 33 Рис. 34

при вращении? Максимальная сила натяжения, отнесенная к единице площади поперечного сечения стержня, равна T. Объемная плотность материала стержня равна ρ (см. также § 75, задача 4).

Ответ. $\rho l^2 \omega^2 < 8T$.

4. На прямоугольный трехгранный клин ABC массы M, лежащий на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости, положен подобный же, но меньший клин BED массы m (рис. 34). Определить, на какое расстояние x сместится влево большой клин, когда малый клин соскользнет вниз и займет такое положение, что точка D совместится с C. Длины катетов AC и BE равны соответственно a и b.

Ответ. $x = \dfrac{m}{M+m}(a-b)$.

§ 20. ПРИВЕДЕННАЯ МАССА

1. Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двух взаимодействующих материальных точек с массами m_1 и m_2 (рис. 35). Уравнения движения этих точек можно записать в виде

$$\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{\mathbf{F}_1}{m_1}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = \frac{\mathbf{F}_2}{m_2}, \tag{20.1}$$

причем по третьему закону Ньютона $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$. Вычитая из одного уравнения другое, находим

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \frac{\mathbf{F}_2}{m_2} - \frac{\mathbf{F}_1}{m_1} = \mathbf{F}_2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right).$$

Это уравнение описывает движение одной материальной точки относительно другой, так как разность $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ есть радиус-вектор, проведенный от первой точки ко второй. Он однозначно определяет положение второй точки относительно первой. Введем обозначение

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad \text{или} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{20.2}$$

Тогда предыдущее уравнение перейдет в следующее:

$$\mu \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}_2. \tag{20.3}$$

Это уравнение формально аналогично второму закону Ньютона. Роль силы играет сила $\mathbf{F}_2$, действующая на вторую материальную точку, а роль массы — вспомогательная величина μ, называемая *приведенной массой*.

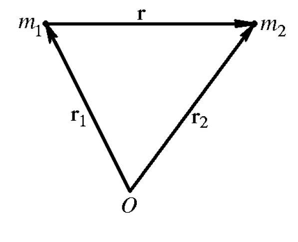


Рис. 35

Разумеется, одно уравнение (20.3) не может быть эквивалентно двум исходным уравнением (20.1). Однако такая эквивалентность может быть достигнута, если к уравнению (20.3) присоединить уравнение, выражающее теорему о движении центра масс системы. Последняя в рассматриваемом случае сводится к утверждению, что центр масс системы движется

прямолинейно и равномерно. Тем самым задача о движении двух материальных точек распадается на две независимые задачи: 1) определение равномерного движения центра масс; 2) определение относительного движения одной материальной точки относительно другой. Вторая задача формально сводится к задаче о движении одной материальной точки с массой μ в силовом поле другой точки. Этим и оправдывается введение понятия приведенной массы. Никакого глубокого физического смысла приведенная масса не имеет. На нее надо смотреть только как на целесообразное обозначение.

2. Рассмотрим пример, поясняющий пользу введения понятия приведенной массы. Пусть планета обращается вокруг Солнца по окружности радиуса r. Действующая на нее сила по закону всемирного тяготения равна $F = G\frac{Mm}{r^2}$, где M — масса Солнца, m — масса планеты, G — гравитационная постоянная. Так как сила направлена к Солнцу, то в векторной форме $\mathbf{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} = -G\frac{Mm}{r^3}r$. Вводя приведенную массу, запишем уравнение движения планеты относительно Солнца:

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} \equiv \frac{Mm}{M+m}\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} = -G\frac{Mm}{r^3}\mathbf{r}.$$

Отсюда

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G\frac{M+m}{r^3}\mathbf{r}.$$

Так как вращение планеты по орбите равномерно, то $\ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2\mathbf{r}$, а потому

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = G\frac{M+m}{r^3},$$

где ω — угловая скорость, а T — период обращения планеты. Если масса планеты пренебрежимо мала по сравнению с массой Солнца, то для угловой скорости ω_1 и периода обращения T_1 получаем

$$\omega_1^2 = \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 = G\frac{M}{r^3}.$$

Если бы масса планеты была бы равна массе Солнца (двойная звезда), то для угловой скорости ω_2 и периода обращения T_2 мы получили бы

$$\omega_2^2 = \left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 = G\frac{2M}{r^3}.$$

При одном и том же расстоянии r

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = 2.$$

Период обращения во втором случае меньше, чем в первом, в $\sqrt{2}$ раз.

§ 21. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ. РЕАКТИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ

1. Термин *«переменная масса»* употребляется в этом параграфе в совершенно ином смысле, чем в теории относительности. В теории относительности масса движущегося тела изменяется за счет изменения его скорости, причем никакого вещества во время движения тело не получает и не теряет. Напротив, в настоящем параграфе говорится о медленном движении тел, масса которых меняется за счет *потери* или *приобретения вещества.* Например, масса автомобиля для поливки улиц уменьшается за счет вытекающих водяных струй; дождевая капля растет при падении в воздухе, пересыщенном водяными парами; масса ракеты или реактивного самолета уменьшается за счет истечения газов, образующихся при сгорании топлива. В таких случаях говорят о движении тел с переменной массой. Уравнения движения тел с переменной массой не содержат ничего принципиально нового по сравнению с законами Ньютона, а являются их следствиями. Тем не менее они представляют большой интерес, главным образом в связи с ракетной техникой.

2. Выведем уравнение движения материальной точки с переменной массой на примере движения ракеты. Принцип действия ракеты очень прост. Ракета с большой скоростью выбрасывает вещество (газы), воздействуя на него с большой силой. Выбрасываемое вещество с той же, но противоположно направленной силой в свою очередь действует на ракету и сообщает ей ускорение в противоположном направлении. Если нет внешних сил, то ракета вместе с выброшенным веществом является замкнутой системой. Импульс такой системы не может меняться во времени. На этом положении и основана теория движения ракет. Целесообразно, однако, обобщить задачу, предположив, что на ракету действуют внешние силы. Такими силами могут быть сила земной тяжести, гравитационное притяжение Солнца и планет, а также сила сопротивления среды, в которой движется ракета.

Пусть $m(t)$ — масса ракеты в произвольный момент времени t, а $\mathbf{v}(t)$ — ее скорость в тот же момент. Импульс ракеты в этот момент времени будет $m\mathbf{v}$. Спустя время dt масса и скорость ракеты получат приращения dm и $d\mathbf{v}$ (величина dm отрицательна!). Импульс ракеты станет равным $(m + dm) \times (\mathbf{v} + d\mathbf{v})$. Сюда надо добавить импульс движения газов, образовавшихся за время dt. Он равен $dm_{\text{газ}}\mathbf{v}_{\text{газ}}$, где $dm_{\text{газ}}$ — масса газов, образовавшихся за время dt, а $\mathbf{v}_{\text{газ}}$ — их скорость. Вычитая из суммарного импульса системы в момент $t + dt$ импульс системы в момент t, найдем приращение этой величины за время dt. Согласно известной теореме это приращение равно $\mathbf{F}\,dt$, где $\mathbf{F}$ — геометрическая сумма всех внешних сил, действующих на ракету. Таким образом,

$$(m + dm)\,(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + dm_{\text{газ}}\mathbf{v}_{\text{газ}} - m\mathbf{v} = \mathbf{F}\,dt.$$

Время dt, а с ним и приращения dm и $d\mathbf{v}$ мы должны устремить к нулю — нас интересуют предельные решения, или производные $\frac{dm}{dt}$ и $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$. Поэтому, раскрывая скобки, можно отбросить произведение $dm \cdot d\mathbf{v}$, как бесконечно малую высшего порядка. Далее, ввиду сохранения массы, $dm + dm_{\text{газ}} = 0$. Пользуясь этим, можно исключить массу газов $dm_{\text{газ}}$. Наконец, разность $\mathbf{v}_{\text{отн}} = \mathbf{v}_{\text{газ}} - \mathbf{v}$ есть скорость истечения газов относительно ракеты. Мы будем называть ее *скоростью газовой струи.* С учетом этих замечаний предыдущее соотношение легко преобразуется к виду

$$m\,d\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{отн}}\,dm + \mathbf{F}\,dt. \tag{21.1}$$

Отсюда делением на dt получаем

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v}_{\text{отн}}\frac{dm}{dt} + \mathbf{F}. \tag{21.2}$$

По форме уравнение (21.2) совпадает с уравнением, выражающим второй закон Ньютона. Однако масса тела m здесь не постоянна, а меняется во времени из-за потери вещества. К внешней силе $\mathbf{F}$ добавляется дополнительный член $\mathbf{v}_{\text{отн}}\frac{dm}{dt}$, который может быть истолкован как *реактивная сила,* т. е. сила, с которой действуют на ракету вытекающие из нее газы. Уравнение (21.2) впервые было получено русским механиком И. В. Мещерским (1859—1935). Оно, так же как и эквивалентное ему уравнение (21.1), называется *уравнением Мещерского или уравнением движения точки с переменной массой.*

3. Применим уравнение (21.1) к движению ракеты, на которую не действуют никакие внешние силы. Полагая $\mathbf{F} = 0$, получим

$$m\,d\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{отн}}\,dm.$$

Допустим, что ракета движется прямолинейно в направлении, противоположном скорости газовой струи $\mathbf{v}_{\text{отн}}$. Если направление полета принять за положительное, то проекция вектора $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ на это направление будет отрицательной и равной — $v_{\text{отн}}$. Поэтому в скалярной форме предыдущее уравнение можно записать так: $m\,dv = -v_{\text{отн}}\,dm$, причем в соответствии с принятыми обозначениями величина $v_{\text{отн}}$ существенно положительна. Следовательно,

$$\frac{dv}{dm} = -\frac{v_{\text{отн}}}{m}. \tag{21.3}$$

Скорость газовой струи $v_{\text{отн}}$ может меняться во время полета. Однако простейшим и наиболее важным является случай, когда она постоянна. Предположение о постоянстве $v_{\text{отн}}$, очевидно, не затрагивает основные черты явления, но сильно облегчает решение уравнения (21.3). В этом случае

$$v = -v_{\text{отн}}\int\frac{dm}{m} = -v_{\text{отн}}\ln m + C.$$

Значение постоянной интегрирования C определяется начальными условиями. Допустим, что в начальный момент времени скорость ракеты равна нулю, а ее масса равна m_0. Тогда предыдущее уравнение дает $0 = -v_{\text{отн}} \ln m_0 + C$, откуда $C = v_{\text{отн}} \ln m_0$. Следовательно,

$$v = v_{\text{отн}} \ln \frac{m_0}{m}, \tag{21.4}$$

или

$$\frac{m_0}{m} = e^{v/v_{\text{отн}}}. \tag{21.5}$$

Последнее соотношение называется *формулой Циолковского* (по имени советского ученого К. Э. Циолковского (1857—1935)). Она получена нами для нерелятивистских движений, т. е. для тех случаев, когда обе скорости v и $v_{\text{отн}}$ малы по сравнению со скоростью света в вакууме c. Но ее можно обобщить на случай релятивистских движений. Если m_0 и m означают массы покоя ракеты в соответствующие моменты времени, то без вычислений ясно, что формула (21.5) дает заниженное значение для отношения m_0/m. Действительно, релятивистская масса возрастает со скоростью. Ввиду этого при одном и том расходе топлива «релятивистская» ракета достигнет меньшей скорости, чем получается по нерелятивистской формуле (21.5).

Релятивистская формула имеет вид

$$\frac{m_0}{m} = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{c/2v_{\text{отн}}} \tag{21.6}$$

(см. задачу 2 к § 22). Здесь $\beta \equiv v/c$. При $\beta \ll 1$ и $v_{\text{отн}}/c \ll 1$ формула (21.6) переходит в формулу Циолковского. Действительно, в этом случае

$$\frac{1+\beta}{1-\beta} \approx 1 + 2\beta$$

и, следовательно

$$\frac{m_0}{m} \approx \left(1 + 2\beta\right)^{\frac{c}{2v}\frac{v}{v_{\text{отн}}}} = \left(1 + 2\beta\right)^{\frac{1}{2\beta}\frac{v}{v_{\text{отн}}}}.$$

Так как величина 2β мала, то

$$(1 + 2\beta)^{1/2\beta} \approx \lim_{\beta\to 0} (1 + 2\beta)^{1/2\beta} = e.$$

В результате в предельном случае медленных движений получаем

$$\frac{m_0}{m} = e^{v/v_{\text{отн}}},$$

т. е. формулу Циолковского.

4. Формула Циолковского позволяет рассчитать запас топлива, необходимый для сообщения ракете определенной скорости v. В табл. 1 приведены отношения начальной массы ракеты m_0 к ее конечной массе m при различных значениях отношения $v/v_{\text{отн}}$. Вычисления выполнены с помощью нерелятивистской формулы (21.5).

Допустим, например, что ракете надо сообщить *первую космическую скорость,* т. е. такую скорость, чтобы она начала двигаться вокруг Земли по окружности. Эта скорость $v \approx 8$ км/с. При скорости газовой струи $v_{\text{отн}} = 1$ км/с отношение масс $m_0/m = 2980$. Практически вся масса ракеты приходится на топливо. При $v_{\text{отн}} = 2$ км/с отношение $m_0/m = 54{,}6$, при $v_{\text{отн}} = 4$ км/с $m_0/m = 7{,}39$ и т. д. Отсюда видно, что относительная полезная масса ракеты очень быстро увеличивается с увеличением скорости газовой струи $v_{\text{отн}}$. Газы, выходящие из ракеты, должны иметь возможно меньшую молекулярную массу и быть нагреты до возможно более высокой температуры. Действительно, в молекулярной физике будет показано, что скорость газовой струи $v_{\text{отн}}$ пропорциональна $\sqrt{T/\mu}$, где T — абсолютная температура газа, а μ — его молекулярная масса.

Таблица 1

$v/v_{\text{отн}}$	m_0/m	$v/v_{\text{отн}}$	m_0/m	$v/v_{\text{отн}}$	m_0/m	$v/v_{\text{отн}}$	m_0/m
1	2,72	4	54,6	7	1100	10	22 000
2	7,39	5	148	8	2980	11	59 900
3	20,1	6	403	9	8100	12	163 000

В современных ракетах на химическом топливе скорость газовой струи порядка одного или нескольких километров в секунду. Вероятно, она не превосходит 4 км/с. Имея это в виду, оценим перспективы межпланетных и межзвездных полетов ракет на химическом топливе. Минимальная скорость, которую необходимо сообщить ракете относительно Земли, чтобы она вышла за пределы действия поля земного тяготения, называется *второй космической скоростью* и составляет 11,2 км/с. Практически такую скорость необходимо сообщить ракете, например, при отправке ее на Луну. Скорость ракеты, которую она должна приобрести относительно Земли, чтобы навсегда покинуть пределы Солнечной системы, называется *третьей космической скоростью.* Третья космическая скорость зависит от направления начальной скорости ракеты. Минимальное ее значение соответствует запуску ракеты по касательной к земной орбите в направлении орбитального вращения Земли. Эта скорость составляет около 16,7 км/с (см. § 61). Скорости такого порядка необходимы при межпланетных путешествиях. Допустим, что $v_{\text{отн}} = 4$ км/с. Тогда для достижения второй космической скорости отношение m_0/m должно составлять $m_0/m = e^{11,2/4} \approx 17$, а для достижения третьей $m_0/m = e^{16,7/4} \approx 64$. Оба отношения не очень велики. Однако надо принимать во внимание, что ракета должна иметь запас топлива для обратного возвращения на Землю, а также для ее торможения при посадке и для коррекции траектории. Поэтому отношение m_0/m (m — масса ракеты, вернувшейся обратно на Землю) должно быть значительно больше. Допустим, например, что поле тяготения и размеры второй планеты такие же, как у Земли. Тогда

при путешествии в прямом направлении в нашем примере должно быть $m_0/m' \approx 60$ (m' — масса ракеты, достигшей второй планеты). При обратном путешествии $m'/m \approx 60$, так что $m_0/m \approx 3600$. Таким образом, для осуществления межпланетных полетов запас топлива должен превышать массу космического корабля по меньшей мере в несколько тысяч раз. Технические трудности очень велики, но, по-видимому, все же преодолимы.

Но для межзвездных полетов ракеты на химическом топливе абсолютно непригодны. Возьмем, например, $v_{\text{отн}} = 10$ км/с, что для ракет на химическом топливе, по-видимому, превышает пределы возможного. (Если допустить, что газовая струя состоит из наиболее легкого вещества — атомарного водорода, то для достижения таких скоростей потребуется температура порядка 5000 °C.) Расстояния до звезд измеряются *световыми годами* — от ближайшей звезды свет идет до Земли около 4 лет. Поэтому для достижения даже ближайших звезд нужны космические корабли, скорости которых близки к скорости света c. В табл. 2 приведены значения отношения m/m_0 при различных значениях β, вычисленные по релятивистской формуле (21.6) и по формуле Циолковского (21.5) в предположении, что $v_{\text{отн}} = 10$ км/с. Таблица, между прочим, наглядно показывает, когда существенны релятивистские эффекты и формула Циолковского неприменима.

Таблица 2

$\beta=\frac{v}{c}$	m_0/m по формуле (21.6)	m_0/m по формуле (21.5)	$\beta=\frac{v}{c}$	m_0/m по формуле (21.6)	m_0/m по формуле (21.5)
0,001	$1{,}0690 \cdot 10^{13}$	$1{,}0686 \cdot 10^{13}$	0,25	$5{,}37 \cdot 10^{3327}$	$1{,}62 \cdot 10^{3257}$
0,01	$1{,}963 \cdot 10^{130}$	$1{,}942 \cdot 10^{130}$	1/3	$2{,}84 \cdot 10^{4515}$	$8{,}81 \cdot 10^{4342}$
0,1	$1{,}79 \cdot 10^{1307}$	$7{,}64 \cdot 10^{1302}$		,	

Допустим, что скорость космического корабля v должна составлять четверть скорости света ($\beta = 0{,}25$). Тогда должно быть $m_0/m \approx 5 \cdot 10^{3327}$. На каждую тонну полезного груза должно приходиться $5 \cdot 10^{3327}$ т топлива! Если полезная масса $m = 20$ т $= 2 \cdot 10^7$ г, то стартовая масса корабля должна быть $m_0 \approx 10^{3329}$ т $= 10^{3335}$ г! Обычно, когда имеют дело с очень большими величинами, их называют «астрономическими». В данном случае такое сравнение не годится — речь идет о величинах несравненно большего масштаба. Для сравнения приведем массы некоторых частиц и астрономических объектов:

масса электрона	$9{,}11 \cdot 10^{-25}$ г,	масса Солнца	$1{,}99 \cdot 10^{33}$ г,
масса протона	$1{,}67 \cdot 10^{-24}$ г,	масса Галактики	$3 \cdot 10^{44}$ г,
масса Земли	$5{,}98 \cdot 10^{27}$ г,	масса Метагалактики	10^{56} г.

Под *Метагалактикой понимают ту часть Вселенной*, которая доступна обнаружению методами современной оптической, радио- и гамма-астрономии. Масса Метагалактики превосходит массу электрона примерно в 10^{83} раза. Масса нашего фантастического корабля с топливом должна превосходить массу Метагалактики в 10^{3329} раз! Эти цифры превосходят всякое воображение. В масштабах нашего космического корабля Метага-

лактика выглядит несравненно более малым объектом, чем электрон в масштабах Метагалактики.

Вряд ли имеет смысл говорить о движении столь фантастически гигантского космического корабля относительно Метагалактики, имеющей по сравнению с ним ничтожные размеры. Вводить в рассмотрение объекты таких размеров и применять к ним обычные законы физики является недопустимой экстраполяцией. Кроме того, обычная теория движения ракет основана на предположении, что импульс, полученный от сгорания топлива в задней части ракеты, *практически мгновенно передается ракете в целом.* Это условие ввиду конечной скорости распространения взаимодействий не может выполняться для «ракет» достаточно больших размеров. Оно, разумеется, не выполняется для нашего фантастического «корабля». Наш пример доказывает только, что для межзвездных полетов ракеты на химическом топливе абсолютно непригодны.

Было бы неосторожным на основании изложенного сделать вывод, что звездные миры никогда не будут доступны земным космонавтам. Только отдаленное будущее покажет, возможно это или нет. Не собираясь входить в обсуждение этой фантастической проблемы, ограничимся следующими замечаниями. Для превращения ракеты в *звездолет* прежде всего необходимо повысить скорость струи $v_{\text{отн}}$, приблизив ее к скорости света. Идеальным был бы случай $v_{\text{отн}} = c$. Так было бы в *фотонной ракете,* в которой роль газовой струи должен играть световой пучок, излучаемый двигателем корабля в определенном направлении. Реактивная сила в фотонной ракете осуществлялась бы давлением света, оказываемым на корабль при излучении светового пуска. Превращение вещества в излучение постоянно происходит внутри звезд. Этот процесс осуществляется и на Земле и притом не только в лабораторных условиях, а в более крупном масштабе (взрывы атомных и водородных бомб). Возможно ли придать ему управляемый характер и использовать в фотонных ракетах — на этот вопрос отвечать преждевременно.

ЗАДАЧИ

1. Для лучшего уяснения закономерностей движения ракеты полезно рассмотреть мысленный случай, когда ракета выбрасывает вещество не непрерывно, а конечными дискретными порциями одной и той же массы Δm. Пусть при каждом выбрасывании порция вещества Δm получает одну и ту же скорость $v_{\text{отн}}$ относительно ракеты, направленную назад. Определить скорость ракеты v_N, которую она достигнет после N выбрасываний, если начальная масса ракеты равна m_0. Показать, что в предельном случае, когда $\Delta m \to 0$, $N \to \infty$, а произведение $N\Delta m$ остается постоянным, выражение для v_N переходит в формулу Циолковского. Ограничиться нерелятивистскими скоростями.

Решение. Пусть v_1, v_2, ... — скорость ракеты после 1-го, 2-го, ... выбрасываний. По закону сохранения импульса $(m_0 - \Delta m)v_1 + \Delta m \cdot w = 0$, где w — скорость выброшенной массы Δm после первого выбрасывания. Очевидно, $v_{\text{отн}} = v_1 - w$. Исключая w, получим

$$v_1 = \frac{\Delta m}{m_0} v_{\text{отн}}. \tag{21.7}$$

Найдем теперь v_2. В системе отсчета, движущейся со скоростью v_1, ракета перед вторым выбрасыванием неподвижна, а после второго выбрасывания приобретает скорость $v_2 - v_1$. Поэтому можно воспользоваться формулой (21.7), сделав в ней замену $m_0 \to m_0 - \Delta m$, $v_1 \to v_2 - v_1$. Это дает

$$v_2 - v_1 = \frac{\Delta m}{m_0 - \Delta m} v_{\text{отн}}.$$

Комбинируя это соотношение с (21.7), находим v_2. Продолжая этот процесс дальше, нетрудно получить

$$v_N = \left[\frac{\Delta m}{m_0} + \frac{\Delta m}{m_0 - \Delta m} + \ldots + \frac{\Delta m}{m_0 - (N-1)\,\Delta m}\right] v_{\text{отн}}.$$

В пределе, когда $\Delta m \to 0$, $N \to \infty$, $m_0 - (N-1)\,\Delta m \to m$, сумма, стоящая в квадратных скобках, переходит в интеграл, и мы получаем

$$v = v_{\text{отн}} \int_m^{m_0} \frac{dm'}{m'},$$

где m — конечная масса ракеты. После взятия интеграла получается формула Циолковского (21.5).

2. Найти связь между массой ракеты $m(t)$, достигнутой ею скоростью $v(t)$ и временем t, если ракета движется вертикально вверх в поле земного тяготения. Скорость газовой струи относительно ракеты $v_{\text{отн}}$ считать постоянной. Сопротивление воздуха и изменение ускорения свободного падения g с высотой не учитывать. Какую массу газов $\mu(t)$ должна ежесекундно выбрасывать ракета, чтобы оставаться неподвижной в поле тяготения?

Решение. Уравнение движения ракеты

$$m\frac{dv}{dt} = -v_{\text{отн}}\frac{dm}{dt} - mg$$

перепишем в форме

$$m\frac{d}{dt}(v + gt) = -v_{\text{отн}}\frac{dm}{dt}$$

или

$$\frac{d(v+gt)}{dm} = -\frac{v_{\text{отн}}}{m}.$$

Это уравнение имеет такой же вид, что и (21.3), если за неизвестное принять величину $v + gt$. Поэтому можно воспользоваться формулой (21.5), заменив в ней v на $v + gt$. Это дает

$$\frac{m_0}{m} = e^{(v+gt)/v_{\text{отн}}}, \quad v = v_{\text{отн}} \ln\frac{m_0}{m} - gt.$$

Величина μ, очевидно, равна $-dm/dt$. Она находится из условия, что для неподвижной ракеты $dv/dt = 0$, и равна

$$\mu = -\frac{dm}{dt} = \frac{m_0 g}{v_{\text{отн}}} e^{-gt/v_{\text{отн}}}.$$

3. Космический корабль движется с постоянной по модулю скоростью v. Для изменения направления его полета включается двигатель, выбрасывающий струю газа со скоростью $v_{\text{отн}}$ относительно корабля в направлении, перпендикулярном к его траектории. Определить угол α, на который повернется вектор скорости корабля, если начальная масса его m_0, а конечная m.

Решение. Ускорение корабля по модулю равно $\omega^2 r = \omega v$, причем $v = \text{const}$. Поэтому уравнение движения

$$m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v}_{\text{отн}}\,\frac{dm}{dt}$$

переходит в $mv\omega\,dt = -v_{\text{отн}}\,dm$. Замечая, что $d\alpha = \omega\,dt$ есть угол поворота за время dt, и интегрируя, получим

$$\alpha = \frac{v_{\text{отн}}}{v}\ln\frac{m_0}{m}.$$

4. Космический корабль, движущийся в пространстве, свободном от поля тяготения, должен изменить направление своего движения на противоположное, сохранив скорость по модулю. Для этого предполагаются два способа: 1) сначала затормозить корабль, а затем разогнать его до прежней скорости; 2) повернуть корабль, заставив его двигаться по дуге окружности, сообщая ему ускорение в поперечном направлении. При каком из этих двух способов потребуется меньшая затрата топлива? Скорость истечения газов относительно корабля считать постоянной и одинаковой в обоих случаях.

Ответ. Первый способ требует меньшей затраты топлива.

5. Определить коэффициент полезного действия ракеты, т. е. отношение кинетической энергии K, приобретенной ракетой, к количеству теплоты Q, выделившемуся при сгорании топлива. Скорость, достигнутая ракетой, $v = 9$ км/с. Теплота сгорания топлива $q = 4000$ ккал/кг, скорость выбрасываемых продуктов сгорания относительно ракеты $u = 3$ км/с.

Ответ. $\dfrac{K}{Q} = \dfrac{v^2}{2q(e^{v/u} - 1)} \approx 13\,\%$.

6. Продукты сгорания (газы) выбрасываются из ракеты со скоростью $u = 3$ км/с (относительно ракеты). Найти отношение ее кинетической энергии $K_{\text{рак}}$ к кинетической энергии продуктов сгорания $K_{\text{газ}}$ в момент достижения ракетой скорости $v_{\text{кон}} = 12$ км/с.

Решение. Приращение скорости ракеты $\mathbf{v}$ связано с изменением ее массы m соотношением $m\,d\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{отн}}\,dm$. Переходя к скалярной форме и новым обозначениям, запишем его в виде $m\,dv = -u\,dm$, причем $dm = -dm_{\text{газ}}$, где $m_{\text{газ}}$ — масса выброшенных газов. Приращение кинетической энергии газов

$$dK_{\text{газ}} = -\frac{1}{2}\,v_{\text{газ}}^2\,dm = \frac{mv_{\text{газ}}^2}{2u}\,dv.$$

Подставив сюда $v_{\text{газ}} = v - u$ и воспользовавшись формулой Циолковского (21.5), получим

$$dK_{\text{газ}} = -\frac{m_0}{2u}\,(u - v)^2\,e^{-v/u}\,dv,$$

или после интегрирования

$$K_{\text{газ}} = \frac{m_0 u^2}{2}\,(1 - e^{-x} - x^2 e^{-x}),$$

где для краткости введено обозначение $x = v_{\text{кон}}/u$. Кинетическая энергия ракеты

$$K_{\text{рак}} = \frac{1}{2}\, m v_{\text{кон}}^2 = \frac{1}{2}\, m_0 u^2 x^2 e^{-x}.$$

В результате находим

$$\eta \equiv \frac{K_{\text{рак}}}{K_{\text{газ}}} = \frac{x^2}{e^x - (1 + x^2)}.$$

При $x = 4$ отношение энергий $\eta = 45\%$.

7. С поверхности Луны стартует двухступенчатая ракета. При каком отношении масс первой (m_1) и второй (m_2) ступеней скорость контейнера с полезным грузом (массой m) получится максимальной? Скорость истечения газов u в двигателях обеих ступеней постоянна и одинакова. Отношения массы топлива к массе ступени равна для первой и второй ступеней соответственно α_1 и α_2. Отделение ступеней и контейнера производится без сообщения добавочных импульсов.

Решение. От действия силы тяжести Луны можно отвлечься. Сила тяжести уменьшает кинетическую энергию системы, но не влияет на условие максимума. Примем за единицу массы полную массу ракеты в момент старта. Тогда

$$m_1 + m_2 + m = 1. \tag{21.8}$$

После выгорания топлива в первой ступени масса системы уменьшится на $\alpha_1 m_1$. Если при этом будет достигнута скорость v_1, то по соотношению Циолковского

$$e^{v_1/u} = \frac{1}{(1 - \alpha_1) m_1 + m_2 + m}.$$

Масса $(1 - \alpha_1) m_1$ отделяется, и включается двигатель второй ступени. После выгорания топлива во второй ступени скорость ракеты возрастает еще на величину v_2, причем

$$e^{v_2/u} = \frac{m_2 + m}{(1 - \alpha_2) m_2 + m}.$$

В этом можно убедиться, если перейти в систему отсчета, в которой ракета в момент отделения первой ступени покоится. Полная достигнутая скорость найдется перемножением двух предыдущих соотношений и последующим логарифмированием. Исключая еще при этом массу m_2 с помощью соотношений (21.8), получим

$$\frac{v}{u} = \ln\,(1 - m_1) - \ln\,(1 - \alpha_1 m_1) - \ln\,[\,(1 - \alpha_2)\;(1 - m_1) + \alpha_2 m].$$

Здесь m и u играют роль постоянных параметров, а m_1 — роль аргумента, от которого зависит скорость v. Дифференцируя по m_1 и приравнивая производную нулю, получим условие максимума:

$$\frac{1}{m_1 - 1} + \frac{1}{\beta - m_1} + \frac{1}{\gamma + m} = 0, \tag{21.9}$$

где введены обозначения

$$\beta = \frac{1}{\alpha_1}, \quad \gamma = 1 + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\, m.$$

Условие (21.9) приводит к квадратному уравнению относительно m_1, решая которое, найдем

$$m_1 = 1 - \sqrt{1 + (\beta\gamma - \beta - \gamma)}\,.$$

Перед корнем взят минус, так как по смыслу задачи $0 < m_1 < 1$. С помощью (21.8) находим массу m_2, а затем искомое соотношение m_2/m_1. Возвращаясь при этом к прежним параметрам α_1 и α_2, получаем

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sqrt{\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\dfrac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2}} - \sqrt{m}}{1 - \sqrt{\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\dfrac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2}\, m}}\, \sqrt{m}\,. \tag{21.10}$$

Решение имеет смысл при выполнении условия

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2}\, m < 1.$$

В реальных условиях, когда $m \ll 1$, а параметры α_1 и α_2 отличаются не очень сильно, это условие соблюдается. При $\alpha_1 = \alpha_2$ получается простая формула

$$\frac{m_2}{m_1} = \sqrt{m}\,. \tag{21.11}$$

Г Л А В А IV

РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

§ 22. РАБОТА И КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

1. *Работой силы* **F** *на перемещении* $d\mathbf{s}$ называется проекция F_s этой силы на направление перемещения, умноженная на само перемещение:

$$dA = F_s\, ds = F\, ds \cos\alpha, \tag{22.1}$$

где α — угол между векторами **F** и $d\mathbf{s}$ (рис. 36). Поскольку перемещение $d\mathbf{s}$ предполагается бесконечно малым, величина dA называется также *элементарной работой* в отличие от *работы на конечном перемещении*. Если воспользоваться понятием скалярного произведения, то можно сказать, что *элементарная работа* dA есть скалярное произведение силы **F** на перемещение $d\mathbf{s}$:

$$dA = (\mathbf{F}\, d\mathbf{s}). \tag{22.2}$$

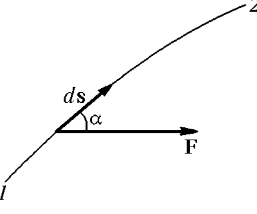


Рис. 36

В общем случае, когда материальная точка, двигаясь по криволинейной траектории, проходит путь конечной длины, можно мысленно разбить этот путь на бесконечно малые элементы, на каждом из которых сила **F** может считаться постоянной, а элементарная работа может быть вычислена по формуле (22.1) или (22.2). Если сложить все эти элементарные работы и перейти к пределу, устремив к нулю длины всех элементарных перемещений, а число их — к бесконечности, то такой предел обозначается символом

$$A = \int_L (\mathbf{F}\, d\mathbf{s}) \tag{22.3}$$

и называется *криволинейным интегралом* вектора **F** вдоль траектории L. Этот интеграл, по определению, и дает *работу силы* **F** *вдоль кривой* L.

Если $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, то проецируя это векторное уравнение на направление элементарного перемещения $d\mathbf{s}$, получим $F_s = F_{1s} + F_{2s}$, а после умножения на ds: $F_s\, ds = F_{1s}\, ds + F_{2s}\, ds$, или

$$dA = dA_1 + dA_2. \tag{22.4}$$

Таким образом, *элементарная работа результирующей двух или нескольких сил равна сумме элементарных работ этих сил.* Очевидно, то же утверждение справедливо и для работ на конечных перемещениях:

$$A = A_1 + A_2. \tag{22.5}$$

Единицей работы в системе СИ является джоуль (Дж). *Джоуль* есть работа силы в один ньютон на перемещении в один метр при условии, что направление силы совпадает с направлением перемещения. В системе СГС единицей работы является эрг. *Эрг* есть работа силы в одну дину на перемещении в один сантиметр при том же условии, т. е. в предположении, что направления силы и перемещения совпадают. Очевидно,

$$1 \text{ Дж} = 10^7 \text{ эрг}.$$

Работа, отнесенная к единице времени, т. е. величина

$$P = \frac{dA}{dt}, \tag{22.6}$$

называется *мощностью.* Ее единицами являются эрг на секунду и джоуль на секунду, или ватт (Вт). Очевидно,

$$1 \text{ Вт} = 10^7 \text{ эрг/с}.$$

Подставив в формулу (22.3) $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$, $d\mathbf{s} = \mathbf{v}\,dt$, придадим этой формуле вид

$$A = \int (\mathbf{v}\,d\mathbf{p}). \tag{22.7}$$

2. Чтобы вычислить интеграл, надо знать связь между скоростью материальной точки $\mathbf{v}$ и ее импульсом $\mathbf{p}$. По определению импульса $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, причем в нерелятивистской механике масса m не зависит от скорости, так что $\mathbf{v}\,d\mathbf{p} = m\mathbf{v}\,d\mathbf{v}$. Здесь вектор $d\mathbf{v}$ означает элементарное приращение вектора $\mathbf{v}$, причем это приращение может и не совпадать по направлению с вектором $\mathbf{v}$ (рис. 37). Если мы условимся понимать под v длину вектора $\mathbf{v}$, то очевидно $v^2 = \mathbf{v}^2$. Действительно, справа стоит скалярное произведение вектора $\mathbf{v}$ на самого себя, а оно равно квадрату длины вектора, как это непосредственно следует из определения скалярного произведения. Дифференцируя теперь обе части соотношения $v^2 = \mathbf{v}^2$, получим $v\,dv = \mathbf{v}\,d\mathbf{v}$. Здесь dv есть элементарное приращение длины вектора $\mathbf{v}$. Его нельзя смешивать с длиной элементарного приращения вектора, т. е. с величиной $|d\mathbf{v}|$. Последняя величина по самому ее смыслу существенно положительна, в то время как приращение dv может быть как положительным, так и отрица-

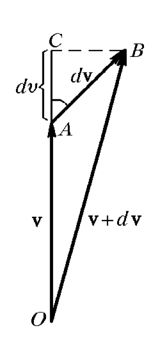


Рис. 37

тельным. На рис. 37 $d\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$, $dv = AC$. По определению скалярного произведения $\mathbf{v}\, d\mathbf{v} = v \cdot AB \cos\alpha = v \cdot AC = v\, dv$. Это дает другое доказательство соотношения $\mathbf{v}\, d\mathbf{v} = v\, dv$. Разумеется, такое соотношение справедливо не только для вектора $\mathbf{v}$, но и для любого другого вектора. Используя его в нашей задаче и вынося постоянный множитель m из-под знака интеграла, получим

$$A_{12} = m \int_{v_1}^{v_2} v\, dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2},$$

где v_1 — начальная, а v_2 — конечная скорости точки. Букву A мы снабдили индексами 1, 2, чтобы подчеркнуть, что речь идет о работе при перемещении материальной точки из начального положения *1* в конечное положение *2* (см. рис. 36). Величина

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \tag{22.8}$$

называется *кинетической энергией материальной точки.* С помощью этого понятия полученный результат запишется в виде

$$A_{12} = K_2 - K_1. \tag{22.9}$$

Таким образом, *работа силы при перемещении материальной точки равна приращению кинетической энергии этой точки.* Связь между работой и кинетической энергией, выражаемая этой теоремой, и оправдывает введение обоих этих понятий.

3. Полученный результат без труда обобщается на случай произвольной системы материальных точек. *Кинетической энергией системы* называется сумма кинетических энергий материальных точек, из которых эта система состоит или на которые ее можно мысленно разделить. Напишем соотношение (22.9) для каждой материальной точки системы, а затем все такие соотношения сложим. В результате снова получится формула (22.9), но уже не для одной материальной точки, а для системы материальных точек. Под A_{12} надо понимать сумму работ всех сил, как внутренних, так и внешних, действующих на материальные точки системы. Таким образом, *работа всех сил, действующих на систему материальных точек, равна приращению кинетической энергии этой системы.*

Имеется существенное отличие этой теоремы от аналогичной, в которой говорится о связи между импульсом силы и изменением импульса системы (§ 18). Внутренние силы вследствие равенства действия и противодействия не меняют импульс всей системы. Приращение импульса системы определяется только *внешними силами.* Не так обстоит дело в случае кинетической энергии. Работа внутренних сил, вообще говоря, не обращается в нуль. Представим себе, например, замкнутую систему, состоящую из двух материальных

точек, взаимодействующих между собой силами притяжения $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$. Если точки придут в движение навстречу друг другу, то каждая из сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ совершит положительную работу. Будет положительной и работа обеих сил. Она пойдет на приращение кинетической энергии системы. Кинетическая энергия изменится под действием одних только внутренних сил. Следовательно, *приращение кинетической энергии определяется работой не только внешних, но и внутренних сил.*

4. Доказанная теорема для материальной точки имеет место и в релятивистской механике. Надо только изменить выражение для кинетической энергии. В релятивистской механике формула (22.7) также справедлива, однако при вычислении интеграла (22.7) надо учитывать зависимость массы от скорости. Масса определяется формулой

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Подставив в эту формулу $v = p/m$ и возведя в квадрат, получим

$$p^2 + (m_0 c)^2 = (mc)^2. \tag{22.10}$$

Дифференцированием этого соотношения находим

$$p\,dp = c^2 m\,dm.$$

А так как $p\,dp = \mathbf{p}\,d\mathbf{p}$ и $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, то

$$\mathbf{v}\,d\mathbf{p} = c^2\,dm.$$

Таким образом,

$$A_{12} = \int \mathbf{v}\,d\mathbf{p} = \int\limits_{m_1}^{m_2} c^2\,dm.$$

Отсюда

$$A_{12} = c^2(m_2 - m_1) = c^2 \Delta m, \tag{22.11}$$

где m_1 и m_2 — массы материальной точки в начальном и конечном положениях.

Таким образом, *в релятивистской механике работа определяется только приращением массы материальной точки.* Этот результат проще соответствующего результата нерелятивистской механики. Введем обозначение

$$E = mc^2 \tag{22.12}$$

и назовем величину *E полной* или *релятивистской энергией частицы* (материальной точки). Тогда

$$A_{12} = E_2 - E_1. \tag{22.13}$$

В частном случае, когда частица покоится, ее релятивистская энергия определяется выражением

$$E_0 = m_0 c^2 \tag{22.14}$$

и называется *энергией покоя. Кинетическая энергия* есть часть релятивистской энергии, обусловленная движением частицы. Она представляется разностью

$$K = E - E_0 = (m - m_0)c^2, \tag{22.15}$$

или

$$K = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right). \tag{22.16}$$

Ясно, что работу A_{12} можно вычислить также по формуле

$$A_{12} = K_2 - K_1.$$

Если в формулу (22.10) ввести величины E и E_0, то получится

$$E^2 = E_0^2 + (pc)^2. \tag{22.18}$$

Эта формула выражает в релятивистской механике связь между импульсом частицы и ее полной энергией. Она справедлива не только для отдельных частиц, но и для систем, состоящих из нескольких частиц. Под m_0 и E_0 следует понимать массу и полную энергию такой системы в системе отсчета, относительно которой она покоится.

Формула (22.16) дает выражение для кинетической энергии в релятивистской механике. При медленных движениях она переходит в привычную формулу (22.8). Действительно, пользуясь формулой бинома Ньютона, может написать

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^2}{c^4} + \ldots$$

Когда $v^2/c^2 \ll 1$, можно оборвать это разложение на втором члене. Тогда формула (22.16) перейдет в формулу (22.8).

5. В атомной физике удобной единицей энергии является *электронвольт* (эВ). Это есть энергия, приобретаемая электроном в электрическом поле при прохождении разности потенциалов в один вольт:

$$1 \text{ эВ} = 1{,}602 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}.$$

Употребляется также *килоэлектронвольт* (1 кэВ = 1000 эВ). В ядерной физике, а также в ускорительной технике употребляются более крупные единицы: *мегаэлектронвольт* (1 МэВ = 10^6 эВ), *гигаэлектронвольт* (1 ГэВ = 10^9 эВ) и *тераэлектронвольт* (1 ТэВ =

$= 10^{12}$ эВ). Энергия покоя для электрона и протона соответственно равна:

$$m_{0e}c^2 = 0{,}511 \text{ МэВ}, \quad m_{0p}c^2 = 938 \text{ МэВ}.$$

Если полная релятивистская энергия частицы E *велика по сравнению с ее энергией покоя* $E_0 = m_0c^2$, *то говорят о движении с ультрарелятивистскими скоростями.* Такие скорости получаются в ускорителях, они встречаются также в космических лучах.

Зная энергию ультрарелятивистской частицы, можно вычислить и ее скорость. Точнее, можно вычислить не саму скорость частицы (для этого недостаточна точность, с которой известна скорость света c), а разность между этой скоростью и скоростью света в вакууме. С этой целью перепишем формулу (22.12) в виде

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Отсюда получаем

$$E^2(c + v)\ (c - v) = m_0^2c^6 = E_0^2c^2.$$

Так как скорость v близка к c, то во втором множителе $c + v$ величину v можно заменить на c. В результате получится

$$\frac{c-v}{c} = \frac{E_0^2}{2E^2}. \tag{22.19}$$

Для протонов с энергией $E = 10$ ГэВ получаем

$$\frac{c-v}{c} = \frac{0{,}938^2}{2\cdot 10^2} = 0{,}0044.$$

Для электронов с энергией $E = 1$ ГэВ

$$\frac{c-v}{c} = \frac{0{,}511^2}{2\cdot 10^6} = 1{,}3\cdot 10^{-7}.$$

В космических лучах регистрировались протоны с энергией 10^{20} эВ $= 10^{11}$ ГэВ. В этом случае

$$\frac{c-v}{c} \sim 10^{-21},$$

т. е. скорость частицы отличается от скорости света всего на $3\cdot 10^{-11}$ см/с.

ЗАДАЧИ

1. Через неподвижный блок, массой которого можно пренебречь перекинута замкнутая тяжелая веревка массой M. В начальный момент времени за точку веревки, расположенную между блокам и нижним заворотом ее, цепляется обезьяна массой m и начинает карабкаться вверх так, чтобы удержаться на неизменной высоте. Какую мощность P должна для

этого развивать обезьяна? Через сколько времени она перестанет справляться со своей затеей, если максимальная мощность, которую она может развивать, равна $P_{\text{макс}}$?

Ответ. $P = \frac{(mg)^2}{M} t$; $t = \frac{M}{(mg)^2} P_{\text{макс}}$.

2. Вывести формулу (21.6), являющуюся релятивистским обобщением формулы Циолковского для движения ракеты. Считать, что скорость ракеты и газовой струи направлены вдоль одной прямой.

Решение. Решение основано на релятивистских законах импульса и энергии (релятивистской массы). Они нами были сформулированы. Кроме того, требуется знать *релятивистский закон сложения скоростей,* который нами не формулировался. Читатель, желающий разобрать решение, приводимое ниже, должен обратиться к руководствам по теории относительности или принять на веру формулу (22.22), приводимую ниже.

Пусть m и v — масса покоя и скорость ракеты в произвольный момент времени t, а $m_{\text{газ}}$ и $v_{\text{газ}}$ — те же величины для газов, образовавшихся из топлива ракеты к этому моменту времени. Так как газы, уже покинувшие ракету, не оказывают влияния на ее движение, то можно принять $m_{\text{газ}} = 0$. Однако газы непрерывно образуются, так что $dm_{\text{газ}} \neq 0$. На основании закона сохранения импульса и энергии (релятивистской массы)

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{m_{\text{газ}} v_{\text{газ}}}{\sqrt{1 - v_{\text{газ}}^2/c^2}} = \text{const}, \tag{22.20}$$

$$\frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{m_{\text{газ}}}{\sqrt{1 - v_{\text{газ}}^2/c^2}} = \text{const}. \tag{22.21}$$

Дифференцируя уравнение (22.20) с учетом (22.21) и полагая в окончательном результате $m_{\text{газ}} = 0$, получим

$$\frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\, dv + (v - v_{\text{газ}})\, d\frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 0.$$

По релятивистскому закону сложения скоростей

$$v_{\text{газ}} = \frac{v - v_{\text{отн}}}{1 - v v_{\text{отн}}/c^2}, \tag{22.22}$$

где $v_{\text{отн}}$ — скорость газовой струи относительно ракеты. Исключая $v_{\text{газ}}$, после несложных преобразований находим

$$\frac{dv}{v^2 - c^2} = \frac{v_{\text{отн}}}{c^2} \frac{dm}{m}.$$

Предполагая скорость $v_{\text{отн}}$ постоянной и интегрируя, получим

$$\frac{m_0}{m} = \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right)^{c/(2v_{\text{отн}})}. \tag{22.23}$$

При выводе этой формулы предполагалось, что вся энергия и весь импульс сосредоточены в веществе. Энергия и импульс излучения все же учитываются, хотя и частично. Действительно, часть излучения поглоща-

ется газами, образующимися при сгорании топлива ракеты. За счет этого масса покоя газов несколько увеличивается. В результате некоторая часть энергии и импульса излучения переходит к веществу и учитывается при вычислении.

3. Импульс излучения $p_{\text{изл}}$ связан с его энергией $\mathscr{E}_{\text{изл}}$ соотношением

$$\mathscr{E}_{\text{изл}} = cp_{\text{изл}}.$$

Используя это соотношение, найти, как изменится формула (22.23) для фотонной ракеты.

Решение. Изменения полной энергии и импульса ракеты (с точностью до знака) равны энергии и импульсу образовавшегося излучения, т. е.

$$\left(m_0 - \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)c^2 = \mathscr{E}_{\text{изл}},$$

$$\frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}} = p_{\text{изл}}.$$

Значит,

$$\left(m_0 - \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)c^2 - \frac{mvc}{\sqrt{1-\beta^2}} = \mathscr{E}_{\text{изл}} - cp_{\text{изл}} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{m_0}{m} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}. \qquad (22.24)$$

Формально эта формула является частным случаем формулы (22.23) при $v_{\text{отн}} = c$.

4. Определить мощность фотонной ракеты, которой сообщается ускорение $a = 10$ м/с^2.

Решение. Изменение импульса ракеты за время dt равно $d(mv) = m\,dv + v\,dm$, где $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — релятивистская масса ракеты. Оно компенсируется изменением импульса излучения:

$$m\,dv + v\,dm = dp_{\text{изл}}.$$

По закону сохранения энергии

$$c^2\,dm + d\mathscr{E}_{\text{изл}} = 0.$$

Для излучения $d\mathscr{E}_{\text{изл}} = cp_{\text{изл}}$. Исключая $dp_{\text{изл}}$, получим

$$m\,dv + \frac{d\mathscr{E}_{\text{изл}}}{c}(1-\beta).$$

Мощность ракеты

$$P = \frac{d\mathscr{E}_{\text{изл}}}{dt} = \frac{mca}{1-\beta^2} = \frac{m_0ca}{(1-\beta^2)^{3/2}}.$$

На старте $\beta = 0$,

$$P\ [\text{МВт}] = m_0ca = 3000m_0,$$

где m_0 — масса в килограммах. Удельная мощность излучения, т. е. мощность, требуемая для ускорения одного килограмма ракеты, равна мощности нескольких тысяч крупных электростанций.

§ 23. СВЯЗЬ МЕЖДУ КИНЕТИЧЕСКИМИ ЭНЕРГИЯМИ В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА. ТЕОРЕМА КЁНИГА

Как ясно из формулы (22.8), кинетическая энергия тела зависит от выбора системы отсчета, относительно которой рассматривается его движение. Можно поставить вопрос, как преобразуется кинетическая энергия при переходе от одной системе отсчета к другой. Приведем решение этого вопроса в нерелятивистской механике. Сначала рассмотрим частный случай, когда тело состоит всего из одной материальной точки. Обозначим через K кинетическую энергию материальной точки в какой-либо системе отсчета S, а через K' — в другой системе S', движущейся относительно S поступательно со скоростью $\mathbf{V}$. (Скорость $\mathbf{V}$ может быть постоянной, но может и меняться во времени.) В нерелятивистской механике скорости $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{V}$ связаны соотношением $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$. Поэтому

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}V^2 + m(\mathbf{v}'\mathbf{V}),$$

или

$$K = K' + \frac{1}{2}mV^2 + (\mathbf{p}'\mathbf{V}), \tag{23.1}$$

где $\mathbf{p}' = m\mathbf{v}'$ — импульс материальной точки в системе S'. Формула (23.1) справедлива и для произвольной системы материальных точек. Чтобы убедиться в этом, достаточно написать соотношение (23.1) для каждой материальной точки системы, а затем просуммировать по всем точкам. Тогда получится снова формула (23.1), в которой под $\mathbf{p}'$ надо понимать импульс *всей системы материальных точек* в системе отсчета S', т. е. $\mathbf{p}' = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2' + \ldots$ Его можно представить в виде $\mathbf{p}' = m\mathbf{v}_c'$, где $\mathbf{v}_c'$ — скорость центра масс системы материальных точек относительно S', а m — ее суммарная масса. Таким образом,

$$K = K' + \frac{1}{2}mV^2 + m(\mathbf{V}\mathbf{v}_c'). \tag{23.2}$$

Если центр масс покоится в системе отсчета S', т. е. $\mathbf{v}_c' = 0$, то

$$K = K' + \frac{1}{2}mV^2. \tag{23.3}$$

Это равенство выражает так называемую *теорему Кёнига*: *кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической энергии всей массы системы, мысленно сосредоточен-*

ной в ее центре масс и движущейся вместе с ним, и кинетической энергии той же системы в ее относительном движении по отношению к поступательно движущейся системе координат с началом в центре масс.

§ 24. КОНСЕРВАТИВНЫЕ И НЕКОНСЕРВАТИВНЫЕ СИЛЫ

1. Все силы, встречающиеся в макроскопической механике, принято разделять на *консервативные* и *неконсервативные.* Прежде чем вводить эти понятия, рассмотрим некоторые примеры.

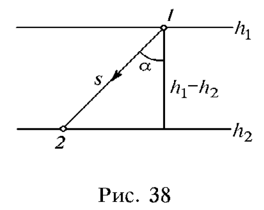


Рис. 38

Вычислим сначала работу силы тяжести, которую она совершает при переходе материальной точки из положения *1* в положение *2* вдоль прямолинейного отрезка *12* (рис. 38). Примером может служить скольжение без трения материальной точки по гладкой наклонной плоскости. Очевидно, эта работа $A_{12} = mgs\cos\alpha$, или

$$A_{12} = mg(h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2, \tag{24.1}$$

где h_1 и h_2 — высоты, на которых находилась материальная точка в начале и конце пути, отсчитанные от какого-либо произвольного уровня, например от земной поверхности или от уровня моря. Формула (24.1) остается справедливой и при перемещении вдоль произвольной кривой, например по пути *132* (рис. 39). Это станет очевидным, если разбить весь путь *132* горизонтальными плоскостями на малые участки, каждый из которых может быть принят за прямолинейный. Применив к каждому участку формулу (24.1) и сложив полученные работы, мы придем к прежнему результату (24.1). Если вместо пути *132* взять любой другой путь *142* между теми же начальным и конечными положениями *1* и *2*, то работа силы тяжести не изменится, так как она определяется только разностью высот $h_1 - h_2$, которая от формы пути не зависит. Таким образом, *работа тяжести не зависит от формы пути, а определяется только начальным и конечным положениями перемещающейся точки.*

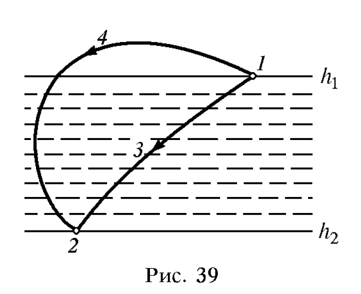


Рис. 39

2. В качестве второго примера рассмотрим работу при перемещении материальной точки в поле центральных сил. Сила называется *центральной,* если она направлена к одной и той же точке

(или от одной и той же точки) и зависит только от расстояния до этой точки, называемой *центром сил* или *силовым центром*. Примером может служить сила гравитационного притяжения, с которой Солнце действует на планету, или сила электростатического взаимодействия двух точечных зарядов. По определению элементарной работы $dA = F\,ds\cos(\mathbf{F}, d\mathbf{s})$. Величина $ds\cos(\mathbf{F}, d\mathbf{s})$ есть проекция элементарного перемещения $d\mathbf{s}$ на направление силы, или, что то же самое, на направление радиуса-вектора $\mathbf{r}$ (если за положительное направление силы принять направление от силового центра O). Следовательно, $ds\cos(\mathbf{F}, d\mathbf{s}) = dr$, где dr — элементарное приращение длины r, т. е. расстояние материальной точки от силового центра (рис. 40). Таким образом, $dA = F(r)\,dr$, причем по предположению сила F зависит только от расстояния r. Поэтому работа A_{12} выразится определенным интегралом

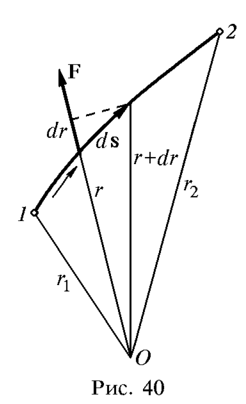


Рис. 40

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F(r)\,dr, \tag{24.2}$$

значение которого зависит *только от расстояний r_1 и r_2* точек *1* и *2* до силового центра O, но *не зависит от формы пути*, по которому материальная точка перешла из начального положения *1* в конечное положение *2*. В формулу (24.2) путь перехода вообще не входит, в нее входят только расстояния до силового центра.

3. Допустим, что в силовом центре помещено *физическое тело* (материальная точка), взаимодействующее с рассматриваемой материальной точкой (которая с тем же основанием может быть принята за силовой центр). При взаимодействии перемещаются как материальная точка, так и силовой центр. При выводе формулы (24.2) перемещение силового центра не принималось во внимание. Однако справедливость самой формулы не связана с этим ограничением. *Работа A_{12} зависит только от относительного перемещения материальных точек, но не может зависеть от абсолютных перемещений каждой из точек в отдельности. В этом можно убедиться простым* вычислением. Пусть взаимодействуют две материальные точки *1* и *2*, причем силы взаимодействия $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ подчиняются третьему закону Ньютона. Обозначим через $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ радиусы-векторы этих точек, проведенные из какого-либо неподвижного начала. Тогда для элементарной работы можно написать $dA = \mathbf{F}_1\,d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2\,d\mathbf{r}_2$. По третьему закону Ньютона $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$, а потому $dA = \mathbf{F}_2(d\mathbf{r}_2 - d\mathbf{r}_1) = \mathbf{F}_2\,d(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. Но $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ есть ради-

ус-вектор точки *2* относительно точки *1*. Обозначим его через $\mathbf{r}_{12}$. Тогда

$$dA = \mathbf{F}_2\, d\mathbf{r}_{12}. \tag{24.3}$$

Значит, при вычислении элементарной, а с ней и полной работы точка *1* может считаться неподвижной, а точка *2* — перемещающейся относительно нее. Можно было бы, конечно, считать неподвижной точку *2*, а точку *1* — движущейся. Результат получился бы тот же самый. Вообще, как и раньше, выражение (24.3) может быть преобразовано к виду

$$dA = F(r)\, dr. \tag{24.4}$$

Сюда входят только расстояние между взаимодействующими точками r и его приращение dr. Отсюда немедленно получается формула (24.2), что и доказывает наше утверждение.

Отметим одно следствие формулы (24.2). Допустим, что материальные точки *1* и *2* соединены абсолютно жестким стержнем. При такой идеализации расстояние между взаимодействующими точками будет оставаться неизменным при любых их перемещениях: $dr = 0$. Поэтому всегда будет равен нулю интеграл в формуле (24.2), а с ним и работа сил взаимодействия материальных точек *1* и *2* на любом перемещении. Так называемые абсолютно твердые тела могут рассматриваться как системы материальных точек, расстояния между которыми не меняются при любых движениях. Такая неизменяемость обеспечивается внутренними силами или силами связей, действующими между материальными точками системы. Всю систему можно мысленно разбить на пары взаимодействующих точек и применить к ним доказанное выше следствие. Отсюда следует, что *работа внутренних сил, действующих в абсолютно твердых телах, равна нулю при любых движениях.* Реальные тела не являются абсолютно твердыми. Действующие в них силы обусловлены связями, которые могут быть очень жесткими, но не бесконечно жесткими. Работа таких сил, вообще говоря, отлична от нуля. Однако по мере увеличения жесткости работа становится все меньше и меньше и в пределе для бесконечно жестких связей обращается в нуль.

Результаты, полученные для двух материальных точек, обобщаются на случай произвольной системы материальных точек, между которыми действуют центральные силы. Если задать положение каждой материальной точки, то этим определится и положение всей системы или ее *конфигурация. Работа центральных сил не зависит от способа (или «пути») перехода системы из начальной конфигурации в конечную — она определяется исключительно самими конфигурациями.*

4. Если силы взаимодействия зависят только от конфигурации материальных точек системы (т. е. от их координат) и работа этих сил при перемещении системы из произвольного начального поло-

жения в произвольное конечное положение не зависит от пути перехода, а определяется только начальной и конечной конфигурациями системы, то такие силы называются *консервативными*. Рассмотренные нами примеры показывают, что *сила тяжести и все центральные силы являются силами консервативными.*

Можно дать другое определение консервативных сил, эквивалентное приведенному. Пусть система из положения *1* (рис. 41) перешла в положение *2* по пути *132*. (Мы символически изображаем положение системы точкой на плоскости, а путь перехода — линией, хотя буквально такой способ применим лишь для системы, состоящей всего из одной материальной точки.) При этом будет совершена работа A_{132}. Если бы система перешла в положение *2* по пути *142*, то совершенная работа была бы равна A_{142}. По определению консервативных сил $A_{132} = A_{142}$. Так как силы зависят только от конфигурации системы, то $A_{142} = -A_{241}$, где A_{241} — работа, которая была бы совершена при переходе системы из положения *2* в положение *1* по тому же пути, но в обратном порядке, т. е. по пути *241*. Таким образом, $A_{132} + A_{241} = 0$. Но сумма $A_{132} + A_{241}$ есть работа, совершенная силами, когда система вернулась в исходное положение *1*. В этом случае говорят о работе по «*замкнутому пути*». Итак, *работа консервативных сил по любому замкнутому пути равна нулю.* Проведя это рассуждение в обратном порядке, без труда докажем, что из обращения в нуль работы по любому пути следует независимость работы от пути перехода. Поэтому можно дать еще такое определение консервативных сил. *Консервативными* называются силы, зависящие только от конфигурации системы, и работа которых по любому замкнутому пути равна нулю.

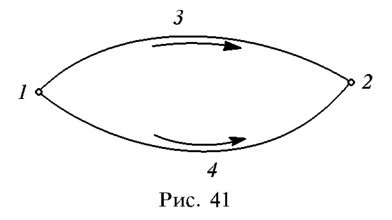


Рис. 41

5. Все силы, не являющиеся консервативными, называются *неконсервативными силами*. К ним относятся, прежде всего, так называемые *диссипативные силы*, например силы трения, возникающие при скольжении какого-либо тела по поверхности другого. Сюда же относятся силы сопротивления, испытываемые телом при движении в жидкой или газообразной среде. Их также иногда называют силами трения (см. § 17). Все эти силы зависят не только от конфигурации тел, но и от их *относительных скоростей*. Они направлены всегда против скорости тела (относительно поверхности, по которой оно скользит, или относительно сопротивляющейся среды, в которой оно движется). Поэтому, если тело скользит по неподвижной поверхности или движется в «неподвижной» сопротивляющейся среде, то при любом движении тела работа сил

трения, действующих на него, отрицательна. Но работа сил трения может быть и положительной, когда поверхность или среда сами движутся. Рассмотрим, например, тело B, по поверхности которого скользит тело C (рис. 42) с относительной скоростью $\mathbf{v}_{\text{отн}}$. Сила трения $\mathbf{F}_{\text{тр}}$, действующая на тело C, направлена против вектора $\mathbf{v}_{\text{отн}}$. Допустим, что само тело B движется в противоположном направлении со скоростью $\mathbf{v}$. Если $v > v_{\text{отн}}$, то в «неподвижной» системе отсчета тело C движется со скоростью $\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\text{отн}}$ в том же направлении, в котором действует сила трения. Сила трения ежесекундно совершает над телом C положительную работу $A_1 = F_{\text{тр}}(v - v_{\text{отн}})$. Однако если система замкнута, то полная работа сил трения, действующих на все тела системы, всегда отрицательна. Так, в приведенном примере сила трения, действующая на тело B, совершает отрицательную работу $A_2 = -F_{\text{тр}}v$. Полная работа сил трения равна $A = A_1 + A_2 = -F_{\text{тр}}v_{\text{отн}}$, т. е. отрицательна. Поэтому мы даем следующее определение диссипативных сил. *Диссипативными* называют такие силы, полная работа которых при любых движениях в замкнутой системе всегда отрицательна.

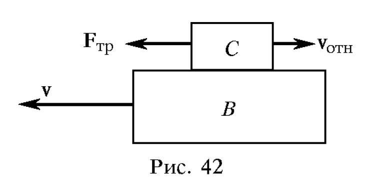


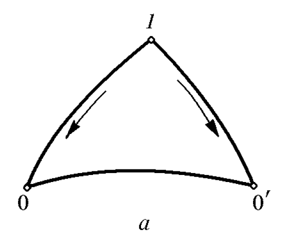
Рис. 42

6. Отметим, наконец, еще один вид неконсервативных сил, называемых *гироскопическими силами. Эти силы зависят от скорости материальной точки и действуют всегда перпендикулярно к этой скорости.* Работа таких сил равна нулю при любом перемещении материальной точки, в частности при ее движении по замкнутому пути. От консервативных гироскопические силы отличаются тем, что они определяются не только положением, но и скоростью движущейся материальной точки. Единственным примером гироскопических сил, известных в физике, является *сила Лоренца*, т. е. сила, действующая на заряженную частицу в магнитном поле. Она пропорциональна векторному произведению $[\mathbf{vB}]$, т. е. перпендикулярна как к направлению скорости $\mathbf{v}$, так и к вектору *напряженности магнитного поля* $\mathbf{B}$. Правда, в механике встречаются гироскопические силы и иного рода. Это так называемые *силы Кориолиса* (по имени французского физика Гюстава Кориолиса (1792–1843)). Однако эти силы не являются «настоящими силами» в смысле механики Ньютона. При рассмотрении движений относительно инерциальных систем отсчета (а только такие движения мы сейчас и рассматриваем) такие «силы» вообще не существуют. Они вводятся искусственно при рассмотрении движений в системах отсчета, вращающихся относительно инерциальных, чтобы придать уравнениям движения в таких системах формально такой же вид, что и в инерциальных системах отсчета (см. гл. IX).

§ 25. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ В МЕХАНИКЕ

1. Если на систему действуют только консервативные и гироскопические силы, то для такой системы можно ввести понятие *потенциальной энергии.* Примем какое-либо произвольное положение системы, характеризующееся заданием координат ее материальных точек, условно за *нулевое.* Работа, совершаемая консервативными силами при переходе системы из рассматриваемого положения в нулевое, называется потенциальной энергией системы в первом положении. Работа консервативных сил не зависит от пути перехода, а потому потенциальная энергия системы при фиксированном нулевом положении зависит только от координат материальных точек системы в рассматриваемом положении. Иными словами, *потенциальная энергия системы U является функцией только ее координат.*

Значение потенциальной энергии зависит от того, какое положение системы условно принято за нулевое. Если за нулевое принять положение 0 (рис. 43 *а*), то в положении *1* система будет обладать потенциальной энергией $U = A_{10}$, равной работе консервативных сил при переходе системы из положения *1* в положение 0. Если же за нулевое принять положение 0′, то потенциальная энергия будет равна $U' = A_{10'}$. Вследствие консервативности сил, действующих в системе, работа вдоль пути *10′* равна работе вдоль пути *100′*: $A_{10'} = A_{10} + A_{00'}$, или $U' = U + A_{00'}$. Работа $A_{00'}$ постоянна, т. е. не зависит от координат системы в рассматриваемом состоянии *1*. Она полностью определяется выбором нулевых положений 0 и 0′. Мы видим, что при замене одного



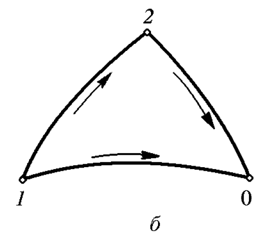


Рис. 43

нулевого положения другим потенциальная энергия системы меняется на постоянную величину. Неопределенность можно усилить еще больше, если условиться считать потенциальную энергию в нулевом положении равной не нулю, а какому-либо постоянному произвольному значению. Тогда в приведенном выше определении вместо потенциальной энергии следует говорить о ее *разности* в двух положениях. *Разностью потенциальных энергий в рассматриваемом и нулевом положениях* называется работа, совершаемая консервативными силами при переходе системы

из рассматриваемого в нулевое положение. Таким образом, *потенциальная энергия системы определена не однозначно*, а *с точностью до произвольной постоянной*. Этот произвол не может отразиться на физических выводах, так как ход физических явлений может зависеть не от абсолютных значений самой потенциальной энергии, а лишь от ее разностей в различных состояниях. Эти же разности от выбора произвольной постоянной не зависят.

Пусть система перешла из положения *1* в положение *2* по какому-либо пути *12* (рис. 43 *б*). Работу A_{12}, совершенную консервативными силами при таком переходе, можно выразить через потенциальные энергии U_1 и U_2 в состояниях *1* и *2*. С этой целью вообразим, что переход осуществлен через нулевое положение 0, т. е. по пути *102*. Так как силы консервативны, то $A_{12} = A_{102} = A_{10} + A_{02} = A_{10} - A_{20}$. По определению потенциальной энергии $U_1 = A_{10} + C$, $U_2 = A_{20} + C$, где C — одна и та же аддитивная постоянная. Таким образом,

$$A_{12} = U_1 - U_2, \tag{25.1}$$

т. е. *работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии системы*.

2. Та же работа A_{12}, как было показано, может быть выражена через приращение кинетической энергии по формуле (22.9). Приравнивая выражения (22.9) и (25.1), получим $K_2 - K_1 = U_1 - U_2$, откуда

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2.$$

Сумма кинетической и потенциальной энергий системы называется ее *полной энергией* E. Таким образом, $E_1 = E_2$, или

$$E \equiv K + U = \text{const}. \tag{25.2}$$

В системе с одними только консервативными (и гироскопическими) силами полная энергия остается неизменной. Могут происходить лишь превращения потенциальной энергии в кинетическую и обратно, но полный запас энергии системы измениться не может. Это положение называется *законом сохранения энергии в механике*.

3. Вычислим потенциальную энергию в некоторых простейших случаях.

а. Потенциальная энергия тела в однородном поле тяжести. Если материальная точка, находящаяся на высоте h, упадет на нулевой уровень (т. е. уровень, для которого $h = 0$), то сила тяжести совершит работу $A = mgh$. Поэтому на высоте h материальная точка обладает потенциальной энергией $U = mgh + C$. За нулевой можно принять произвольный уровень,

например, уровень пола (если опыт производится в лаборатории), уровень моря и т. д. Постоянная C равна потенциальной энергии на нулевом уровне. Полагая ее равной нулю, получим

$$U = mgh. \tag{25.3}$$

б. Потенциальная энергия растянутой пружины. Упругие силы, возникающие при растяжении или сжатии пружины, являются центральными силами. Поэтому они консервативны, и имеет смысл говорить о потенциальной энергии деформированной пружины. Ее называют *упругой энергией*. Обозначим через x *растяжение пружины*, т. е. разность $x = l - l_0$ длин пружины в деформированном и недеформированном состояниях. Упругая сила F зависит только от растяжения. Если растяжение x не очень велико, то сила пропорциональна ему: $F = kx$ (закон Гука, см. § 11). При возвращении пружины из деформированного в недеформированное состояние сила F совершает работу

$$A = \int_0^x F\,dx = k\int_0^x x\,dx = \frac{1}{2}kx^2.$$

Если упругую энергию пружины в недеформированном состоянии условиться считать равной нулю, то

$$U = \frac{1}{2}kx^2. \tag{25.4}$$

в. Потенциальная энергия гравитационного притяжения двух материальных точек. По закону всемирного тяготения Ньютона гравитационная сила притяжения двух точечных тел пропорциональна произведению их масс Mm и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = G\frac{Mm}{r^2}, \tag{25.5}$$

где G — *гравитационная постоянная*. Силы гравитационного притяжения, как силы центральные, являются консервативными. Для них имеет смысл говорить о потенциальной энергии. При вычислении этой энергии одну из масс, например M, можно считать неподвижной, а другую — перемещающейся в ее гравитационном поле. При перемещении массы m из бесконечности гравитационные поля совершают работу

$$A = \int_r^\infty G\frac{Mm}{r^2}\,dr = G\frac{Mm}{r},$$

где r — расстояние между массами M и m в конечном состоянии. Эта работа равна убыли потенциальной энергии:

$$A = U_\infty - U(r).$$

Обычно потенциальную энергию в бесконечности U_∞ принимают равной нулю. При таком соглашении

$$U = -G\frac{Mm}{r}. \qquad (25.6)$$

Величина (25.6) отрицательна. Это имеет простое объяснение. Максимальной энергией притягивающиеся массы обладают при бесконечном расстоянии между ними. В этом положении потенциальная энергия считается равной нулю. Во всяком другом положении она меньше, т. е. отрицательна.

4. Допустим теперь, что в системе наряду с консервативными и гироскопическими силами действуют также диссипативные силы. Работа всех сил A_{12} при переходе системы из положения *1* в положение *2* по-прежнему равна приращению ее кинетической энергии $K_2 - K_1$. Но в рассматриваемом случае эту работу можно представить в виде суммы работы консервативных сил $A_{12}^{\text{кон}}$ и работы диссипативных сил $A_{12}^{\text{дис}}$. Первая работа может быть выражена через убыль потенциальной энергии системы: $A_{12}^{\text{кон}} = U_1 - U_2$. Поэтому

$$A_{12} = U_1 - U_2 + A_{12}^{\text{дис}}.$$

Приравнивая это выражение приращению кинетической энергии, получим

$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2 + A_{12}^{\text{дис}},$$

или

$$E_2 - E_1 = A_{12}^{\text{дис}}, \qquad (25.7)$$

где $E = K + U$ — полная энергия системы. Таким образом, в рассматриваемом случае механическая энергия E системы не остается постоянной, а уменьшается, так как работа диссипативных сил $A_{12}^{\text{дис}}$ отрицательна.

Уравнение (25.7) можно обобщить. Разделим все действующие силы на две группы. К первой группе отнесем силы, учитываемые посредством потенциальной энергии U, ко второй — все остальные силы, как внутренние, так и внешние, действующие в системе. Обозначим через A_{12} работу сил второй группы. Тогда, рассуждая так же, как и при выводе формулы (25.7), получим

$$E_2 - E_1 = A_{12}. \qquad (25.8)$$

5. Допустим снова, что диссипативные силы в системе не действуют. Тогда справедлив закон сохранения энергии в форме (25.2). Поскольку кинетическая энергия K по своему смыслу не может быть отрицательной, из формулы (25.2) следует, что $E \geqslant U$. Этим соотношением определяется *область изменения всех координат системы*, в которой она может находиться при заданной полной энер-

гии E. В область, где $U > E$, система попасть не может, так как потенциальная энергия не может превышать полную.

Рассмотрим в качестве примера одномерное движение частицы, когда она движется вдоль определенной прямой линии. Примем эту линию за координатную ось X. На оси X величина U будет функцией только x: $U = U(x)$. Если E — полная энергия частицы, то частица может находиться только в тех местах оси X, где $U(x) \leqslant E$. Допустим, что график функции $U(x)$ имеет вид, изображенный на рис. 44. Проведем на этом рисунке горизонтальную прямую $U = E_1$, где E_1 — какая-то постоянная. Пусть эта прямая пересекает «*потенциальную кривую*» $U = U(x)$ в трех точках A, B, C с координатами x_A, x_B, x_C. Сразу видно, что частица с полной энергией E_1 не может находиться в областях I и III. Она может двигаться либо в области II, либо в области IV. Переходить из области II в область IV или обратно частица не может. Этому препятствует «*потенциальный барьер*» BNC на потенциальной кривой. В области II частица с полной энергией E_1 будет совершать так называемое *финитное движение*, т. е. движение, происходящее в ограниченной части пространства. Она окажется запертой в «*потенциальной яме*» AMB и будет совершать колебания между крайними точками x_A и x_B, называемыми *точками поворота*. Если же частица находится в области IV и движется налево, то она, достигнув точки x_C, повернет обратно и далее будет «уходить на бесконечность». Такое движение называется *инфинитным*. Пусть теперь частица обладает большей энергией $E_2 > E_1$, и горизонтальная прямая $U = E_2$ пересекает потенциальную кривую в единственной точке D с абсциссой x_D. Тогда для частицы окажется доступной вся область пространства правее точки x_D, и движение в этой области будет инфинитным.

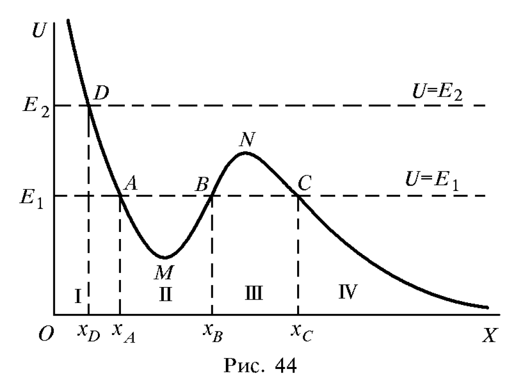


Рис. 44

Допустим, что потенциальная яма имеет характер кривой, изображенной на рис. 45. По обе стороны от точки M обе ветви потенциальной кривой монотонно поднимаются вверх. Пусть при $x = \pm\infty$ функция $U(x)$ обращается в нуль, т. е. ось абсцисс является для потенциальной кривой *асимптотой*. Тогда можно утверждать, что *движение частицы будет финитным, если ее полная энергия отрицательна, и инфинитным, если она положительна.*

Для уяснения качественного характера движения частицы в силовом поле с потенциальной энергией $U(x)$ полезна следующая иллюстрация. Изготовим идеально твердую и идеально гладкую дорожку, форма которой точно совпадает с профилем потенциальной кривой $U = U(x)$ (например, кривой, изображенной на рис. 44). Поместим такую дорожку в однородном поле тяжести и положим на нее на некоторой высоте маленький шарик. Тогда движение шарика под действие силы тяжести будет почти точно воспроизводить движение материальной точки в рассматриваемом силовом поле $U = U(x)$, если только надлежащим образом подобрать ее полную энергию. Некоторая неточность иллюстрации связана с тем, что при движении шарика по дорожке возникает вращение, на что расходуется часть энергии. Иллюстрация совершенно точно передавала бы все черты искомого движения, если бы шарик не катился по дорожке, а скользил по ней без трения. Если такой шарик поместить без начальной скорости в точку A (рис. 44), то он будет совершать колебания по дуге AMB между крайними точками A и B. Если его поместить в точку D, то он сможет преодолеть потенциальный барьер BNC и «уйти на бесконечность».

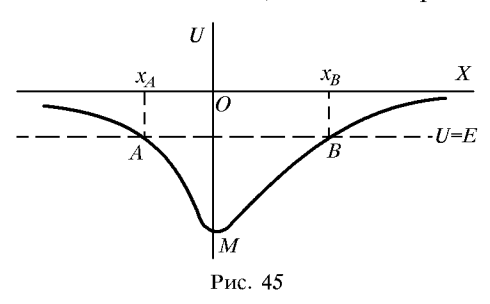


Рис. 45

6. Для финитных движений справедлива так называемая *теорема вириала*, имеющая многочисленные применения в различных отделах физики. Она была сформулирована и доказана немецким физиком Рудольфом Клаузиусом (1822—1888). Для произвольной системы материальных точек можно написать

$$\frac{d}{dt}\sum \mathbf{pr} = \sum \mathbf{rF} + \sum \mathbf{pv},$$

так как $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$, $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ (суммирование ведется по всем материальным точкам системы). Последнее слагаемое в правой части есть удвоенная кинетическая энергия системы: $2K = \sum \mathbf{pv} = \sum mv^2$, и предыдущее соотношение можно переписать в виде

$$K = -\frac{1}{2}\sum \mathbf{rF} + \frac{d}{dt}\sum \frac{1}{2}(\mathbf{pr}). \tag{25.9}$$

Величина $-\frac{1}{2}\sum \mathbf{rF}$ называется *вириалом сил*, действующих в системе.

Назовем *средним по времени значением функции* $f(t)$ на временном *интервале* $(t, t+T)$ величину, определяемую выражением

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{T}\int\limits_{t}^{t+T} f(t')\,dt'. \tag{25.10}$$

Если функция $f(t)$ периодична, то в качестве времени T обычно берут ее период. Если же $f(t)$ не периодична, но ограничена, то время T берут достаточно большим и переходят к пределу

$$\overline{f} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t')\, dt', \tag{25.11}$$

предполагая, конечно, что предел существует. Если $f(t)$ есть производная ограниченной функции по времени; $f = \frac{d\varphi}{dt}$, то $\overline{f} = 0$. Действительно,

$$\overline{f} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{d\varphi}{dt'}\, dt' = \lim_{T\to\infty} \frac{\varphi(t+T) - \varphi(t)}{T}.$$

Имея это в виду, усредним соотношение (25.9) по времени, устремляя T к бесконечности. Тогда для финитного движения последнее слагаемое в (25.9) даст нуль, и мы получим

$$\overline{K} = -\frac{1}{2}\overline{\sum \mathbf{rF}}. \tag{25.12}$$

В случае финитных движений среднее по времени значение кинетической энергии системы равно среднему по времени значению вириала сил, действующих в системе. Это и есть теорема вириала Клаузиуса.

ЗАДАЧИ

1. Определить отношение потенциальных энергий деформации U_1 и U_2 двух пружин с жесткостями k_1 и k_2 в двух случаях: а) пружины соединены последовательно и растягиваются грузом P (рис. 46 *а*); б) пружины висят параллельно, причем груз P подвешен в такой точке, что обе пружины растягиваются на одну и ту же величину (рис. 46 *б*). Деформацией пружин под действием собственного веса пренебречь.

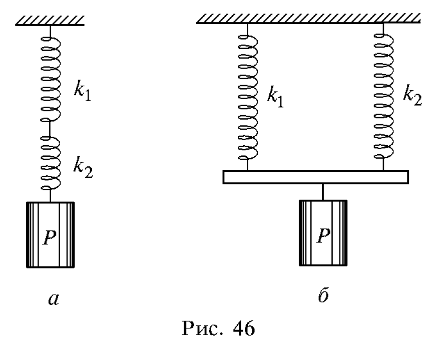


Рис. 46

Ответ: а) $U_1/U_2 = k_2/k_1$; б) $U_1/U_2 = k_1/k_2$.
Когда одна из пружин очень жесткая по сравнению с другой, практически вся потенциальная энергия в случае а) будет запасена в более мягкой, а в случае б) — в более жесткой пружинах.

2. Два протона с энергией $E = 0{,}5$ МэВ каждый летят навстречу друг другу и испытывают лобовое столкновение. Как близко они могут сойтись, если учитывать только электростатическое взаимодействие между ними?

Ответ. $r = e^2/2E$, где e — заряд протона. Для вычислений формулу целесообразно преобразовать, положив $E = eV$. Тогда $r = e/2V = 1{,}4\cdot 10^{-13}$ см ($2V = 10^6$ В). Опыты по рассеянию ядерных частиц показали, что радиус действия ядерных сил по порядку величины равен 10^{-13} см. Поэтому при расчете столкновения протонов, энергии которых

превосходят примерно 0,5 МэВ, помимо электростатических сил надо учитывать также ядерные силы.

3. Три электрона в состоянии покоя находятся в вершинах правильного треугольника со стороной $a = 1$ см. После этого они начинают двигаться под действием взаимного отталкивания. Определить предельное значение их скоростей.

Ответ. $v = \sqrt{2e^2/ma} = 2{,}2 \cdot 10^4$ см/с.

4. Решить задачу 3 для релятивистских скоростей. При каких расстояниях a можно пользоваться нерелятивистским приближением?

Ответ. $v = c\,\dfrac{\sqrt{2m_0c^2e^2/a + e^4/a^2}}{m_0c^2 + e^2/a}$.

Нерелятивистское приближение справедливо при

$$a \gg \frac{e^2}{m_0c^2} = 2{,}8 \cdot 10^{-13}\ \text{см}.$$

5. Исходя из того требования, что произведение импульса частицы mv на расстояние a велико по сравнению с L, определить, при каких расстояниях a в задаче 3 квантовые поправки не играют роли.

Ответ. При $a \gg \dfrac{h^2}{2me^2} \approx 10^{-7}$ см.

6. Четыре электрона в состоянии покоя находятся в вершине квадрата со стороной $a = 1$ см. После этого они начинают двигаться под действием взаимного отталкивания. Определить предельное значение их скоростей.

Ответ. $v = \sqrt{\left(2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\dfrac{e^2}{ma}} = 2{,}6 \cdot 10^4$ см/с.

7. Материальная точка совершает одномерное финитное движение в потенциальном силовом поле между точками поворота x_A и x_B (см. рис. 45). Показать, что время движения ее от точки x_A к точке x_B равно времени обратного движения от точки x_B к точке x_A.

8. Материальная точка (например, шарик на пружине) под действием квазиупругой силы $F = -kx$ совершает колебания вдоль оси X вокруг положения равновесия. Пользуясь теоремой вириала, показать, что средние по времени значения кинетической и потенциальной энергий при таком колебании одинаковы.

9. Идеально упругий шарик движется вверх и вниз в однородном поле тяжести, отражаясь от поля по законам упругого удара. Найти связь между средними по времени значениями его кинетической $\overline{K}$ и потенциальной $\overline{U}$ энергий.

Решение. Поместим начало координат в одной из точек пола, направив ось X вертикально вверх. Тогда сила давления пола на шарик не будет влиять на значение вириала, так как она действует только в таких положениях шарика, когда $x = 0$. Надо учитывать только силу тяжести $F = -mg$ (минус потому, что сила F действует вниз, т. е. в отрицательном направлении оси X). Вириал этой силы равен $-1/2\,Fx = 1/2\,mgx = 1/2\,U$. По теореме вириала находим

$$\overline{K} = \frac{1}{2}\,\overline{U}.$$

§ 26. АБСОЛЮТНО НЕУПРУГИЙ УДАР

1. Интересным примером, где имеет место потеря механической энергии под действием диссипативных сил, является *абсолютно неупругий удар.* Так называется столкновение двух тел, в результате которого они соединяются вместе и движутся дальше как одно тело. Примером может служить попадание ружейной пули в подвижную мишень, например в ящик с песком, подвешенный на веревках. Пуля, застряв в песке, остается в ящике и движется дальше вместе с ним. Шары из пластилина или глины при столкновении обычно слипаются и затем движутся вместе. Такое столкновение также может служить примером практически абсолютно неупругого удара. Точно также столкновение двух свинцовых шаров можно с хорошим приближением рассматривать как абсолютно неупругий удар. В атомной и ядерной физике неупругие удары сопровождаются внутренними превращениями сталкивающихся частиц.

Физические явления при столкновении тел довольно сложны. Сталкивающиеся тела деформируются, возникают упругие силы и силы трения, в телах возбуждаются колебания и волны и т. д. Однако если удар неупругий, то в конце концов все эти процессы прекращаются, и в дальнейшем оба тела, соединившись вместе, движутся как единое твердое тело. Его скорость можно найти, не вдаваясь в механизм явления, а используя только закон сохранения импульса.

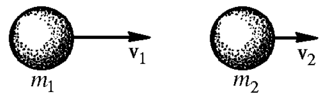


Рис. 47

Рассмотрим абсолютно неупругий удар на примере столкновения шаров. Пусть шары движутся вдоль прямой, соединяющей их центры, со скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ (рис. 47). В этом случае говорят, что удар является *центральным.* Обозначим через $\mathbf{v}$ общую скорость шаров после столкновения. Закон сохранения импульса дает

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v,$$

где m_1 и m_2 — массы шаров. Отсюда получаем

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \qquad (26.1)$$

Кинетические энергии системы до удара и после удара равны соответственно

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2, \qquad K_2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2.$$

Пользуясь этими выражениями, нетрудно получить

$$K_1 - K_2 = \frac{1}{2} \mu (v_1 - v_2)^2, \qquad (26.2)$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — приведенная масса шаров. Таким образом, *при столкновении двух абсолютно неупругих шаров происходит потеря кинетической энергии макроскопического движения, равная половине произведения приведенной массы на квадрат относительной скорости.*

2. Неупругое столкновение тел всегда должно сопровождаться *потерей* кинетической энергии макроскопического движения. Действительно, согласно теореме Кёнига кинетическая энергия механической системы складывается из двух частей: 1) кинетической энергии движения системы как целого со скоростью ее центра масс; 2) кинетической энергии относительно движения материальных точек, на которые мысленно можно разбить систему, около ее центра масс. Обе части — как кинетические энергии — существенно положительны. Первая из них в результате столкновения тел не меняется в силу теоремы о движении центра масс. Вторая же после столкновения исчезает, так как в результате неупругого столкновения относительное движение частей системы прекращается, остается только общее движение их со скоростью центра масс. Поэтому столкновение приводит к уменьшению полной кинетической энергии макроскопического движения. Зато возрастает внутренняя энергия тела (см. § 27).

3. Нетрудно понять, почему в формулу (26.2) вошли приведенная масса и относительная скорость сталкивающихся шаров. Согласно общей формуле (25.7) потеря кинетической энергии по абсолютной величине равна работе диссипативных сил, действующих в системе во время столкновения. При вычислении этой работы, как было показано в § 24, можно одно из сталкивающихся тел считать неподвижным, а второе — движущимся относительно него. Относительное движение двух материальных точек описывается уравнением $\mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$, аналогичным второму закону Ньютона. Ввиду этого работа диссипативной силы $\mathbf{F}$ за все время столкновения равна $1/2\,\mu(v_1 - v_2)^2$. Эта величина и дает убыль кинетической энергии системы за то же время.

Когда сталкиваются два тела, то разрушительное действие при столкновении зависит только от их относительной скорости $v_1 - v_2$. Кинетическая энергия, от которой зависит разрушительный эффект, равна $1/2\,\mu(v_1 - v_2)^2$. Остальная часть кинетической энергии связана с движением центра масс системы. Эта энергия при столкновении не изменяется, а потому она на разрушение не оказывает никакого влияния. Например, если сталкиваются два одинаковых автомобиля, движущихся навстречу друг другу с одной и той же скоростью v, то энергия, от которой зависит разрушение, равна

$$\frac{1}{2}\mu(v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2}\frac{mm}{m+m}(2v)^2 = mv^2,$$

т. е. вся кинетическая энергия тратится на разрушение. Это ясно без вычислений, так как после столкновения оба автомобиля, независимо от того, в какой мере они пострадали при аварии, должны остановиться. Тот же разрушительный эффект получится и в том случае, когда один из автомобилей неподвижен, а другой движется в направлении к нему со скоростью $2v$. Но в этом случае начальная кинетическая энергия системы составляет $1/2\,m(2v)^2 = 2mv^2$, т. е. она вдвое больше. Только половина энергии идет на разрушение.

Разрушительные эффекты при авариях, конечно, являются бедствием. Но в некоторых случаях, например при изучении превращений, претерпеваемых атомными ядрами и элементарными частицами во время столкновения, они являются целью исследования. В таких случаях стремятся к тому, чтобы разрушительные эффекты усилить. Из изложенного следует, что этого можно добиться, приводя в движение обе сталкивающиеся частицы. *При одной и той же затрате энергии наибольшее разрушение получится тогда, когда центр масс сталкивающихся частиц в лабораторной системе отсчета неподвижен.* Этот принцип используется в так называемых *ускорителях на встречных пучках.* Современные ускорители представляют дорогие и сложные технические сооружения, применяющиеся для сообщения высоких энергий заряженным частицам — электронам, протонам и пр. Они используются в ядерной физике и физике элементарных частиц для исследования различных процессов, происходящих при столкновении частиц высоких энергий. Обычно ускоренные частицы направляются на неподвижную мишень, при столкновении с которой и происходят процессы, подлежащие изучению. Тот же эффект, однако, может быть достигнут с меньшей затратой энергии, если привести в движение также саму мишень навстречу пучку. В качестве мишени используется встречный пучок ускоренных частиц. Если массы и скорости частиц в обоих пучках одинаковы, то согласно нерелятивистской механике должен получиться выигрыш в энергии в два раза. В действительности в ускорителях имеют дело с *релятивистскими пучками*, и при расчетах надо пользоваться релятивистской механикой. Оказывается, что в релятивистском случае можно получить принципиально ничем не ограниченный выигрыш в энергии, используя частицы, скорости которых приближаются к скорости света (см. т. IV).

4. Во время столкновения в системе действуют диссипативные силы, уменьшающие кинетическую энергию макроскопического движения. Поэтому применять закон сохранения энергии в его механической форме к процессам, происходящим во время удара, нельзя. Но после того как удар закончился и сталкивающиеся тела соединились в одно тело, законом сохранения энергии уже можно пользоваться (если, конечно, в дальнейшем не действуют диссипативные силы).

В качестве примера рассмотрим задачу о *баллистическом маятнике.* Он применяется для измерения скорости пуль или снарядов. Баллистический маятник обычно представляет собой подвешенный большой ящик с песком или землей, который может колебаться вокруг горизонтальной оси. Пуля или снаряд, попадая в маятник, останавливается в нем, и маятник отклоняется. Для простоты расчета будем считать маятник математическим. Процесс столкновения происходит настолько быстро, что за время столкновения маятник не успевает отклониться на заметный угол. В результате удара он только приходит в движение, и задача прежде всего заключается в том, чтобы найти скорость этого движения v непосредственно после того, как удар закончился. До удара, когда маятник находился в равновесии, внешние силы (сила веса и сила натяжения подвеса), действующие на него,

уравновешивались. Во время удара равновесие этих сил нарушается, и появляются новые силы, например силы трения. Однако во время самого удара все эти силы можно не принимать во внимание, так как они пренебрежимо малы по сравнению с силой, которая действует на маятник со стороны налетающих на него пули и снаряда. Иными словами, систему, состоящую из маятника и пули (снаряда) (рис. 48), во время удара можно считать замкнутой и применять к ней закон сохранения импульса. Из этого закона и найдется искомая скорость v, которую получит система непосредственно после удара:

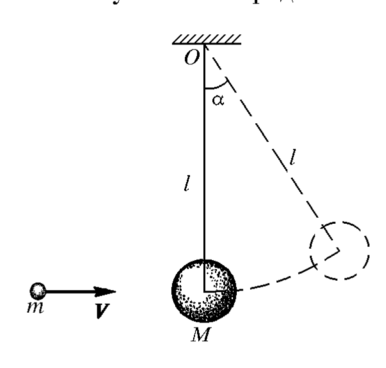


Рис. 48

$$v = \frac{m}{M+m} V,$$

где V — скорость пули до удара. После того как удар закончился, действие (внутренних) диссипативных сил прекращается. Поэтому к процессам после удара применим закон сохранения энергии. Скорость v надо рассматривать как начальную скорость, с которой начнет колебаться маятник в нижнем положении. В этом положении маятник и пуля (снаряд) обладают кинетической энергией $\frac{1}{2}(M+m)v^2$, которая при отклонении маятника переходит в потенциальную энергию $(M+m)gh$. Отсюда находится высота поднятия:

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{m}{M+m}\right)^2 V^2. \tag{26.3}$$

Измерив высоту h, можно вычислить скорость пули V.

Было бы грубой ошибкой рассуждать следующим образом. В нижним положении (до удара) энергия системы равна кинетической энергии $mV^2/2$. При поднятии маятника эта энергия переходит в потенциальную энергию $(M+m)gh$. Такой способ рассуждения приводит к ошибочной формуле

$$h = \frac{1}{2g}\frac{m}{M+m}V^2.$$

Так как в случае баллистического маятника $m \ll M$, то эта формула дает совершенно неправильное (завышенное во много раз) значение для высоты h. Только в другом предельном случае, когда $m \gg M$, обе формулы фактически совпадают, как это ясно и без всяких вычислений. Ошибка приведенного рассуждения состоит в том, что оно не учитывает потери механической энергии при ударе.

При практических вычислениях удобно выразить высоту h через угол отклонения маятника из положения равновесия α, который легче поддается из-

мерению, чем высота h. Очевидно, $h = l(1 - \cos\alpha) = 2l\sin^2(\alpha/2)$, где l — длина маятника. Пользуясь этим выражением, формулу (26.3) нетрудно привести к виду

$$V = 2\,\frac{M+m}{m}\sqrt{gl}\,\sin\frac{\alpha}{2} \approx 2\,\frac{M}{m}\sqrt{gl}\,\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (26.4)$$

§ 27. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ. ОБЩЕФИЗИЧЕСКИЙ ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

1. Потеря кинетической энергии без соответствующего увеличения потенциальной, о которой говорилось в предыдущем параграфе, происходит не только при неупругих ударах, но и во многих других процессах. Например, движения в замкнутой системе, где действуют силы трения, в конце концов прекращаются, так что запас кинетической энергии в системе уменьшается. Может происходить и потеря потенциальной энергии. Так, например, если растянуть пружину, перейдя при этом предел упругости, а затем предоставить ее самой себе, то она не возвращается в исходное состояние, в пружине сохраняется некоторое остаточное удлинение. При этом работа, которую в состоянии совершить растянутая пружина, меньше работы, затраченной на ее растяжение. Во всех подобных случаях наблюдаются потери механической энергии. Формальная макроскопическая механика объясняет эти потери тем, что энергия расходуется на работу против диссипативных сил, действующих в системе. Однако такое объяснение является чисто формальным и нефизическим, поскольку оно совсем не раскрывает физическую природу диссипативных сил.

2. Надо учесть, что всякий раз, когда наблюдается потеря механической энергии, в системе происходят какие-то внутренние изменения. Если, например, с помощью чувствительного термометра или термопары измерить температуру шаров до и после неупругого удара, то опыт покажет, что в результате удара шары немного нагрелись. То же самое происходит при трении и остаточной деформации. При положительном и интенсивном трении нагревание настолько сильное, что для его обнаружения не требуется никаких специальных приборов. Дикари добывали огонь трением одного куска дерева о другой. Если на ось мотора насадить диск из прочного картона (толщиной около 1 мм) и привести его в быстрое вращение, то можно перепилить деревянную доску, поднеся ее к краю этого вращающегося диска (картонная пила). Явление объясняется тем, что в месте контакта вращающегося картона с доской выделяется много тепла из-за трения. Дерево в этом месте сильно разогревается, обугливается и разрезается вращающимся диском. Картонный диск при этом не разрушается, так как он интенсивно охлаждается из-за быстрого вращения в окружающем воздухе. Разрез доски получается гладким и хорошо отполированным. Он имеет буроватую окраску из-за обугливания дерева при трении. Решающую роль в этом опыте играет натяжение картона, возникающее при вращении и придающее ему твердость. Вращением доски вокруг картонного диска ее распилить нельзя.

Могут быть и более сложные явления, сопровождающие потери механической энергии. Примером может служить следующая демонстрация. На вал небольшой динамомашины надет деревянный шкив, на который намотана длинная прочная нить. Нить перекинута через блок, укрепленный около потолка аудитории. К ее свободному концу подвешен груз в несколько килограммов. Вращая шкив, поднимают груз к потолку аудитории. Цепь динамомашины может замыкаться через ключ на небольшую электрическую цепочку. Если отпустить шкив, не замыкая цепи лампочки, то динамомашина не вырабатывает электрического тока. В этом случае груз падает ускоренно — потенциальная энергия груза переходит в кинетическую энергию. Если снова поднять груз и замкнуть цепь лампочки, когда он пройдет приблизительно половину пути до пола, то лампочка загорается, а движение груза и вращение динамомашины заметно затормозятся. После этого груз медленно опускается до пола с постоянной скоростью, а лампочка горит постоянным накалом во все время падения груза. Потенциальная энергия груза непрерывно уменьшается. Однако она не пропадает бесследно: динамомашина непрерывно вырабатывает электрический ток, выделяющий тепло в нити лампочки.

3. Макроскопическая механика учитывает только кинетическую энергию макроскопического движения тел и их макроскопических частей, а также их потенциальную энергию. Но она полностью отвлекается от внутреннего атомистического строения вещества. При ударе, трении и аналогичных процессах кинетическая энергия видимого движения тел не пропадает. Она только переходит в кинетическую энергию невидимого беспорядочного движения атомов и молекул вещества, а также в потенциальную энергию их взаимодействия. Эта часть энергии тела получила название *внутренней энергии.* Беспорядочное движение атомов и молекул воспринимается нашими органами чувств в виде *тепла.* Таково физическое объяснение кажущейся потери механической энергии при ударе, трении и пр.

Представление о теплоте как о беспорядочном движении атомов и молекул окончательно утвердилось во второй половине XIX века и составило эпоху в науке. Примерно тогда же в физике утвердился и взгляд на закон сохранения энергии как на *общефизический закон,* не знающий никаких исключений. Согласно этому закону *энергия никогда не создается и не уничтожается, она может только переходить из одной формы в другую.* Однако необходимо расширить понятие энергии, введя *новые формы ее*: энергию электромагнитного поля, ядерную энергию и пр. При этом необходимо заметить, что дать окончательную классификацию различных видов энергии не представляется возможным. Это можно было бы сделать, если бы окончательно были установлены все законы природы, и развитие науки, во всяком случае в ее основах, было бы окончательно завершено.

Деление энергии на кинетическую и потенциальную имеет смысл только в механике и не охватывает всех форм энергии. Кроме того, отнесение энергии к тому или иному виду часто зависит от точки зрения. Например, в макроскопической механике упругая

энергия сжатого идеального газа считается потенциальной. Но с молекулярной точки зрения упругость газа объясняется тепловым движением его молекул. Поэтому с этой точки зрения ту же энергию следует считать кинетической.

4. Принцип сохранения энергии, наряду с громадными конкретными применениями к уже известным явлениям, дает руководящие указания и в не исследованных областях. Всякое кажущееся нарушение этого принципа указывает на существование новых явлений, не укладывающихся в рамки существующих научных концепций. Так было, например, при открытии *радиоактивности.* Так было и с открытием *нейтрино.* На опыте были обнаружены кажущиеся нарушения законов сохранения энергии и импульса в явлениях β-распада атомных ядер. Это обстоятельство вынудило физика-теоретика Вольфранга Паули (1900—1958) ввести гипотезу, впоследствии подтвержденную экспериментально, что в β-распаде наряду с известными заряженными частицами (электронами и атомными ядрами) участвует еще неизвестная нейтральная частица, которая и была названа *нейтрино.* Эта частица и уносит недостающие энергию и импульс. Благодаря исключительно слабому взаимодействию с веществом она ускользает от наблюдения. (Позднее, когда было выяснено, что каждой частице соответствует античастица, оказалось, что в явлениях электронного β-распада участвует не нейтрино, а *антинейтрино.*)

Общефизический принцип сохранения энергии охватывает, таким образом, не только явления, рассматриваемые в макроскопической механике, но и такие физические явления, к которым законы такой механики не применимы. Поэтому он не может быть выведен из уравнений макроскопической механики, а должен рассматриваться как *одно из наиболее широких обобщений опытных фактов.*

§ 28. АБСОЛЮТНО УПРУГИЙ УДАР

1. Интересные превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно наблюдаются при *абсолютно упругом ударе.* Так называется столкновение тел, в результате которого их внутренние энергии не меняются. В чистом виде такой случай при столкновении макроскопических тел не встречается. Но к нему можно подойти довольно близко. Это имеет место, например, при столкновениях бильярдных шаров из слоновой кости или подходящей пластмассы. При столкновениях атомных, ядерных или элементарных частиц может реализоваться и случай абсолютно упругого удара в чистом виде. Такая возможность связана с *квантовыми законами.* Внутренние состояния и соответствующие им значения внутренней энергии атомных частиц *дискретны* (*квантованы*). Частицы при столкновении могут разлететься без изменения внутренних состояний. Тогда столкновение и будет абсолютно упругим. Так будет всегда, когда

кинетической энергии сталкивающихся частиц недостаточно, чтобы перевести хотя бы одну из них из *нормального* в ближайшее *возбужденное* состояние, характеризующееся бо́льшим значением внутренней энергии. При больших энергиях столкновение может сопровождаться возбуждением одной или обеих частиц с увеличением их внутренних энергий. Наконец, может быть и такой случай, когда сталкиваются возбужденные частицы и в результате столкновения их внутренние энергии уменьшаются. Во всех таких случаях говорят о *неупругих ударах.*

2. Рассмотрим сначала *центральные удары* абсолютно упругих шаров. В этом случае скорости шаров до удара v_1 и v_2 направлены вдоль прямой, соединяющей их центры. Эта прямая называется *линией центров.* При столкновении кинетическая энергия шаров $1/2\,(m_1 + m_2)\,V^2$, связанная с движением их центра масс, измениться не может, так как не может измениться скорость самого центра масс. Может претерпевать превращения только кинетическая энергия $1/2\,\mu(v_1 - v_2)^2$ относительного движения шаров. В случае абсолютно упругого удара шары при столкновении сплющиваются, и кинетическая энергия частично переходит в потенциальную энергию упругих деформаций. В некоторый момент вся кинетическая энергия относительного движения $1/2\,\mu(v_1 - v_2)^2$ переходит в потенциальную энергию упруго-деформированных шаров. В этот момент шары аналогичны сжатым пружинам, стремящимся перейти в недеформированное состояние. Ввиду этого начинается обратный процесс перехода энергии упругих деформаций в кинетическую энергию поступательного движения шаров. Когда он заканчивается, шары разлетаются в разные стороны и вновь оказываются недеформированными. Таким образом, кинетическая энергия поступательного движения шаров снова принимает исходное значение, каким оно было до удара. Для реальных тел этот процесс осложняется возникновением упругих возмущений, распространяющихся в шарах со скоростью звука, излучением звуковых волн, а также внутренним трением и остаточными деформациями. После столкновения часть энергии уносится в виде энергии таких упругих возмущений, внутренних движений и звуковых волн, излученных в окружающую среду. Эта часть энергии в конце концов переходит в тепловую (внутреннюю) энергию. Она может быть очень малой и в предельном случае идеально упругих шаров обращается в нуль.

3. Скорости шаров после столкновения v_1' и v_2' легко найти из законов сохранения импульса тела и энергии:

$$\begin{gathered} m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2, \\ \frac{1}{2}\,m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}\,m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2}\,m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2 v_2^2. \end{gathered} \qquad (28.1)$$

Так как одно из этих уравнений квадратное, а другое — линейное, то система (28.1) должна иметь два решения относительно неизвестных v_1' и v_2'. Одно из этих решений можно указать сразу, а именно $v_1' = v_1$, $v_2' = v_2$. Но это решение не удовлетворяет условию задачи. Ему соответствует случай, когда скорости шаров не изменились, т. е. шары не претерпели столкновения. Существование такого решения неизбежно. Действительно, законы сохранения импульса и энергии можно написать для двух любых состояний системы, разделенных каким-то промежутком времени Δt. Но в самих законах сохранения еще не заложено условие, что столкновение произошло. Это условие должно быть указано дополнительно. Если столкновение не произошло, то скорости шаров не могли измениться, и мы получаем решение $v_1' = v_1$, $v_2' = v_2$, указанное выше. Чтобы получить решение, относящееся к столкновению, очевидно, надо потребовать, чтобы скорости шаров *изменились*, т. е. чтобы $v_1' \neq v_1$, $v_2' \neq v_2$. Заметив это, перепишем уравнения (28.1) в виде

$$m_1(v_1' - v_1) = m_2(v_2 - v_2'), \quad m_1(v_1'^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - v_2'^2).$$

Так как $v_1' - v_1$ и $v_2' - v_2$ не равны нулю, то уравнения можно поделить почленно. Это дает

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'.$$

В результате задача сводится к решению системы двух линейных уравнений. Решая их, найдем единственное решение

$$v_1' = -v_1 + 2\,\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad v_2' = -v_2 + 2\,\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \qquad (28.2)$$

удовлетворяющее условию задачи.

4. Полезно привести другой способ решения той же задачи. Он сокращает вычисления и лучше выявляет структуру окончательных формул. Рассмотрим процесс удара сначала в *системе центра масс*, т. е. в такой системе отсчета, в которой центр масс неподвижен. Относительно неподвижной системы отсчета (ее называют *лабораторной*) центр масс движется со скоростью

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \qquad (28.3)$$

Скорости в системе центра масс будем обозначать прежними буквами, но с индексом 0. Полный импульс в системе центра масс равен нулю, и законы сохранения импульса и энергии в такой системе запишутся в виде

$$\begin{gathered} m_1 v_{10}' + m_2 v_{20}' = m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = 0, \\ \frac{1}{2}\, m_1 v_{10}'^2 + \frac{1}{2}\, m_2 v_{20}'^2 = \frac{1}{2}\, m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2}\, m_2 v_{20}^2. \end{gathered} \qquad (28.4)$$

Эта система уравнений имеет два решения, которые могут быть указаны без вычислений. Первое решение

$$v'_{10} = v_{10}, \quad v'_{20} = v_{20}$$

не удовлетворяет условиям задачи. Годится только второе решение, а именно

$$v'_{10} = -v_{10}, \quad v'_{20} = -v_{20}.$$

Мы видим, что в системе центра масс столкновение приводит просто к изменению знака каждой из скоростей.

Перейдем теперь к лабораторной системе отсчета. Очевидно, $v_{01} = v_1 - V$, $v'_{01} = v'_1 - V$ и т. д. Поэтому

$$(v'_1 - V) = -(v_1 - V), \quad (v'_2 - V) = -(v_2 - V),$$

откуда

$$v'_1 = -v_1 + 2V, \quad v'_2 = -v_2 + 2V. \tag{28.5}$$

Подставив сюда значение для V из (28.3), придем к прежним формулам (28.2).

5. Допустим, что второй шар вначале был неподвижным ($v_2 = 0$). Тогда

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

Если $m_1 > m_2$, то первый шар будет двигаться в первоначальном направлении. При $m_1 < m_2$ он отскочит в противоположном направлении. При $m_1 = m_2$ первый шар остановится, а второй пойдет вперед со скоростью первого. Вообще, при $m_1 = m_2$ из формул (28.2) получаем

$$v'_1 = v_2, \quad v'_2 = v_1,$$

т. е. *при столкновении двух одинаковых абсолютно упругих шаров они просто обмениваются скоростями.*

Рассмотрим рад соприкасающихся одинаковых абсолютно упругих шаров, центры которых расположены вдоль одной и той же прямой линии (рис. 49). В соответствующем демонстративном опыте шары подвешиваются на нитях, а не располагаются на поверхности стола, чтобы не возникало вращение их из-за трения между шарами и поверхностью стола. Отклоним в сторону шар *1*. Ударившись о шар *2* со скоростью v, он передаст ему эту скорость, а сам остановится. С шаром *2* произойдет то же самое — при ударе о шар *3* он остановится, а шар *3* придет в движение со скоростью v. Этот процесс будет повторяться с каждым впереди находящимся шаром. В конце концов последний шар отскочит со скоростью v, а все прочие шары останутся в состоянии покоя.

Отклоним теперь два шара. При возвращении в нижнее положение они приобретут одну и ту же скорость v и, двигаясь с такой ско-

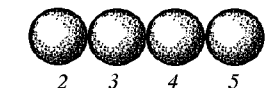
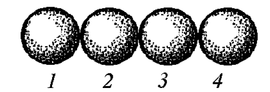
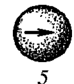





Рис. 49

ростью, ударят впереди находящийся шар (рис. 50). Оказывается, что в результате удара отскочат два последних шара со скоростью v, а все остальные шары останутся в покое. Явление можно объяснить следующим образом. Шар *2* ударяет в шар *3*. В результате этого шар *2* останавливается, а шар *3* приобретает скорость v. Однако шар *2* сразу же подвергается удару со стороны шара *1* и снова приобретает преж-

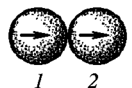
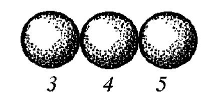
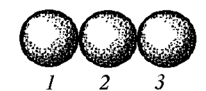
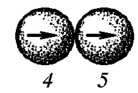





Рис. 50

нюю скорость v. Таким образом, шар *1* придет в состояние покоя, а шары *2* и *3* будут двигаться вместе со скоростью v. Повторяя это рассуждение, найдем, что затем остановится шар *2*, а начнут двигаться шары *3* и *4* и т. д. В конце концов скорость v приобретут два последних шара, а все остальные шары придут в состояние покоя. Вместо двух можно отклонить три, четыре и т. д. шара, сообщив им одну и ту же скорость v. После удара отскочит такое же количество шаров, остальные же шары останутся неподвижными.

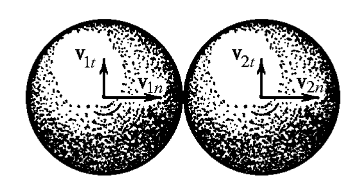


Рис. 51

6. Рассмотрим теперь *нецентральный удар* твердых упругих шаров. Так называется столкновение, когда в момент удара начальные скорости шаров не совпадают по направлению с линией центров. Разложим в момент столкновения начальную скорость каждого шара на нормальную v_n и тангенциальную v_t составляющие, т. е. составляющие вдоль линии центров и перпендикулярно к ней (рис. 51). Так же поступим с конечными скоростями шаров в момент начала их разлета. Тогда законы сохранения импульса тела и энергии запишутся в виде

$$
\begin{gathered}
m_1 v'_{1n} + m_2 v'_{2n} = m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}, \\
m_1 v'_{1t} + m_2 v'_{2t} = m_1 v_{1t} + m_2 v_{2t}, \qquad (28.6) \\
\frac{1}{2} m_1 (v'^2_{1n} + v'^2_{1t}) + \frac{1}{2} m_2 (v'^2_{2n} + v'^2_{2t}) = \frac{1}{2} m_1 (v^2_{1n} + v^2_{1t}) + \frac{1}{2} m_2 (v^2_{2n} + v^2_{2t}).
\end{gathered}
$$

Получилось всего три уравнения для определения четырех неизвестных v'_{1n}, v'_{1t}, v'_{2n}, v'_{2t}. Чтобы написать недостающее уравнение, введем предположение,

что *при столкновении шаров не возникают тангенциальные силы.* В сущности, ввести такое предположение вынуждает нас закон сохранения энергии, уже использованный при написании наших уравнений. Действительно, если бы тангенциальные скорости сталкивающихся шаров были одинаковы ($v_{1t} = v_{2t}$), то рассматриваемый случай сводился бы к случаю центрального удара, уже разобранному выше. Для этого достаточно было бы перейти в систему отсчета, в которой $v_{1t} = v_{2t}$. Поэтому без ущерба для общности мы будем предполагать, что $v_{1t} \neq v_{2t}$. Но тогда, если бы при столкновении развивались тангенциальные силы трения скольжения, механическая энергия не могла бы сохраняться. Поэтому, предполагая удар идеально упругим, мы должны считать сами шары *идеально гладкими.* При их столкновении тангенциальные силы не возникают. Если так, то не происходит также изменения тангенциальных скоростей, и к уравнениям (28.6) следует присоединить уравнения $v'_{1t} = v_{1t}$, $v'_{2t} = v_{2t}$. Тогда останутся только уравнения для нормальных скоростей, отличающиеся от уравнений (28.1) лишь обозначениями. В результате мы приходим к следующему заключению.

При столкновении гладких идеально упругих шаров их тангенциальные скорости не изменяются. Нормальные же скорости изменяются так же, как и скорости при центральном ударе. В частности, при столкновениях не изменяются состояния вращения шаров. Это было бы возможно только при наличии тангенциальных сил. *Если шары одинаковы, то при столкновении они обмениваются нормальными скоростями, тангенциальные скорости их остаются неизменными.*

7. Отметим случай, когда масса одного из шаров бесконечно велика. В этом случае скорость большего шара при столкновении вообще не изменится. Устремляя радиус этого шара к бесконечности, в пределе придем к задаче о столкновении гладкого упругого шара с *гладкой плоской стенкой.* Если связать систему отсчета с такой стенкой, то можно сказать, что при столкновении с ней тангенциальная скорость шара не меняется, а нормальная меняет знак. Это значит, что шар отражается от стенки «*зеркально*»: его скорость по модулю не изменяется, а угол падения равен углу отражения.

Удар под углом о массивную стенку сообщает ей конечный импульс, в то время как кинетическая энергия, приобретаемая стенкой, пренебрежимо мала. Например, если удар нормальный, то скорость шара v после удара становится равной $-v$, а импульс шара получает приращение $-2mv$. Чтобы общий импульс не изменился, стенка должна воспринять импульс $MV = 2mv$, проявляющийся в конечной силе удара, действующей на стенку. При этом стенка получает скорость $V = 2\frac{mv}{M}$, которая для массивной стенки бесконечно мала. Бесконечно мала и кинетическая энергия, приобретаемая стенкой. Действительно, ее можно представить в виде $\frac{MV^2}{2} = MV \cdot \frac{V}{2}$, т. е. в виде произведения конечного импульса MV на половину бесконечно малой скорости $V/2$.

ЗАДАЧИ

1. На гладком горизонтальном столе лежит шар массой m_1, соединенный с пружиной жесткости k. Второй конец пружины закреплен (рис. 52). Происходит лобовое упругое соударение этого шара с другим шаром, масса которого m_2 меньше m_1, а скорость равна v. В какую сторону будет двигаться второй шар после удара? Определить амплитуду колебаний первого шара A после соударения.

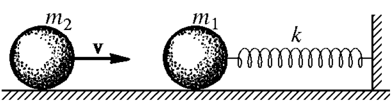


Рис. 52

Ответ. После соударения второй шар отскочит назад.

$$A = \frac{2m_2 v}{m_1 + m_2}\sqrt{\frac{m_1}{k}}.$$

2. Система состоит из двух шаров с массами m и M, соединенных между собой невесомой пружиной жесткости k (рис. 53). Третий шар массой m, движущейся вдоль оси пружины со скоростью v, претерпевает упругое столкновение с шаром m, как указано на рис. 53. Считая шары абсолютно жесткими, найти после столкновения: 1) кинетическую энергию K движения системы как целого; 2) внутреннюю энергию системы $E_{\text{вн}}$; 3) амплитуду колебаний A одного шара относительно другого . До удара система покоилась, а пружина не была деформирована. Какие шары могут рассматриваться как абсолютно жесткие?

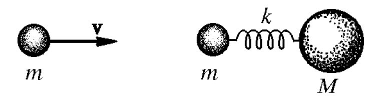


Рис. 53

Ответ. 1) $K = \frac{(mv)^2}{2(M+m)}$; 2) $E_{\text{вн}} = \frac{Mmv^2}{2(M+m)}$; 3) $A = v\sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}}$.

3. Ядра дейтерия D и трития T могут вступать в реакцию

$$\mathrm{D + T \to {}^4He + n} + 17{,}6\ \text{МэВ},$$

в результате которой образуются нейтроны n и α-частицы, т. е. ядра гелия ^{4}He. При каждой реакции выделяется энергия 17,6 МэВ. Определить, какую энергию уносит нейтрон и какую — α-частица. Кинетические энергии, которыми обладали частицы до реакции, пренебрежимо малы.

Пояснение. Дейтерий — изотоп водорода с атомной массой 2, тритий — изотоп водорода с атомной массой 3, ^{4}He — обычный гелий с атомной массой 4.

Ответ. α-частица уносит 3,5 МэВ, нейтрон — 14,1 МэВ.

4. Ядра дейтерия D могут вступать друг с другом в реакцию, в результате которой образуется протон и ядра трития T. Каждый протон уносит кинетическую энергию 3 МэВ. Какую кинетическую энергию уносит ядро атома трития и каков общий энергетический выход реакции? Кинетические энергии, которыми обладали частицы до реакции, пренебрежимо малы.

Ответ. Ядро трития уносит энергию 1 МэВ; общий энергетический выход реакции 4 МэВ.

5. Ядра дейтерия могут вступать также в реакцию

$$\mathrm{D + D \to {}^3He + n} + 3{,}25\ \text{МэВ}.$$

Какую энергию уносит нейтрон и какую — ядро гелия ^{3}He с атомной массой 3? Кинетические энергии, которыми обладали частицы до реакции, пренебрежимо малы.

Ответ. Нейтрон уносит энергию 2,44 МэВ, ядро ^{3}He — 0,81 МэВ.

6. В реакции

$$^3\text{He} + \text{D} \to {}^4\text{He} + \text{p}$$

получаются протоны с энергией 14,6 МэВ. Какую энергию уносит ядро гелия-4 (^{4}He) и какой общий энергетический выход реакции? Кинетические энергии, которыми обладали частицы до реакции, пренебрежимо малы.

Ответ. Ядро ^{4}He уносит энергию 3,7 МэВ, общий энергетический выход реакции 18,3 МэВ.

7. Движущаяся частица претерпевает упругое столкновение с покоящейся частицей такой же массы. Доказать, что после столкновения, если оно не было лобовым, частицы разлетятся под прямым углом друг к другу. Как будут двигаться частицы после лобового столкновения? При столкновении вращения не возникает.

Решение. Пусть $\mathbf{v}$ — скорость первой частицы до столкновения, $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — скорости частиц после столкновения. Законы сохранения импульса и энергии дают

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad v^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

Возводя первое соотношение в квадрат и вычитая из него второе, получим $(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2) = 0$. Если оба вектора $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ не равны нулю, что будет при не лобовом ударе, то угол между ними равен 90°. При лобовом столкновении $v_1 = 0$, $v_2 = v$, т. е. частицы просто обмениваются скоростями.

8. При бомбардировке гелия α-частицами с энергией 1 МэВ найдено, что налетающая частица отклонилась на 60° от первоначального направления полета. Считая удар упругим, определить энергию частицы и энергию ядра отдачи.

Ответ. 1/4 МэВ и 3/4 МэВ.

9. Определить долю энергии, теряемую частицей массой m_1 при упругом столкновении ее с неподвижной частицей массой m_2, если после столкновения частица продолжает двигаться в прежнем (когда $m_1 > m_2$) или прямо противоположном (когда $m_1 < m_2$) направлениях. Показать, что доля теряемой энергии не зависит от того, какая частица движется, а какая покоится. При каком соотношении масс m_1/m_2 потеря энергии максимальна? Используя полученные результаты, объяснить, почему в ядерных реакторах для замедления нейтронов используется рассеяние их на ядрах легких (дейтерий, углерод), а не тяжелых атомов.

Ответ. $\dfrac{\Delta E}{E} = 4\dfrac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$. Потеря энергии максимальна при $m_1 = m_2$.

10. Определить долю энергии α, теряемую протоном при упругом рассеянии под углом 180° на протоне, дейтроне, ядре гелия и ядре углерода.

Ответ. $\alpha = 4A/(1 + A)^2$, где A — атомная масса частицы, с которой сталкивается протон:

A	1	2	3	12,
α	1	0,89	0,64	0,284,

11. Каков максимальный угол ϑ рассеяния α-частицы и дейтрона при упругом рассеянии в водороде?

Решение. Пусть m_1 — масса рассеиваемой частицы (α-частицы или дейтрона), v — ее скорость до рассеяния; m_2 — масса рассеивающей частицы (атома водорода); v_1 и v_2 — скорости частицы после рассеяния (рис. 54). Законы сохранения импульса и энергии дают

$$m_1 v = m_1 v_1 \cos\alpha + m_2 v_2 \cos\beta,$$

$$m_1 v_1 \sin\alpha = m_2 v_2 \sin\beta,$$

$$m_1 v^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2.$$

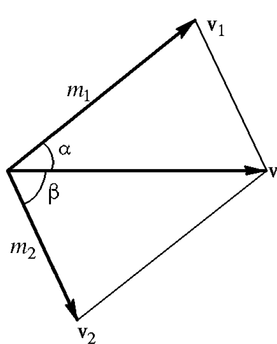


Рис. 54

Исключив отсюда угол β и скорость v_2, получим для v_1 квадратное уравнение

$$(m_1 + m_2) v_1^2 - 2 m_1 v v_1 \cos\alpha + (m_1 - m_2) v^2 = 0.$$

Условие вещественности корней его, как легко видеть, имеет вид $\sin\alpha \leqslant m_2/m_1$. Максимальный угол α, удовлетворяющий этому условию, и будет равен углу ϑ. Таким образом, $\sin\vartheta = m_2/m_1$. Отсюда находим для α-частицы $\vartheta = 14°\,30'$, для дейтрона $\vartheta = 30°$.

12. Альфа-частица, летящая со скоростью v_0, испытывает упругое столкновение с неподвижным ядром и летит под углом 90° к первоначальному направлению движения. При каком соотношении масса α-частицы m и ядра M это возможно? Определить скорость α-частицы и ядра V после столкновения. Определить также угол ϑ между направлением скорости вылетающего ядра и первоначальным направлением движения α-частицы.

Ответ. Масса α-частицы должна быть меньше массы ядра: $m < M$;

$$v = v_0 \sqrt{\frac{M-m}{M+m}},$$

$$V = \frac{m v_0}{M} \sqrt{\frac{2M}{M+m}},$$

$$\operatorname{tg}\vartheta = \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}.$$

13. Частица массой m, летящая горизонтально со скоростью V, сталкивается с невозбужденным неподвижным атомом массой M, после чего она отскакивает и летит в прямо противоположном направлении с половинной скоростью $V/2$, а атом переходит в возбужденное состояние, т. е. в состояние с более высокой внутренней энергией. Определить скорость атома v после столкновения и энергию E, которая пошла на возбуждение атома. Для каких невозбужденных атомов описанный процесс невозможен?

Ответ. $v = \frac{3}{2} m V/M$, $E = \frac{3}{8} m V^2 \left(1 - \frac{3m}{M}\right)$. Процесс невозможен, если $M < 3m$.

14. Ядра дейтерия и трития летят навстречу друг другу таким образом, что центр масс этих частиц остается неподвижным. Суммарная кинетическая энергия обеих частиц равна $E = 15$ кэВ. До какой энергии E_D надо ус-

корить ядро дейтерия, оставляя тритий неподвижным, чтобы получить тот же выход реакции? Какая энергия E_{T} потребуется для той же цели, если ускорять тритий?

Рассматриваемая реакция, а также реакция, о которой говорится в следующей задаче, являются основными реакциями, с помощью которых предполагается осуществить управляемую термоядерную реакцию синтеза для использования в мирных целях.

Ответ. $E_{\text{D}} = \dfrac{m_{\text{D}} + m_{\text{T}}}{m_{\text{T}}} E = \dfrac{5}{3} E = 25$ кэВ,

$$E_{\text{T}} = \frac{m_{\text{D}} + m_{\text{T}}}{m_{\text{D}}} E = \frac{5}{2} E = 37{,}5 \text{ кэВ}.$$

15. Ядро дейтерия сталкивается и вступает в реакцию с ядром трития. Предполагается осуществить этот процесс, ускорив перед столкновением лишь одну частицу до энергии $E = 20$ кэВ, оставив вторую неподвижной. Что выгоднее для осуществления реакции: ускорить легкую или тяжелую частицу? Предполагается, что удар между частицами центральный.

Ответ. Если ускорить дейтерий, то энергия

$$\frac{E}{1 + m_{\text{T}}/m_{\text{D}}} = 8 \text{ кэВ},$$

связанная с движением центра масс, не может принимать участие в реакции. В случае ускорения трития эта энергия равна

$$\frac{E}{1 + m_{\text{D}}/m_{\text{T}}} = 12 \text{ кэВ}.$$

Выгоднее ускорять дейтерий. Выигрыш в энергии в этом случае по сравнению с другим будет

$$\frac{m_{\text{T}} - m_{\text{D}}}{m_{\text{T}} + m_{\text{D}}} E = \frac{1}{5} E = 4 \text{ кэВ}.$$

16. Первая искусственная ядерная реакция

$$^{14}\text{N} + {}^{4}\text{He} = {}^{17}\text{O} + \text{p}$$

наблюдалась Резерфордом в 1919 г. Она идет с поглощением энергии $E = 1{,}13$ МэВ. Какую минимальную энергию E_0 надо сообщить в лабораторной системе α-частице (т. е. ядру атома гелия), чтобы при бомбардировке неподвижной мишени из ^{14}N указанная реакция могла пойти?

Решение. Обозначим через p_0 импульс α-частицы до столкновения. В результате столкновения импульс не изменяется. С ним связана кинетическая энергия движения центра масс

$$K_{\text{ц. м}} = \frac{p_0^2}{2(m_{\text{He}} + m_{\text{N}})} = \frac{m_{\text{He}}}{m_{\text{He}} + m_{\text{N}}} E_0,$$

которая также не изменяется, а потому никак не участвует в ядерных превращениях.

Следовательно, искомая энергия найдется из условия

$$E_0 = E + K_{\text{ц. м}} = E + \frac{m_{\text{He}}}{m_{\text{He}} + m_{\text{N}}} E_0,$$

откуда

$$E_0 = \frac{m_{\text{He}} + m_{\text{N}}}{m_{\text{N}}} E = 1{,}45 \text{ МэВ}.$$

17. *Пороговой энергией* $E_{\text{пор}}$ или *порогом* ядерной реакции называется такая энергия бомбардирующей частицы, что ядерная реакция при неподвижной мишени может идти только тогда, когда энергия E бомбардирующей частицы равна или превосходит $E_{\text{пор}}$, а при $E < E_{\text{пор}}$ реакция невозможна. Пороговая энергия ядерной реакции $^7\text{Li} + \text{p} \to {}^7\text{Be} + \text{n}$ (литий неподвижен) равна $E_{\text{пор}} = 1{,}88$ МэВ. При каких энергиях бомбардирующих протонов E_{p} нейтроны в такой реакции могут лететь назад от литиевой мишени?

Решение. Минимальное значение искомой энергии протона E_{p} соответствует лобовому столкновению, когда все частицы до и после столкновения движутся вдоль одной и той же прямой. Поэтому можно ограничиться только такими столкновениями.

Допустим сначала, что энергия бомбардирующего протона равна пороговой $E_{\text{пор}}$. Тогда получающиеся в результате реакции ядро Be и нейтрон в системе центра масс должны находиться в состоянии покоя, а потому в лабораторной системе двигаться вперед с одинаковыми скоростями. При таком движении они уносят кинетическую энергию

$$E_0 = \frac{P_{\text{пор}}^2}{2(m_{\text{Be}} + m_{\text{n}})},$$

где $P_{\text{пор}}$ — импульс протона, соответствующий пороговой энергии

$$E_{\text{пор}} = \frac{P_{\text{пор}}^2}{2m_{\text{p}}}.$$

Разность этих двух энергий

$$E_{\text{пор}} - E_0 = \frac{m_{\text{Be}} + m_{\text{n}} - m_{\text{p}}}{m_{\text{Be}} + m_{\text{n}}} E_{\text{пор}} \tag{28.7}$$

затрачивается на ядерную реакцию.

Найдем теперь энергию бомбардирующего протона E_{p}, при которой получаются нейтроны в состоянии покоя, а ядра бериллия летят вперед. Если P_{p} — импульс протона до реакции, то

$$E_{\text{p}} = \frac{P_{\text{p}}^2}{2m_{\text{p}}},$$

а кинетическая энергия образовавшегося ядра бериллия $E_{\text{Be}} = P_{\text{p}}^2/2m_{\text{Be}}$. Разность этих энергий

$$E_{\text{p}} - E_{\text{Be}} = \frac{1}{2} P_{\text{p}}^2 \left(\frac{1}{m_{\text{p}}} - \frac{1}{m_{\text{Be}}}\right) = \frac{m_{\text{Be}} - m_{\text{p}}}{m_{\text{Be}}} E_{\text{p}} \tag{28.8}$$

идет на ядерную реакцию, а потому равна величине (28.7). Приравнивая выражения (28.7) и (28.8), находим

$$E_{\text{p}} = \frac{m_{\text{Be}}(m_{\text{Be}} + m_{\text{n}} - m_{\text{p}})}{m_{\text{Be}}^2 - m_{\text{p}}^2} E_{\text{пор}},$$

или, пренебрегая различием масс протона и нейтрона,

$$E_{\text{р}} = \frac{m_{\text{Be}}^2}{m_{\text{Be}}^2 - m_{\text{p}}^2} E_{\text{пор}} = \frac{49}{48} E_{\text{пор}} = 1{,}92 \text{ МэВ}.$$

При больших энергиях появятся нейтроны, летящие назад.

§ 29. СИЛЫ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

1. *Взаимодействие тел можно описывать либо с помощью сил, либо с помощью потенциальной энергии как функции координат взаимодействующих частиц.* В макроскопической механике применимы оба способа. Первый способ обладает несколько большей общностью, так как он применим и к таким силам (например, силам трения), для которых нельзя ввести потенциальную энергию. Второй же способ применим только в случае консервативных сил. Но в квантовой механике, имеющей дело с явлениями микромира, диссипативных сил нет, и в ней для описания взаимодействия частиц применяется исключительно второй способ. В уравнения движения квантовой механики силы не входят, а входит лишь потенциальная энергия взаимодействующих частиц. Разумеется, в этом параграфе вопрос рассматривается только в рамках макроскопической механики.

2. Зная действующие силы как функции координат материальных точек системы, можно вычислить ее потенциальную энергию. Эта задача решается *интегрированием.* Простейшие примеры на такое вычисление были приведены в § 25. Можно поставить и обратную задачу: вычислить действующие силы по заданной потенциальной энергии как функции координат взаимодействующих материальных точек. Эта задача решается с помощью более простой математической операции — *дифференцирования.* Рассмотрим сначала отдельную материальную точку, находящуюся в силовом поле каких-то неподвижных тел. Если силы консервативны, то можно ввести потенциальную энергию U, которой обладает материальная точка в рассматриваемом силовом поле. Величина U будет функцией радиуса-вектора $\mathbf{r}$ этой точки или ее координат x, y, z. Пусть точка претерпела произвольное бесконечно малое перемещение $d\mathbf{r}$. Если $\mathbf{F}$ — сила, действующая на нее, то работа этой силы при таком перемещении будет равна убыли потенциальной энергии:

$$\mathbf{F}\, d\mathbf{r} = -dU. \qquad (29.1)$$

Это равенство справедливо, каково бы ни было перемещение $d\mathbf{r}$. Поэтому если функция $U(\mathbf{r})$ известна, то оно полностью определяет силу $\mathbf{F}$. В самом деле, чтобы найти вектор $\mathbf{F}$, достаточно определить его проекции F_x, F_y, F_z на координатные оси прямо-

угольной системы координат. В этих проекциях уравнение (29.1) запишется так:

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = -dU. \tag{29.2}$$

Допустим, что смещение происходит вдоль какой-либо одной координатной оси, например оси X. Тогда

$$F_x\,dx = -(dU)_{y,z},$$

и, следовательно,

$$F_x = -\left(\frac{dU}{dx}\right)_{y,z}.$$

Индексы y, z означают, что при смещении, а следовательно, и при дифференцировании координаты y и z должны оставаться постоянными. Иными словами, $U(x, y, z)$ при дифференцировании должна рассматриваться как функция одного аргумента x; остальные два аргумента, y и z, являются *параметрами*, которые при дифференцировании по x должны оставаться постоянными. Величины, получающиеся в результате такого дифференцирования, называются *частными производными* функции U. Они обозначаются символом ∂, в отличие от символа d, применяемого при дифференцировании функций одного независимого переменного. Аналогичные соображения справедливы и для проекций силы вдоль остальных двух осей Y и Z. Таким образом,

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{29.3}$$

Если функция $U(x, y, z)$ известна, то нахождение составляющих F_x, F_y, F_z сводится к вычислению ее частных производных по координатам. Разумеется, формулы (29.3) относятся только к случаю консервативных сил.

Приведем пример. Измеряя потенциальную энергию растянутой спиральной пружины, нашли, что она определяется выражением $U = {}^1/_2\,kx^2$, где x — удлинение пружины, а k — постоянная. Направим ось X вдоль оси пружины, закрепив один конец ее, а другой будем удерживать рукой. Тогда U будет функцией только одной координаты x. Растянутая пружина действует на руку с силой

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx.$$

Знак минус указывает, что сила F направлена в сторону, противоположную смещению, т. е. является *силой притяжения*.

3. Три формулы (29.3) можно объединить в одну векторную формулу. С этой целью умножим эти формулы на единичные век-

торы координатных осей **i**, **j**, **k** и сложим. В результате получим

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} U, \tag{29.4}$$

где символом grad U обозначена сумма

$$\operatorname{grad} U \equiv \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{29.5}$$

Согласно соотношению (29.4) эта сумма является вектором. Вектор, определяемый соотношением (29.5), называется *градиентом скаляра U*. Для него, наряду с обозначением grad U, применяется также обозначение ∇U. Здесь ∇ («набла») означает символический вектор или *оператор*

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}, \tag{29.6}$$

называемый *оператором Гамильтона* (по имени ирландского математика и физика Уильяма Гамильтона (1805—1865)) или набла-оператором. Таким образом, ∇U формально может рассматриваться как произведение символического вектора ∇ на скаляр U. Понятно, что можно говорить о градиенте не только функции U, но и любой скалярной функции координат. Понятие градиента широко применяется в самых разнообразных вопросах физики и математики.

Для уяснения геометрического смысла градиента полезно ввести *поверхности уровня*, т. е. такие поверхности, на которых скаляр U остается постоянным. Пусть S — одна из таких поверхностей и пусть она проходит через точку пространства *1*, в которой ищется grad U (рис. 55). Поместим в этой точке начало координат. Ось X направим по нормали к поверхности уровня $U = \text{const}$, проведя единичный вектор **i** в сторону возрастания U. Координатные оси Y и Z расположатся в плоскости, касательной к поверхности уровня $U = \text{const}$. Ясно, что при таком выборе координатных осей частные производные $\frac{\partial U}{\partial y}$ и $\frac{\partial U}{\partial z}$ в рассматриваемой точке пространства обратятся в нуль, так что в формуле (29.5) остается одно только первое слагаемое: grad $U = \frac{\partial U}{\partial t}\mathbf{i}$. Изменим теперь обозначения. Единичный вектор нормали к поверхности уровня $U = \text{const}$ обозначим символом **n**, а расстояние между двумя бесконечно близкими поверхностями уровня U и $U + dU$, измеренное вдоль нормали, т. е. расстояние между точками *1* и *2*, — символом dn. Тогда, очевидно, $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial n}$. Эту величину чаще обозна-

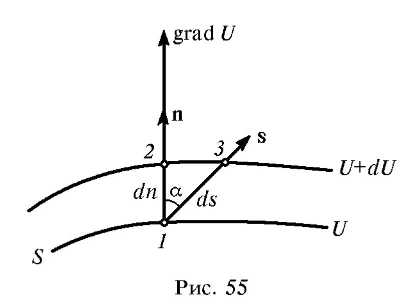


Рис. 55

чают через $\frac{\partial U}{\partial n}$ и называют *производной скаляра U в направлении нормали к поверхности уровня.* В этом направлении величина U, очевидно, изменяется наиболее быстро. Таким образом, в новых обозначениях формула (29.5) примет вид

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial n}\,\mathbf{n}. \tag{29.7}$$

Отсюда видно, что *градиент функции U есть вектор, направленный по нормали к поверхности уровня* $U = \text{const}$ *в сторону возрастания U; его длина численно равна производной по нормали функции U к той же поверхности.* Преимущество такого определения по сравнению с определением (29.5) состоит в том, что оно *инвариантно*, т. е. содержит только величины и понятия, имеющие непосредственный геометрический смысл, и не содержит ничего такого, что вносится случайным выбором координатной системы.

Отметим еще одну простую, но важную формулу. Проведем через точку *1* (см. рис. 55) отрезок прямой *13* под углом α к нормали n. Точку *3* возьмем на поверхности уровня $U + dU$. Длину этого отрезка обозначим через ds. Так как точка *3* лежит на той же поверхности уровня, что и точка *2*, то приращения функции U на отрезках *12* и *13* будут одни и те же. Так как сами отрезки бесконечно малы, то участки поверхностей уровня, через которые они проходят, могут считаться плоскими, а потому $ds = \frac{dn}{\cos\alpha}$. На этом основании

$$\frac{dU}{ds} = \frac{dU}{dn}\cos\alpha,$$

или в иных обозначениях

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial n}\cos\alpha = \frac{\partial U}{\partial n}(\mathbf{ns}),$$

где $\mathbf{s}$ — единичный вектор в направлении отрезка *13*. Величина $\frac{\partial U}{\partial s}$ называется производной функции U в том же направлении. Учтя определение градиента (29.7), получим

$$\frac{\partial U}{\partial s} = (\mathbf{s}\operatorname{grad} U). \tag{29.8}$$

Формула эта справедлива независимо от конкретного смысла функции U. Если U является потенциальной энергией материальной точки, то с учетом (29.4) формула принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial s} = -(\mathbf{Fs}),$$

или

$$F_s = -\frac{\partial U}{\partial s}, \tag{29.9}$$

что, конечно, легко получить и прямо из (29.1).

4. Формулы (29.3) тривиальным образом обобщаются на случай произвольной системы материальных точек с одними только консервативными силами. В этом случае потенциальная энергия U является функцией координат всех взаимодействующих точек. Вместо (29.3) следует писать

$$F_{ix} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = -\frac{\partial U}{\partial z_i}. \qquad (29.10)$$

Здесь x_i, y_i, z_i — координаты i-й материальной точки системы, а F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} — компоненты действующей на нее силы. Номер i может пробегать все возможные значения, так что формулы (29.10) справедливы для каждой точки системы.

5. Закон сохранения энергии в механике является следствием уравнения движения Ньютона. Можно ли, наоборот, вывести уравнение движения Ньютона из механического закона сохранения энергии? На этот вопрос следует ответить отрицательно. Уравнение, выражающее сохранение энергии, является *скалярным*, в то время как уравнение движения есть *векторное* и эквивалентно *трем независимым числовым уравнениям*. Ясно, что одного скалярного уравнения недостаточно для вывода из него трех независимых числовых уравнений. Но если движение одномерное, то при некоторых дополнительных предположениях из закона сохранения энергии можно вывести уравнение движения Ньютона. Допустим, что материальная точка движется вдоль какой-то фиксированной линии под действием одних только консервативных сил. По закону сохранения энергии $1/2\, mv^2 + U = \text{const}$. Потенциальная энергия U при таком движении может рассматриваться как функция только расстояния s, измеренного вдоль траектории. Дифференцируя последнее соотношение по времени, получим

$$mv\dot{v} + \frac{dU}{ds}\dot{s} = 0,$$

или, учитывая соотношения $v = \dot{s}$ и $F_s = -\frac{dU}{ds}$,

$$v(m\dot{v} - F_s) = 0. \qquad (29.11)$$

Отсюда после сокращения на v получается уравнение движения Ньютона.

Необходимо, однако, отметить, что уравнение Ньютона в механике, обладает большей общностью, чем закон сохранения энергии. Во-первых, приведенный вывод справедлив только для консервативных сил. Во-вторых, при выводе в уравнении (29.11) производилось сокращение на v. Поэтому необходимо ввести *дополнительное предположение*, не содержащееся в самом законе сохранения энергии, что $v \neq 0$. Уравнение (29.11) имеет два решения, которые удовлетворяют условию сохранения энергии. Одно из них, а именно $v = 0$, было отброшено. Закон сохранения энергии для этого не дает осно-

ваний. Однако решение $v = 0$ не согласуется с уравнением Ньютона, если только сила F не обращается в нуль.

6. Используя понятие потенциальной энергии, можно выразить *условие равновесия* механической системы и его *устойчивости*. Рассмотрим сначала систему взаимодействующих материальных точек, на которую не наложены никакие связи. Пусть все действующие силы консервативны. Тогда их составляющие можно представить формулами (29.10). В состоянии равновесия все силы, а с ними и все первые производные потенциальной энергии U по координатам должны обращаться в нуль. Отсюда следует, что *для равновесия необходимо, чтобы потенциальная энергия была стационарна*. Стационарность означает, что при всяком выводе системы из расстояния равновесия, когда координаты материальных точек получают бесконечно малые приращения δx_1, δy_1, ..., δz_n, функция U остается почти постоянной. Точнее, приращения функции U при таких бесконечно малых изменениях координат являются бесконечно малыми *более высокого порядка*, чем приращения самих координат. В частности, *система будет находиться в равновесии, если потенциальная энергия U экстремальна, т. е. минимальна или максимальна.*

Если потенциальная энергия минимальна, то равновесие будет устойчивым. Действительно, пусть U_0 — значение потенциальной энергии в состоянии равновесия. По условию теоремы можно найти малую окрестность вблизи состояния равновесия, в которой разность $U - U_0$ положительна. Выберем эту окрестность так, чтобы было $0 < U - U_0 < \varepsilon$, где ε — некоторое положительное число, которое может быть взято сколь угодно малым. Выведем теперь систему из состояния равновесия, сообщив ей кинетическую энергию $K_0 < \varepsilon$. Затем предоставим систему самой себе. Свободное движение системы будет подчиняться закону сохранения энергии $K + U = K_0 + U_0$ или $U - U_0 = K_0 - K$. Отсюда видно, что $U - U_0 < \varepsilon$, так как кинетическая энергия K не может быть отрицательной.

Следовательно, система без внешних воздействий не может выйти за пределы области $0 < U - U_0 < \varepsilon$ и будет совершать в ней финитное движение. Это означает, что равновесие системы при минимуме потенциальной *энергии устойчиво*, точнее, *устойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям.*

Изложенное остается справедливым и при наличии диссипативных сил типа жидкого трения, а также гироскопических сил. Действительно, в состоянии равновесия, когда все материальные точки покоятся, такие силы равны нулю. Поэтому необходимое условие равновесия, требующее стационарности потенциальной энергии U, остается в силе. Сохраняет силу и доказательство устойчивости равновесия при минимуме U. Только равенство, выражающее закон сохранения энергии, при наличии диссипативных сил в доказательст-

ве следует заменить неравенством $(K + U) - (K_0 + U_0) < 0$ или $U - U_0 < K_0 - K$. Это только усилит дальнейшие заключения. *Диссипативные силы делают равновесие еще более устойчивым.* Если систему вывести из состояния равновесия и затем предоставить самой себе, то диссипативные силы в конце снова вернут систему в состояние равновесия.

Причина устойчивости равновесия при минимуме U выявится особенно наглядно, если рассмотреть всего одну материальную точку, могущую совершать одномерное движение. В этом случае график функции U имеет вид потенциальной ямы (аналогичной той, которая представлена на рис. 45). В состоянии равновесия материальная точка «лежит на дне потенциальной ямы». Никакие силы на нее в этом положении не действуют. При смещении точки в сторону, как легко видеть, появляется сила, направленная к положению равновесия и стремящаяся вернуть точку в это положение. Если же точка находится в равновесии там, где потенциальная энергия максимальна (т. е. «лежит на вершине потенциальной горы», например в точке N на рис. 44), то при ее смещении в сторону появляется сила, направленная от положения равновесия. Такая сила еще дальше уведет точку от этого положения. Равновесие будет неустойчивым. *Равновесие всякой механической системы, вообще говоря, неустойчиво, если потенциальная энергия максимальна.*

Изложенные результаты можно распространить и на системы, свобода перемещения которых ограничена *наложенными связями.* Надо только потребовать, чтобы связи были *идеальными*, т. е. такими, которые не производят работы при любых возможных перемещениях системы. Примером может служить идеально гладкий шарик, надетый на идеально твердую и гладкую спицу, которая задает направление возможного перемещения шарика. Сила, действующая на шарик со стороны спицы, перпендикулярна к направлению возможного перемещения и работы не производит.

При наличии связей условия равновесия материальной точки принимают вид

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial U}{\partial x} + R_x &= 0,\\
-\frac{\partial U}{\partial y} + R_y &= 0, \qquad (29.12)\\
-\frac{\partial U}{\partial z} + R_z &= 0,
\end{aligned}
$$

где $\mathbf{R}$ — *реакция связей*, т. е. сила, с которой связи действуют на рассматриваемую материальную точку. В целях краткости мы провели рассуждения для одной материальной точки. В случае системы изменится только число уравнений, но сами рассуждения останутся без изменений. Пусть δ_x, δ_y, δ_z — *возможные перемещения* материальной точки вдоль координатных осей. Умножая на них уравнения

(29.12), складывая и принимая во внимание, что реакции связей работы не производят, получим

$$\delta U \equiv \frac{\partial U}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\,\delta z = 0.$$

Таково необходимое условие равновесия. Оно означает, что *в состоянии равновесия потенциальная энергия U стационарна.* Не изменятся и рассуждения относительно устойчивости равновесия, которые были приведены выше. Иллюстрацией может служить тяжелый шарик, помещенный на дно сферической чаши (устойчивое равновесие), или в вершину выпуклой поверхности (неустойчивое равновесие). *При наличии сил сухого трения стационарность потенциальной энергии U для равновесия не необходима.* Примером может служить равновесие бруска, лежащего на наклонной плоскости.

Г Л А В А V

МОМЕНТ ИМПУЛЬСА

§ 30. МОМЕНТ СИЛЫ И МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ОТНОСИТЕЛЬНО НЕПОДВИЖНОГО НАЧАЛА

1. Важные законы механики связаны с понятиями *момента импульса* и *момента силы*. Следует различать и никоим образом не смешивать друг с другом моменты этих векторов *относительно точки* и *относительно оси*. Момент вектора относительно точки и относительно оси — разные понятия, хотя и связанные между собой. Момент вектора относительно точки сам есть *вектор*. Момент того же вектора относительно оси есть *проекция* на эту ось его момента относительно точки, лежащей на той же оси. Таким образом, момент вектора относительно оси уже не является вектором. Начнем с рассмотрения моментов относительно точки.

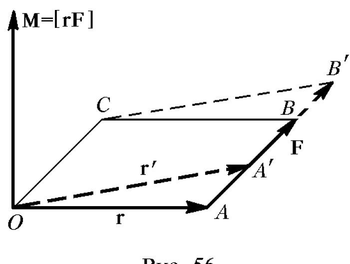


Рис. 56

Пусть O — какая-либо точка, относительно которой рассматривается момент вектора силы или вектора импульса. Ее называют *началом* или *полюсом*. Обозначим буквой $\mathbf{r}$ радиус-вектор, проведенный из этой точки к точке приложения силы $\mathbf{F}$ (рис. 56). *Моментом силы* $\mathbf{F}$ *относительно точки* O называется векторное произведение радиуса-вектора $\mathbf{r}$ на силу $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rF}]. \qquad (30.1)$$

Из этого определения непосредственно следует, что *момент* $\mathbf{M}$ *не изменится, если точку приложения силы* $\mathbf{F}$ *перенести в любую другую точку, расположенную на линии действия силы.* Действительно, если точку приложения силы перенести из A в A', то параллелограмм $OABC$ перейдет в параллелограмм $OA'B'C$. Оба параллелограмма имеют общее основание OC и общую высоту. Поэтому их площади равны, что и доказывает наше утверждение.

Моментом $\mathbf{M}$ *нескольких сил относительно точки* называется сумма моментов этих сил относительно той же точки. Если линии действия сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ... пересекаются в одной точке A, то по доказанному при вычислении момента $\mathbf{M}$ этих сил точки приложения

их можно перенести в точку A. Если $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки A, то, следовательно,

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rF}_1] + [\mathbf{rF}_2] + \ldots = [\mathbf{rF}], \tag{30.2}$$

где $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots$ — геометрическая сумма сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., называемая их *равнодействующей*. Таким образом, в рассматриваемом случае *момент всех действующих сил относительно некоторой точки равен моменту их равнодействующей относительно той же точки*. Это справедливо и для параллельных сил, так как последние можно рассматривать как предельный случай пересекающихся сил (в бесконечно удаленной точке).

Доказанная теорема распространяется и на случай любой системы сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., линии действия которых лежат в одной плоскости. Действительно, при вычислении момента $\mathbf{M}$ силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ можно заменить их равнодействующей $\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$; силы $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_3$ можно заменить их равнодействующей $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{123} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$ и т. д. В результате задача сведется к вычислению момента двух сил, лежащих в одной плоскости, а линии действия таких сил пересекаются в одной точке. Следовательно, *если линии действия сил лежат в одной плоскости, то момент этих сил относительно точки равен моменту их равнодействующей относительно той же точки.*

Отметим частный случай двух равных параллельных сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, направленных в противоположные стороны. Такие силы образуют так называемую *пару сил*. В этом случае

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}_1\mathbf{F}_1] + [\mathbf{r}_2\mathbf{F}_2] = [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\,\mathbf{F}_1] = [(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\,\mathbf{F}_2],$$

т. е. *момент пары сил равен моменту одной из этих сил относительно точки приложения другой*. Момент пары сил, очевидно, не зависит от выбора точки, относительно которой он берется. В частности, если равные и противоположно направленные силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ действуют вдоль одной и той же прямой, то они коллинеарны с вектором $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$, а потому момент $\mathbf{M}$ обращается в нуль.

Отметим, еще, что *момент произвольной системы сил может быть сведен к сумме момента их равнодействующей и момента какой-то пары сил*. Этим результатом мы нигде не будем пользоваться. При желании читатель сам может доказать его без особого труда или обратиться к курсам теоретической механики. Более существенно всегда иметь в виду, что перенос точки приложения силы вдоль линии ее действия, равно как и любая замена исходной системы сил на другую с тем же моментом и равнодействующей, приводит к эквивалентной системе сил только в том случае, когда рассматриваемое тело можно (приближенно) рассматривать как *идеально твердое*. Действительно, твердое тело обладает шестью степенями свободы. Для описания его движе-

ния достаточно двух векторных уравнений: уравнения движения центра масс (19.3) и выводимого ниже уравнения моментов (30.5). Во всех остальных случаях, например при рассмотрении движения деформированных тел, системы сил с одинаковыми равнодействующими и моментами не эквивалентны.

Аналогично определяется *момент импульса p* материальной точки относительно точки или *полюса O*. Так называется векторное произведение

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}\mathbf{p}]. \tag{30.3}$$

Для системы материальных точек моментом импульса относительно некоторого начала O называется сумма моментов этих точек относительно того же начала.

2. Целесообразность введения моментов импульса и силы оправдывается тем, что они связаны между собой важным соотношением, которое называется *уравнением моментов*. Предположим сначала, что начало O неподвижно. В случае одной материальной точки, дифференцируя выражение (30.3) по времени, получим $\dot{\mathbf{L}} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}] + [\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}]$. Но при неподвижном начале O импульс частицы $\mathbf{p}$ коллинеарен с ее скоростью $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$. Кроме того, $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$. Значит, $[\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}] = [\mathbf{r}\mathbf{F}] = \mathbf{M}$. В результате имеем

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}. \tag{30.4}$$

Это и есть уравнение моментов для одной материальной точки. Оно справедливо как в ньютоновской, так и в релятивистской механике, так как при его выводе постоянство массы материальной точки не использовалось.

Распространим теперь уравнение (30.4) на систему материальных точек. Для этого напишем уравнение (30.4) для каждой точки, понимая под $\mathbf{M}$ момент всех действующих на нее сил, как внутренних, так и внешних. Затем сложим все эти уравнения. При таком сложении моменты внутренних сил исключатся. Действительно, внутренние силы входят в систему попарно: сила $\mathbf{F}_{ik}$, с которой k-я точка действует на i-ю, равна силе $\mathbf{F}_{ki}$, с которой i-я точка действует на k-ю. Эти силы направлены противоположно и действуют вдоль одной и той же прямой. Момент таких двух сил, а значит и моменты всех внутренних сил равны нулю. В результате получается уравнение моментов для системы материальных точек:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}_{\text{внеш}}, \tag{30.5}$$

т. е. *производная по времени от момента импульса системы материальных точек относительно произвольного неподвижного начала равна геометрической сумме моментов всех внешних сил относительно того же начала O.*

3. *Если момент внешних сил относительно неподвижного начала O равен нулю, то момент импульса системы относительно того же начала остается постоянным во времени.* Это положение называет-

ся *законом сохранения момента импульса.* В частности, момент импульса сохраняется для изолированной системы материальных точек.

Важным является случай центральных сил, когда направления всех сил, действующих на материальные точки системы, проходят через неподвижный центр O. Момент таких сил относительно точки O равен нулю. Поэтому момент импульса системы относительно точки O должен сохраняться, т. е. оставаться постоянным во времени. И это справедливо даже тогда, когда силы зависят от скоростей.

Наряду с законами сохранения импульса и энергии закон сохранения момента импульса является одним из важнейших *фундаментальных законов физики.* В атомной физике понятие момента импульса должно быть обобщено. Это видно уже из того, что в классической механике момент импульса определен через координаты и скорости частиц, а эти величины, согласно принципу неопределенностей Гайзенберга, одновременно не могут иметь определенных значений в одном и том же состоянии. Кроме того, моментом импульса могут обладать не только частицы, но и силовые поля, например электромагнитное поле. Наконец, понятия и законы классической механики, как правило, применимы к процессам, происходящим внутри атомов, атомных ядер и элементарных частиц. При рассмотрении таких процессов не представляется возможности пользоваться классическими понятиями, к числу которых относится момент импульса как он был определен выше. Здесь можно только ограничиться замечанием, что в физике понятие момента импульса расширяется, но как это делается фактически, пока рассматривать преждевременно. Изучающий физику уже с самого начала должен иметь в виду, что физика обобщает механическое понятие момента импульса и постулирует закон его сохранения для всех физических процессов. Такой *расширенный закон сохранения момента импульса уже не является теоремой механики, а должен рассматриваться как самостоятельный общефизический принцип, являющийся обобщением опытных фактов.*

Можно было бы при изложении механики включить закон сохранения момента импульса для системы двух материальных точек в число основных постулатов, как это мы сделали с законом сохранения импульса для системы двух материальных точек. Тогда третий закон Ньютона следовало бы исключить из числа основных постулатов механики. В § 12 уже было показано, что этот закон только отчасти является следствием закона сохранения импульса. Однако если к закону сохранения импульса добавить еще закон сохранения его момента, то их этих двух законов можно получить третий закон Ньютона как их следствие. Действительно, рассмотрим замкнутую систему из двух материальных точек, взаимодействующих между собой с силами $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$. Из закона сохранения импульса следует

$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$, а из закона сохранения момента импульса

$$[\mathbf{r}_1\mathbf{p}_1] + [\mathbf{r}_2\mathbf{p}_2] = \text{const}.$$

Дифференцируя по времени это уравнение, получим

$$[\mathbf{r}_1\dot{\mathbf{p}}_1] + [\mathbf{r}_2\dot{\mathbf{p}}_2] = 0,$$

или

$$[\mathbf{r}_1\mathbf{F}_1] + [\mathbf{r}_2\mathbf{F}_2] = 0.$$

Так как $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$, то

$$[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\mathbf{F}_1] = 0.$$

Отсюда следует, что векторы $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и $\mathbf{F}_1$ коллинеарны. Коллинеарны также векторы $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и $\mathbf{F}_2$. Это значит, что силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ направлены вдоль прямой, соединяющей взаимодействующие материальные точки.

4. Момент сил и момент импульса зависят не только от модуля и направления этих векторов, но и от положения начала. Оба момента, вообще говоря, изменятся, если перейти к новому началу. Пусть O и O' — два неподвижных начала. Радиусы-векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ одной и той же точки относительно этих начал связаны соотношением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{R},$$

где $\mathbf{R} = \overrightarrow{O'O}$ — радиус-вектор начала O относительно O'. Написав выражения для моментов импульсов каждой материальной точки системы и просуммировав эти выражения по всем материальным точкам, получим

$$\sum [\mathbf{r}m\mathbf{v}] = \sum [\mathbf{r}'m\mathbf{v}] - [\mathbf{R}\sum m\mathbf{v}],$$

или

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' - [\mathbf{R}\mathbf{p}], \tag{30.6}$$

где $\mathbf{p}$ — полный импульс системы, $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}'$ — моменты ее импульса относительно начала O и O' соответственно. Если импульс $\mathbf{p}$ равен нулю, то $\mathbf{L} = \mathbf{L}'$. В этом случае вектор момента импульса системы не зависит от выбора начала.

Аналогично

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' - [\mathbf{R}\mathbf{F}], \tag{30.7}$$

где $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$ — моменты сил, действующих на систему, относительно начал O и O', а $\mathbf{F}$ — геометрическая сумма этих сил. Если результирующая сила $\mathbf{F}$ равна нулю, то $\mathbf{M} = \mathbf{M}'$. Это имеет место, например, для *пары сил*. Вот почему можно говорить о моменте пары сил, не указывая начала, относительно которого этот момент берется.

§ 31. СВЯЗЬ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ С СЕКТОРИАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ. ТЕОРЕМА ПЛОЩАДЕЙ

1. Если система состоит из одной материальной точки, то момент импульса имеет простой геометрический смысл. Пусть в момент времени t положение материальной точки определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}$ (рис. 57). За время dt радиус-вектор получает приращение $\mathbf{v}\,dt$, описывая площадь бесконечно малого треугольника, заштрихованного на рис. 57. Площадь этого треугольника можно изобразить вектором

$$d\mathbf{S} = \frac{1}{2}\,[\mathbf{r}\mathbf{v}]\,dt,$$

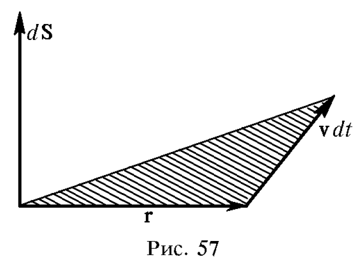


Рис. 57

длина которого представляет рассматриваемую площадь, а направление перпендикулярно к плоскости треугольника. Производная

$$\dot{\mathbf{S}} = \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{2}\,[\mathbf{r}\mathbf{v}] \tag{31.1}$$

определяет площадь, описываемую радиусом-вектором в единицу времени. Она называется *секториальной* скоростью. Так как по определению $\mathbf{L} = m[\mathbf{r}\mathbf{v}]$, то

$$\mathbf{L} = 2m\dot{\mathbf{S}}. \tag{31.2}$$

При нерелятивистских движениях масса m постоянна, а потому момент импульса $\mathbf{L}$ пропорционален секториальной скорости $\dot{\mathbf{S}}$.

2. Если сила, действующая на материальную точку, центральная и ее направление проходит через полюс O, то вектор $\mathbf{L}$ не будет меняться во времени. В случае нерелятивистских движений не будет меняться и секториальная скорость $\dot{\mathbf{S}}$. В этом случае закон сохранения момента импульса переходит в *закон площадей*:

$$\dot{\mathbf{S}} = \text{const}. \tag{31.3}$$

Из этого уравнения вытекают два следствия. Во-первых, плоскость, в которой лежат векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$, перпендикулярна к направлению вектора $\dot{\mathbf{S}}$. А так как последнее направление остается неизменным, то будет неизменной и указанная плоскость. Это значит, что *траектория материальной точки в поле центральных сил есть плоская кривая.* Во-вторых, из постоянства длины вектора $\dot{\mathbf{S}}$ следует, что в *равные времена радиус-вектор материальной точки описывает одинаковые по размеру площади.* Это положение часто называют *законом площадей.* Мы предпочитаем, однако, придавать закону площадей более широкий смысл, характеризуя площадь не только размером, но и ее ориентацией в пространстве.

Справедливо и обратное утверждение. *Если траектория материальной точки — плоская кривая и радиус-вектор, проведенный из неподвижного полюса O, в равные времена описывает одинаковые площади, то направление действующей силы все время проходит через полюс O.* Действительно, условие теоремы эквивалентно утверждению, что секториальная скорость $\dot{\mathbf{S}}$ есть постоянный вектор. Будет постоянен и момент импульса $\mathbf{L}$.

Поэтому на основании (30.4) $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} = [\mathbf{rF}] = 0$. Отсюда следует, что вектор $\mathbf{F}$ коллинеарен радиусу-вектору $\mathbf{r}$, а следовательно, его направление все время проходит через точку O. Последняя является, таким образом, *силовым центром*, из которого должны исходить силы притяжения или отталкивания, действующие на материальную точку.

3. Теорема площадей справедлива не только в случае неподвижного силового центра. Пусть две материальные точки взаимодействуют между собой центральными силами. Применяя понятие приведенной массы, можно свести задачу об их относительном движении к задаче о движении одной точки в силовом поле неподвижного силового центра (см. § 20). В качестве такого силового центра можно принять любую из рассматриваемых материальных точек, относительно которой движется другая точка. Тогда радиус-вектор, проведенный от первой точки ко второй, будет в относительном движении описывать в равные времена равные площади.

§ 32. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА И МОМЕНТ СИЛ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

1. Векторное уравнение (30.5) эквивалентно трем скалярным уравнениям

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^{\text{внеш}}, \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y^{\text{внеш}}, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z^{\text{внеш}}, \tag{32.1}$$

которые получаются из уравнения (30.5) путем проецирования на неподвижные оси декартовой системы координат. Индекс «внеш», указывающий на то, что при вычислении момента сил внутренние силы могут не приниматься во внимание, в дальнейшем обычно будет опускаться. Таким образом, под $\mathbf{M}$ в уравнении моментов всегда будет подразумеваться момент внешних сил. Величины L_x и M_x называются соответственно *моментами импульса* и *сил относительно оси X*. Аналогично говорят о моментах импульса и сил относительно координатных осей Y и Z.

Вообще, *моментами L_x и M_x импульса и сил относительно произвольной оси X* называют проекции векторов $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ на эту ось в предположении, что начало O лежит на рассматриваемой оси.

Уравнение

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x \tag{32.2}$$

называется *уравнением моментов относительно неподвижной оси* X. Когда момент внешних сил относительно какой-либо неподвижной оси равен нулю, то момент импульса системы относительно той же оси остается постоянным. Это — *закон сохранения импульса относительно неподвижной оси.*

2. Чтобы выяснить геометрический смысл момента M_x, представим векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$ в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}_\parallel, \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_\perp + \mathbf{F}_\parallel.$$

Здесь $\mathbf{r}_\perp$ — составляющая вектора $\mathbf{r}$, перпендикулярная к оси X, а $\mathbf{r}_\parallel$ — составляющая того же вектора, параллельная этой оси. Аналогичный смысл имеют векторы $\mathbf{F}_\perp$ и $\mathbf{F}_\parallel$. Используя эти разложения, можно написать

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rF}] = [\mathbf{r}_\perp\mathbf{F}_\perp] + \{[\mathbf{r}_\perp\mathbf{F}_\parallel] + [\mathbf{r}_\parallel\mathbf{F}_\perp]\} + [\mathbf{r}_\parallel\mathbf{F}_\parallel].$$

Последний член как векторное произведение параллельных векторов равен нулю. Сумма, заключенная в фигурные скобки, есть вектор, перпендикулярный к оси X. При проецировании на эту ось он даст нуль. Таким образом, составляющая вектора $\mathbf{M}$, параллельная оси X, равна

$$\mathbf{M}_\parallel = [\mathbf{r}_\perp\mathbf{F}_\perp].$$

Только эта составляющая и играет роль при нахождении момента M_x относительно оси X. Аналогично при нахождении проекции L_x достаточно проецировать только параллельную слагаемую вектора $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L}_\parallel = [\mathbf{r}_\perp\mathbf{p}_\perp].$$

Изложенное тривиальным образом обобщается на случай системы нескольких сил и системы нескольких материальных точек.

Назовем *плечом силы относительно некоторой оси* кратчайшее расстояние между осью и линией действия силы. Тогда *момент силы относительно той же оси* может быть определен как взятое с надлежащим знаком произведение перпендикулярной составляющей силы на соответствующее плечо. Такое определение момента дается в элементарной физике. Так как точку приложения силы можно перемещать произвольно вдоль линии ее действия, то это определение согласуется с определением, которое было приведено выше. Это видно из рис. 58, где предполагается, что ось перпендикулярна к плоскости рисунка и проходит через полюс O.

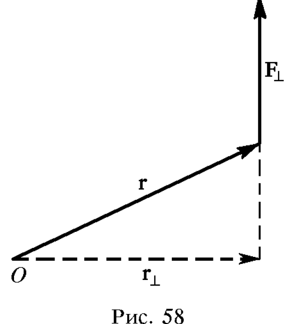


Рис. 58

Аналогично *момент импульса материальной точки относительно оси* можно определить как взятое с надлежащим знаком произведение слагающей импульса, перпендикулярной к этой оси, на соответствующее плечо.

§ 33. УРАВНЕНИЕ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА ДЛЯ ВРАЩЕНИЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

1. Применим уравнение моментов относительно оси к рассмотрению *вращательного движения.* За неподвижную ось моментов удобно выбрать *ось вращения.* Если материальная точка вращается по окружности радиуса r (рис. 59), то момент ее импульса относительно оси вращения O равен $L = mvr$. Пусть ω — угловая скорость вращения, тогда $v = \omega r$, и, следовательно, $L = mr^2\omega$. Если вокруг оси O вращается система материальных точек с одной и той же угловой скоростью ω, то $L = \sum mr^2\omega$, где суммирование производится по всем материальным точкам системы. Величину ω как одинаковую для всех материальных точек можно вынести из-под знака суммы. Тогда получится

$$L = I\omega, \tag{33.1}$$

где

$$I = \sum mr^2. \tag{33.2}$$

Величина I, равная сумме произведений масс материальных точек на квадраты расстояний их до оси вращения, называется *моментом инерции системы относительно этой оси.* Уравнение (33.1) показывает, что *при вращении системы момент ее импульса относительно оси вращения равен произведению момента инерции относительно той же оси на угловую скорость.*

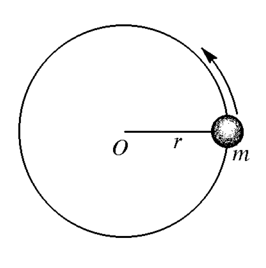


Рис. 59

Если на вращательное движение системы материальных точек накладывается еще *радиальное движение* их, а также *движение параллельно оси,* то наличие таких движений не отразится на справедливости формулы (33.1). Это следует из того, что *момент импульса материальной точки зависит от ее скорости* $\mathbf{v}$ *линейно.* Когда же скорость $\mathbf{v}$ направлена по радиусу или параллельно оси вращения, то момент импульса относительно этой оси равен нулю. Поэтому такие движения непосредственно не сказываются на виде связи между моментом импульса системы относительно оси вращения и ее угловой скоростью. Их влияние косвенное и состоит в том, что момент инерции I перестает быть постоянной величиной, а меняется во времени в соответствии

с изменением мгновенной конфигурации системы. В этом случае уравнение (32.2) принимает вид

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = M, \tag{33.3}$$

где M — момент внешних сил относительно оси вращения. Это *основное уравнение динамики вращательного движения вокруг неподвижной оси.* Она напоминает уравнение Ньютона для движения материальной точки. Роль массы играет момент инерции I, роль скорости — угловая скорость ω, роль силы — момент силы M, роль импульса — момент импульса L. Момент импульса L часто называют *вращательным импульсом системы.* Пользуясь этой терминологией, можно сказать, что *производная вращательного импульса системы по времени равна моменту внешних сил относительно оси вращения.*

Если момент внешних сил M относительно оси вращения равен нулю, то вращательный импульс $I\omega$ сохраняется.

2. Важным частным случаем является вращение неизменяемой системы материальных точек или твердого тела вокруг неподвижной оси. В этом случае момент инерции I при вращении остается постоянным, и уравнение (33.3) переходит в

$$I\frac{d\omega}{dt} = M. \tag{33.4}$$

Произведение момента инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения на угловое ускорение $\frac{d\omega}{dt}$ равно моменту внешних сил относительно той же оси.

Для лучшего уяснения уравнения (33.4) приведем другой ее вывод, основанный непосредственно на уравнении движения материальной точки. Последнее в случае вращения материальной точки вокруг неподвижной оси имеет вид $m\frac{dv}{dt} = F_\tau$, где F_τ — тангенциальная слагающая действующей силы. Так как $v = \omega r$, то, умножая предыдущее уравнение на r, получим $mr^2\frac{d\omega}{dt} = rF_\tau$. Напишем такие соотношения для каждой материальной точки, а затем сложим их. Тогда мы снова придем к уравнению (33.4). При этом все внутренние силы исключаются, так что под M в уравнении (33.4) следует понимать момент одних только внешних сил. Этот элементарный вывод обладает, однако, тем недостатком, что он дает уравнение вращательного движения не в общей форме (33.3), а только в частной форме (33.4).

3. Аналогия между движением материальной точки и вращением твердого тела относительно неподвижной оси может быть прослежена дальше. Если материальная точка вращается по окружности, то элементарная работа при повороте на угол $d\varphi$ равна $dA = F\,ds = Fr\,d\varphi = M\,d\varphi$. Такое же выражение получится и для твердого тела, так как его можно рассматривать как систему материальных точек, вращающихся с общей угловой скоростью ω. Внут-

ренние силы исключатся, так как в случае твердого тела, как было показано в § 24, они работы не совершают. Итак, для твердого тела

$$dA = M\,d\varphi. \qquad (33.5)$$

Роль силы играет момент внешних сил, роль линейного перемещения — угловое перемещение.

Кинетическая энергия вращающегося твердого тела представляется в виде

$$K = \frac{1}{2}\sum mv^2 = \frac{1}{2}\sum m(\omega r)^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum mr^2,$$

или

$$K = \frac{1}{2}\,I\omega^2 = \frac{L^2}{2I}. \qquad (33.6)$$

Эти выражения напоминают соответствующие выражения для кинетической энергии материальной точки. Они получаются из последних формальной заменой $m \to I$, $v \to \omega$, $p \to L$.

§ 34. ПРИМЕРЫ НА ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ИМПУЛЬСА

1. Поучительные демонстрационные опыты на закон сохранения момента импульса можно осуществить с помощью *скамьи Жуковского* (по имени русского ученого Н. Е. Жуковского (1847—1921)). Скамья Жуковского представляет собой угол, сидение которого имеет форму диска. Диск может свободно вращаться вокруг вертикальной оси на шариковых подшипниках. Во время опыта демонстратор садится или становится на скамью Жуковского и, отталкиваясь от пола, может приводить ее во вращение. После прекращения толчка единственными внешними силами, которые могут создавать момент относительно оси вращения, являются силы трения и сопротивления воздуха. Силы трения благодаря шариковым подшипникам очень малы, а сопротивление воздуха может не приниматься во внимание, пока число оборотов скамьи невелико. Поэтому момент импульса системы, состоящей из скамьи и демонстратора, относительно оси вращения не может меняться во времени, если система представлена самой себе.

Демонстратор на скамье Жуковского, оттолкнувшись ногою от пола, приводит ее во вращение. Вместе со скамьей вращается и он сам. Во время вращения вращательный импульс системы будет оставаться постоянным. Какие бы внутренние движения ни совершались в системе — внутренние силы не могут изменить вращательный импульс. Если демонстратор разведет руки в стороны, то он увеличит момент инерции системы I, а потому угловая скорость вращения ω должна уменьшиться, чтобы остался неизменным вращательный импульс $I\omega$. Если демонстратор сводит руки к оси вра-

щения, то момент инерции I уменьшается, а угловая скорость увеличивается. Для усиления эффекта демонстратор держит в руках тяжелые гири. При максимальном удалении гирь от оси вращения момент инерции увеличивается в несколько раз. В такое же число раз уменьшается угловая скорость вращения (рис. 60).

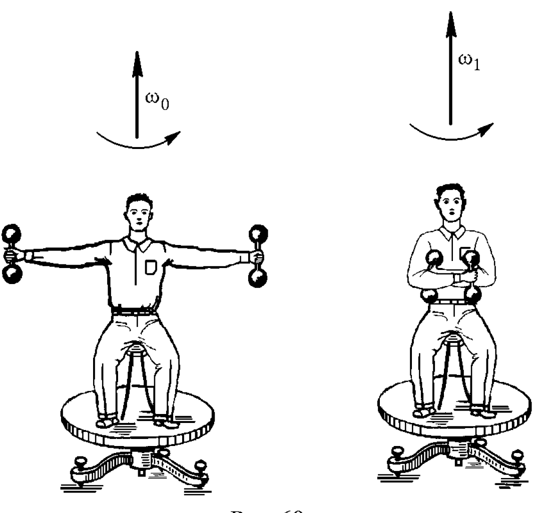
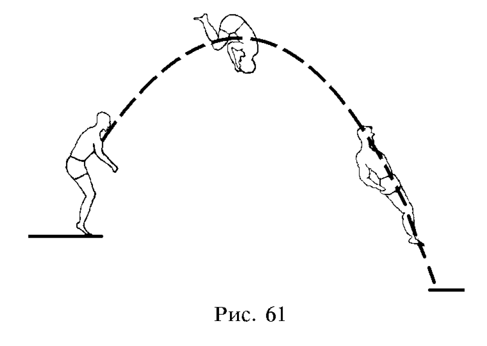


Рис. 60

2. Когда балерина делает пируэт, она вращается на носке, вокруг вертикальной оси. Ноги и руки при этом максимально приближены к оси вращения, и угловая скорость максимальна. Для замедления вращения и остановки балерина разводит руки и отводит ногу в сторону. Наоборот, для сообщения своему телу быстрого вращения балерина отталкивается от пола, получая вращательный импульс, когда момент инерции ее тела максимален. Затем она соответствующим движением уменьшает момент инерции в несколько раз и тем самым увеличивает угловую скорость вращения. Таким образом, она управляет скоростью вращения путем изменения момента инерции своего тела. В сущности, она делает то же самое, что и демонстратор на скамье Жуковского. Тем же самым приемом пользуется гимнаст, выполняющий упражнение на перекладине.


Рис. 61

3. Прыгун, чтобы сделать *сальто*, отталкивается от трамплина и тем самым сообщает своему телу вращательный импульс. Этот импульс сохраняется при дальнейшем движении прыгуна в воздухе. Вначале тело прыгуна вытянуто и момент инерции велик. В некоторый момент прыгун свертывается клубком (рис. 61), уменьшая момент инерции в три и большее число раз. Угловая скорость возрастает во столько же раз. С этой угловой скоростью прыгун выполняет один, два и даже три полных оборота. В нужный момент прыгун снова выпрямляет тело и с ма-

лой угловой скоростью становится на землю или погружается в воду. Приведя этот пример, мы несколько забежали вперед, так как здесь ось, вокруг которой вращается тело прыгуна, не неподвижна, а движется в пространстве. Однако если движущаяся ось вращения проходит через центр масс прыгуна, то вращение совершается по тем же законам, что и вращение вокруг неподвижной оси (см. § 37).

4. Земля при вращении вокруг собственной оси ведет себя подобно скамье Жуковского. Всякое перемещение масс внутри Земли (выпадение осадков, вулканическая деятельность, горообразование и пр.) меняет момент инерции, а с ним и угловую скорость вращения Земли. Это является причиной нерегулярных колебаний продолжительности суток. Экспериментально обнаружены периодические колебания продолжительности суток с основным периодом в один год и с амплитудой около 0,001 с. Земля подвержена также регулярным внешним воздействиям, прежде всего силам приливного трения, связанным с гравитационным притяжением Луны и Солнца. Благодаря этому средние солнечные сутки увеличиваются примерно на $1{,}640\cdot 10^{-3}$ с в столетие. Как уже говорилось в § 1, неравномерность вращения Земли можно наблюдать с помощью кварцевых, атомных или молекулярных часов. Ход таких часов управляется колебаниями кристаллической решетки кварца, а также внутриатомными и внутримолекулярными колебаниями при излучении спектральных линий. Указанные колебания обладают значительно большей стабильностью, чем вращение Земли вокруг собственной оси или вокруг Солнца. Это и является причиной, почему в настоящее время эталон времени — секунда — устанавливается именно с помощью таких колебательных процессов, а не с помощью вращения Земли вокруг своей оси или Солнца, как это делалось до недавнего времени (см. § 1).

5. Вернемся к опыту со скамьей Жуковского. При уменьшении момента инерции вращающегося тела его кинетическая энергия увеличивается (при условии, что момент внешних сил равен нулю). Это непосредственно видно из формулы (33.6), так как в рассматриваемом случае вращательный импульс системы $L = I\omega$ не изменяется. Изменение кинетической энергии системы может происходить только за счет работы каких-то сил. Такими силами в нашем примере являются внутренние силы, действующие в системе. Они не могут изменить момент импульса системы. Однако совершаемая ими работа, вообще говоря, отлична от нуля и идет на изменение кинетической энергии вращения системы. Демонстратор на скамье Жуковского должен развить определенную мускульную силу, чтобы удержать вращающиеся гири на их круговых траекториях. Сила, с которой он действует на гирю, есть центростремительная сила $F = m\omega^2 r$, где m — масса гири, а r — расстояние ее от оси вращения. Когда демонстратор приближает гирю к оси вращения, сила F совершает положительную работу. За счет этой работы и происхо-

дит увеличение кинетической энергии системы. При удалении гири работа силы F отрицательна, и кинетическая энергия уменьшается.

Подтвердим эти рассуждения простым расчетом. Чтобы максимально упростить вычисления, схематизируем опыт, заменив реальную систему идеализированной моделью ее. Будем считать, что гири являются материальными точками, а масса рук демонстратора пренебрежимо мала. При такой схематизации момент инерции системы представится выражением $I = I_0 + 2mr^2$, где I_0 — момент инерции системы без гирь, а $2mr^2$ — момент инерции самих гирь (двойка потому, что гирь две). Будем предполагать, что приближение и удаление гирь к оси вращения совершается бесконечно медленно. Тогда в любой момент времени можно пренебречь кинетической энергией радиального движения. Вся работа внутренних сил пойдет на изменение кинетической энергии вращения системы. Вычислим работу A, совершаемую демонстратором, когда он тянет гири к оси вращения, перемещая их с расстояний r_1 до $r_2 < r_1$. Как было показано в § 24, при вычислении работы имеет значение только относительное движение взаимодействующих тел. В нашей задаче это есть движение гирь относительно демонстратора. Каждую гирю демонстратор тянет с силой $m\omega^2 r$. Элементарная работа, совершаемая им, положительна и равна $-2m\omega^2 r dr$ (в нашем случае $dr < 0$). Полная работа A определится интегралом

$$A = -\int_{r_1}^{r_2} 2m\omega^2 r\, dr = -2m \int_{r_1}^{r_2} \frac{(I\omega)^2}{I^2} r\, dr = -2m \int_{r_1}^{r_2} \frac{L^2}{I^2} r\, dr.$$

Так как момент импульса L во время движения остается постоянным, а $I = I_0 + 2mr^2$, то

$$A = -2mL^2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{r\, dr}{(I_0 + 2mr^2)^2} = \frac{L^2}{2} \left\{ \frac{1}{I_0 + 2mr_2^2} - \frac{1}{I_0 + 2mr_1^2} \right\},$$

или

$$A = \frac{L^2}{2I_2} - \frac{L^2}{2I_1} = K_2 - K_1.$$

Та же формула справедлива и при удалении от оси вращения. Она показывает, что *кинетическая энергия вращения изменяется за счет работы мускульной силы демонстратора.*

6. Приведенное объяснение, однако, не отвечает на вопрос, какие силы вызывают изменение угловой скорости вращения системы. Если бы на гирю действовала только центростремительная сила, то она, как сила центральная, не могла бы изменить вращательный импульс гири. Должны были сохраняться в отдельности вращательные импульсы гирь и скамьи Жуковского вместе с демонстратором. Гири и скамья Жуковского вращались бы с различными угловыми скоростями. На самом деле этого нет. При движении гирь по радиусу происходит выравнивание угловых скоростей. Отсюда можно сделать вывод, что во время такого движения помимо центростреми-

тельных сил *на гири действуют силы бокового давления со стороны рук демонстратора. Эти силы не изменяют угловую скорость вращения гирь. Гири, в свою очередь, оказывают боковое давление на руки демонстратора, в результате чего меняется угловая скорость вращения скамьи вместе с демонстратором.* Демонстратор на скамье Жуковского очень хорошо ощущает действие этих сил бокового давления при всяком, в особенности быстром, радиальном перемещении гирь. Дополнительные силы бокового давления перпендикулярны к оси вращения и к относительной скорости гирь. Работы они не производят. Их наличие не может сказаться на результате вычисления работы A, которое было произведено выше. *Силы бокового давления*, однако, *имеют моменты относительно оси вращения и производят перераспределение неизменного момента импульса системы между гирями — с одной стороны — и скамьей Жуковского с демонстратором — с другой.* В результате их действия все эти тела вращаются с общей угловой скоростью. Количественное рассмотрение вопроса будет произведено в § 64.

7. С помощью скамьи Жуковского можно демонстрировать и векторный характер момента импульса. Для этой цели применяется велосипедное колесо с утяжеленным ободом. Если колесо вращается вокруг собственной оси, то вследствие осевой симметрии полный импульс его $\mathbf{p}$ равен нулю. В этом случае, как было показано в § 30, момент импульса $\mathbf{L}$ относительно неподвижной точки не зависит от положения этой точки. С другой стороны, проекция вектора $\mathbf{L}$ на ось вращения колеса равна $I\Omega$, где I — момент инерции колеса, а Ω — его угловая скорость. Проекция вектора $\mathbf{L}$ на любое направление, перпендикулярное к оси колеса, равна нулю ввиду осевой симметрии. Отсюда следует, что вектор момента импульса $\mathbf{L}$ направлен вдоль оси колеса и по модулю равен $I\Omega$.

Демонстратор садится или становится на скамью Жуковского. Ему передают быстро вращающееся колесо с вертикально направленной осью (рис. 62). Полный момент импульса системы направлен вертикально и равен $I\Omega$. Примем вертикальную ось скамьи Жуковского за ось X. Так как момент внешних сил относительно оси X равен нулю, то проекция L_x полного момента импульса системы на эту ось должна сохраняться. В начале опыта весь вращательный импульс сосредоточен в колесе. Затем демонстратор наклоняет ось колеса на угол α. Проекция момента импульса колеса на ось X становится равной $L_x^{\text{кол}} = I\Omega\cos\alpha$, т. е. она уменьшается на $I\Omega\,(1-\cos\alpha)$. Это уменьшение должно быть скомпенсировано возрастанием соответствующей проекции момента импульса скамьи и демонстратора на величину $L_x^{\text{скам}} = I\Omega\,(1-\cos\alpha)$. В результате скамья с демонстратором приходит во вращение с угловой скоростью ω, определяемой из уравнения $I_0\omega = I\Omega\,(1-\cos\alpha)$, где I_0 — момент инерции скамьи. При $\alpha = 90^\circ$ проекция $L_x^{\text{кол}}$ обращается в нуль — она целиком передается скамье и демонстратору. При

$\alpha = 180°$ изменение вращательного импульса колеса становится максимальным $\Delta L_x^{\text{кол}} = 2L_x^{\text{кол}}$, скамья и демонстратор вращаются с максимальной скоростью $\omega_{\text{макс}} = \frac{2I}{I_0}\,\Omega$. Поворачивая ось, демонстратор придает ей исходной направление — тогда вращение скамьи прекращается. Однако скамья, вообще говоря, не возвращается в исход-

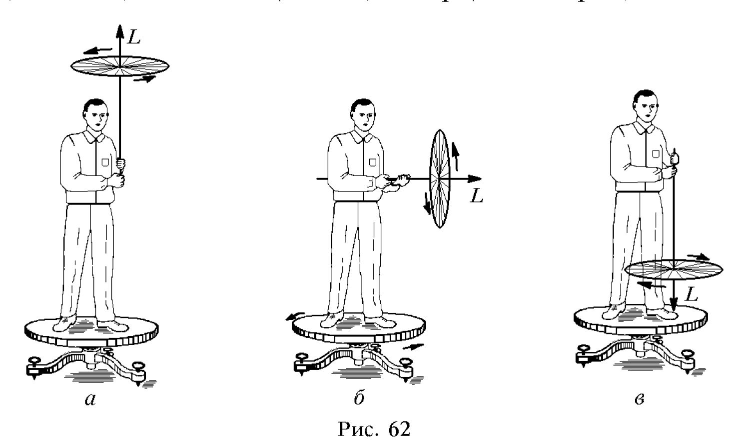


Рис. 62

ное положение, а оказывается повернутой вокруг вертикальной оси на некоторый угол.

Наклоняя ось колеса, демонстратор во время ее движения испытывает значительные силы бокового давления. Колесо как бы стремится вырваться из рук демонстратора. Эти силы направлены горизонтально и притом перпендикулярно как к оси колеса, так и к оси скамьи Жуковского. Их геометрическая сумма равна нулю, но они имеют момент относительно оси X. Последний приводит во вращение скамью Жуковского и демонстратора. Происхождение этих сил будет выяснено в гл. VII.

8. Закончим этот параграф следующим замечанием. Пусть имеется замкнутая система тел (назовем ее лабораторией), которая в начальный момент времени покоилась относительно какой-то неподвижной (инерциальной) системы отсчета S. Можно ли с помощью одних только внутренних движений сместить лабораторию в пространстве и притом так, чтобы все тела в ней вернулись в свои исходные положения? Говоря о смещении лаборатории, мы имеем в виду ее поступательное перемещение без вращения. Отрицательный ответ на этот вопрос дает теорема о движении центра масс. Не так обстоит дело в отношении поворота замкнутой системы тел. *С помощью одних только внутренних движений можно повернуть лабораторию в пространстве на любой угол и притом так, что исходное расположение тел в лаборатории восстановится.* Допустим, например, что лаборатория состоит из замкнутой оболочки A,

в которой помещено всего одно тело B. Пусть тело B начинает вращаться вокруг некоторой оси с угловой скоростью $\dot{\varphi}_B$ (относительно неподвижной системы отсчета). Тогда оболочка A придет во вращение относительно той же оси с угловой скоростью $\dot{\varphi}_A$. По закону сохранения вращательного импульса $I_A\dot{\varphi}_A + I_B\dot{\varphi}_B = 0$, так как в начальный момент вращательный импульс был равен нулю (I_A и I_B — моменты инерции оболочки A и тела B соответственно). Если углы φ_A и φ_B условиться отсчитывать от начальных положений тел A и B, то после интегрирования получится $I_A\varphi_A + I_B\varphi_B = 0$. Угол поворота тела B относительно оболочки A определится разностью $\varphi = \varphi_B - \varphi_A = -(I_A/I_B + 1)\varphi_A$. Если $\varphi = 2\pi n$ (n — целое число), то тело B возвратится в исходное положение относительно оболочки A. При этом угол поворота оболочки φ_A, вообще говоря, не будет равен нулю. Различие в поведении лаборатории при поступательном перемещении и вращении связано со следующим обстоятельством. *При непрерывном поступательном перемещении тела B оно никогда не возвращается в исходное положение относительно тела A.* Различным значениям координаты x соответствуют и различные положения тела. Напротив, *при непрерывном вращении тела B взаимное расположение тел B и A периодически восстанавливается*: значениям угла φ, отличающимся на $2\pi n$, соответствует *одно и то же* относительное расположение тел A и B. Падающая кошка, вращая хвостом и лапами, придает своему телу такое положение, чтобы встать на землю лапами. И это ей удается.

Эти явления можно имитировать на скамье Жуковского. Демонстратор, совершая конические вращения одной или обеими руками, всегда может повернуть скамью Жуковского на произвольный угол. Для усиления эффекта он может взять в руки массивный предмет с большим моментом инерции, например молот.

§ 35. ТЕОРЕМА ГЮЙГЕНСА–ШТЕЙНЕРА

Найдем связь между моментами инерции тела относительно двух различных параллельных осей. Предполагается, что эти оси перпендикулярны к плоскости рисунка и пересекают ее в точках O и A. Ради краткости будем называть сами оси осями также O и A. Разобьем мысленно тело на элементарные массы dm. Радиусы-векторы одной из них, проведенные от осей O и A параллельно плоскости рисунка, обозначим через $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ соответственно. (На рис. 63 изображен такой случай, когда элементарная масса dm лежит в плоскости рисунка.) Тогда $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ означает радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$. Следовательно, $r'^2 = r^2 + a^2 - 2(\mathbf{ar})$,

$$\int r'^2\,dm = \int r^2\,dm + a^2\int dm - 2\left(\mathbf{a}\int \mathbf{r}\,dm\right).$$

Интеграл слева есть момент инерции I_A тела относительно оси A, первый интеграл справа — момент инерции относительно оси O. Последний интеграл можно представить в виде $\int \mathbf{r}\,dm = m\mathbf{R}_C$, где $\mathbf{R}_C$ — радиус-вектор центра масс C тела относительно оси O (точнее, $\mathbf{R}_C$ есть слагающая радиуса-вектора центра масс, параллельная плоскости рисунка). Таким образом,

$$I_A = I_O + ma^2 - 2m(\mathbf{a}\mathbf{R}_C). \tag{35.1}$$

Допустим, что ось O проходит через центр масс C тела. Тогда $\mathbf{R}_C = 0$, и предыдущая формула упрощается, принимая вид

$$I_A = I_C + ma^2. \tag{35.2}$$

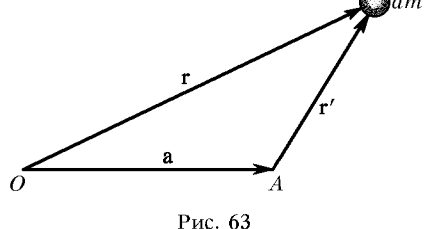


Рис. 63

Это важное геометрическое соотношение называется *теоремой Гюйгенса—Штейнера* (Якоб Штейнер (1796—1863) — швейцарский геометр). *Момент инерции тела относительно какой-либо оси равен моменту инерции его относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, сложенному с величиной ma^2, где a — расстояние между осями.*

§ 36. ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ

1. Момент инерции тела относительно какой-либо оси можно найти вычислением или измерить экспериментально*). Если вещество в теле распределено непрерывно, то вычисление момента инерции его сводится к вычислению интеграла

$$I = \int r^2\,dm, \tag{36.1}$$

в котором r — расстояние от элемента массы dm до оси вращения. Интегрирование должно производиться по всей массе тела. Аналитическое вычисление таких интегралов возможно только в простейших случаях тел правильной геометрической формы. Для тел неправильной формы такие интегралы могут быть найдены численно.

Вычисление моментов инерции во многих случаях можно упростить, используя соображения подобия и симметрии, теорему Гюйгенса—Штейнера, а также некоторые другие общие соотношения, о которых будет сказано ниже.

---

*) Об одном методе экспериментального определения моментов инерции говорится в § 42.

Рассмотрим два подобных и подобно расположенных относительно оси вращения тела A и B одной и той же плотности. Полные и элементарные массы этих тел относятся как кубы их линейных размеров l. Так как элементарные массы умножаются на квадраты расстояний их до оси вращения, то моменты инерции тел A и B будут относиться как пятые степени тех же размеров. Таким образом, $I \sim l^5$, или

$$I = kml^2. \tag{36.2}$$

Под l следует понимать какой-либо *характерный размер тела* или расстояние какой-либо характерной точки его от оси вращения. Коэффициент пропорциональности k зависит только от формы тела и его расположения относительно оси вращения.

2. Вычисление момента инерции тела относительно оси часто можно упростить, вычислив предварительно *момент инерции* его *относительно точки*. Сам по себе момент инерции тела относительно точки не играет никакой роли в динамике. Он является чисто вспомогательным понятием, служащим для упрощения вычислений. *Моментом инерции тела относительно точки O* называется сумма произведений масс материальных точек, из которых тело состоит, на квадраты их расстояний R до точки O: $\Theta = \sum mR^2$. В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу $\Theta = \int R^2\,dm$. Само собой понятно, что момент Θ не следует смешивать с моментом инерции I относительно оси. В случае момента I массы dm умножаются на квадраты расстояний до этой оси, а в случае момента Θ — до неподвижной точки.

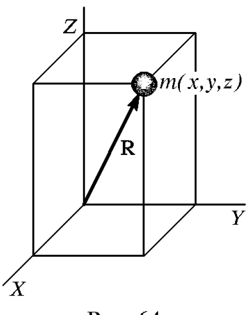


Рис. 64

Рассмотрим сначала одну материальную точку с массой m и с координатами x, y, z относительно прямоугольной системы координат (рис. 64). Квадраты расстояний ее до координатных осей X, Y, Z равны соответственно $y^2 + z^2$, $z^2 + x^2$, $x^2 + y^2$, а моменты инерции относительно тех же осей

$$I_x = m(y^2 + z^2), \quad I_y = m(z^2 + x^2), \quad I_z = m(x^2 + y^2).$$

Сложив эти три равенства, получим

$$I_x + I_y + I_z = 2m(x^2 + y^2 + z^2).$$

Но $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, где R — расстояние точки m от начала координат O. Поэтому

$$I_x + I_y + I_z = 2\Theta. \tag{36.3}$$

Это соотношение справедливо не только для одной материальной точки, но и для произвольного тела, так как тело можно рассматривать как совокупность материальных точек. Таким образом, *сумма моментов инерции тела относительно трех взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в одной точке O, равна удвоенному моменту инерции того же тела относительно этой точки.*

Если повернуть координатные оси X, Y, Z относительно тела, оставляя углы между ними прямыми, то моменты инерции I_x, I_y, I_z, вообще говоря, изменятся. Однако их сумма останется той же самой, так как она равна 2Θ, а величина Θ не зависит от ориентации координатных осей. Таким образом, *сумма моментов инерции I_x, I_y, I_z относительно любых трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через одну точку, зависит только от положения этой же точки и не меняется с изменением ориентации осей.* Более глубокая геометрическая природа этого утверждения раскрывается в тензорной алгебре.

3. Другое следствие можно получить для плоского распределения масс. Допустим, что имеется пластинка произвольной формы с произвольным распределением вещества по ее объему. Если пластинка очень тонкая, то можно считать, что вещество распределено бесконечно тонким слоем по математической плоскости. Примем эту плоскость за координатную плоскость XY. Тогда z-координаты всех материальных точек будут равны нулю, а потому момент инерции Θ пластинки относительно начала координат O представится выражением $\Theta = \sum \Delta m(x^2 + y^2)$, т. е. будет равен моменту инерции пластинки относительно оси Z. Таким образом, в случае плоского распределения масс $I_x + I_y + I_z = 2I_z$, т. е.

$$I_x + I_y = I_z. \tag{36.4}$$

Далее, очевидно, что величина Θ не меньше каждого из моментов инерции I_x, I_y, I_z, например, $\Theta \geqslant I_z$ (знак равенства имеет место только для плоского распределения масс). Вычитая неравенство $2I_z \leqslant 2\Theta$ из равенства (36.3), получим $I_x + I_y - I_z \geqslant 0$, или

$$I_x + I_y \geqslant I_z. \tag{36.4a}$$

Отсюда следует, что из отрезков, длины которых численно равны I_x, I_y, I_z, всегда можно составить треугольник. Для плоского распределения масс (в плоскости XY) формула (36.4a) переходит в формулу (36.4).

После этих предварительных замечаний можно перейти к вычислению моментов инерции конкретных тел.

4. Момент инерции тонкого однородного стержня относительно перпендикулярной оси. Пусть ось проходит через конец стержня A

(рис. 65). Для момента инерции можно написать $I_A = kml^2$, где l — длина стержня. Центр стержня C является его центром масс. По теореме Гюйгенса—Штейнера $I_A = I_C + m(l/2)^2$. Величину I_C можно представить как сумму моментов инерции двух стержней, CA и CB, длина каждого из которых равна $l/2$, масса $m/2$, а следовательно, момент инерции равен $k\frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2$. Таким образом, $I_C = km(l/2)^2$. Подставляя эти выражения в предыдущую формулу, получим

$$kml^2 = km\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2,$$

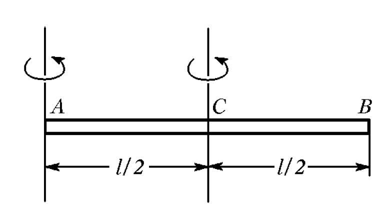


Рис. 65

откуда $k = 1/3$. В результате находим

$$I_A = \frac{1}{3}ml^2, \tag{36.5}$$

$$I_C = \frac{1}{12}ml^2. \tag{36.6}$$

Существенно, что стержень тонкий. Бесконечно тонкий стержень можно рассматривать как отрезок прямой линии. Он всегда геометрически подобен любой его части. Поэтому коэффициент k будет одним и тем же для всего стержня и для любой его части, например половины. Для стержня конечной толщины подобие между всем стержнем и его частью уже не имеет места. В этом случае числовой коэффициент k имеет разные значения для всего стержня и его половины. По этой причине к стержню конечной толщины формулы (36.5) и (36.6) не применимы. Но ими как приближенными формулами можно пользоваться, когда поперечные размеры стержня очень малы по сравнению с его длиной.

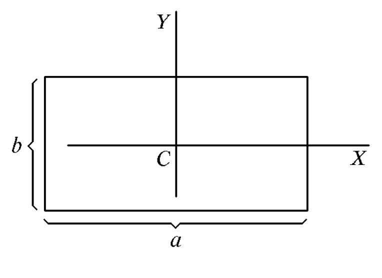


Рис. 66

5. Момент инерции однородных прямоугольных пластинки и параллелепипеда. Пусть координатные оси X и Y проходят через центр пластинки C и параллельны ее сторонам (рис. 66). Представим себе, что все вещество пластинки смещено параллельно оси X и сконцентрировано на оси Y. При таком смещении все расстояния материальных точек до оси X не изменятся. Вместе с ними не изменится и момент инерции I_x относительно оси X. Но в результате смещения пластинка перейдет в бесконечно тонкий стержень длины l, к которому применима формула (36.6). В результате получим

$$I_x = \frac{m}{12}b^2, \quad I_y = \frac{m}{12}a^2. \tag{36.7}$$

Момент инерции I_z пластинки относительно оси Z, перпендикулярной к ее плоскости, найдется по формуле (36.4), которая дает

$$I_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2). \tag{36.8}$$

Формула (36.8) годится также для вычисления моментов инерции прямоугольного параллелепипеда относительно его геометрических осей. В этом можно убедиться, если мысленно сжать параллелепипед вдоль одной из геометрических осей в прямоугольную пластинку — при таком сжатии момент инерции относительно этой оси не изменяется. Формула (36.8) дает момент инерции прямоугольного параллелепипеда относительно той его геометрической оси, которая проходит через центр основания с длинами сторон a и b. На рис. 66 эта ось перпендикулярна к плоскости рисунка.

6. Момент инерции бесконечно тонкого круглого кольца (окружности). Момент инерции относительно оси Z (рис. 67), очевидно, равен

$$I_z = mR^2, \tag{36.9}$$

где R — радиус кольца. Ввиду симметрии $I_x = I_y$. Поэтому из формулы (36.4) находим

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} mR^2. \tag{36.10}$$

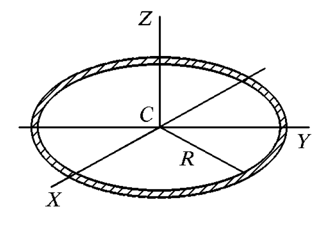


Рис. 67

Формула (36.9), очевидно, дает также момент инерции полого однородного цилиндра с бесконечно тонкими стенками относительно его геометрической оси.

7. Момент инерции бесконечно тонкого диска и сплошного цилиндра. Предполагается, что диск и цилиндр однородны, т. е. вещество распределено в них с постоянной плотностью. Пусть ось Z проходит через центр диска C перпендикулярно к его плоскости (рис. 68). Рассмотрим бесконечно тонкое кольцо с внутренним радиусом r и наружным радиусом $r + dr$. Площадь такого кольца $dS = 2\pi r\, dr$. Его момент инерции найдется по формуле (36.9), он равен $dI_z = r^2 dm$. Момент инерции всего диска определяется интегралом $I_z = \int r^2\, dm$. Ввиду однородности диска $dm = m\,\frac{dS}{S} = 2m\,\frac{r\,dr}{R^2}$, где $S = \pi R^2$ — площадь всего диска. Вводя это выражение под знак интеграла, получим

$$I_z = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3\, dr = \frac{1}{2} mR^2. \tag{36.11}$$

Момент инерции диска относительно диаметра вдвое меньше, как это непосредственно следует из формулы (36.4) и из соображений симметрии:

$$I_x = I_y = \frac{1}{4} mR^2. \tag{36.12}$$

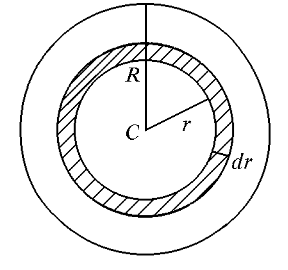


Рис. 68

Формула (36.11) дает также момент инерции однородного сплошного цилиндра относительно его продольной геометрической оси.

8. Момент инерции однородного сплошного цилиндра относительно поперечной оси. Пусть ось вращения проходит через центр основания цилиндра A перпендикулярно к его продольной геометрической оси (рис. 69). Вырежем мысленно бесконечно короткий цилиндр с массой dm, находящийся от

оси вращения на расстоянии x. Для его момента инерции по теореме Гюйгенса—Штейнера можно написать

$$dI_A = dm \cdot x^2 + \frac{1}{4}\, dm \cdot R^2,$$

а для момента инерции всего цилиндра

$$I_A = \int x^2\, dm + \frac{1}{4} R^2 \int dm.$$

Первое слагаемое в правой части формально совпадает с выражением для момента инерции однородного бесконечно тонкого стержня, а потому равно $1/3\, ml^2$. Второе слагаемое равно $1/4\, mR^2$. Следовательно,

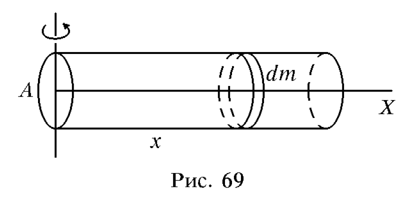


Рис. 69

$$I_A = \frac{1}{3} ml^2 + \frac{1}{4} mR^2. \qquad (36.13)$$

Момент инерции I_C относительно поперечной геометрической оси, проходящей через центр масс цилиндра, можно найти по формуле (36.13), если цилиндр разделить на два цилиндра с высотами $l/2$ и массами $m/2$. Получим

$$I_C = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} mR^2. \qquad (36.14)$$

При $R \to 0$ формулы (36.13) и (36.14) переходят в формулы (36.5) и (36.6) для бесконечно тонкого стержня.

9. Момент инерции полого шара с бесконечно тонкими стенками. Сначала найдем момент инерции Θ относительно центра шара. Очевидно, он равен $\Theta = mR^2$. Затем применим формулу (36.3), полагая в ней ввиду симметрии $I_x = I_y = I_z = I$. В результате находим момент инерции полого шара относительно его диаметра

$$I = \frac{2}{3} mR^2. \qquad (36.15)$$

10. Момент инерции сплошного однородного шара. Сплошной шар можно рассматривать как совокупность бесконечно тонких сферических слоев с массами dm (см. рис. 68). Так как шар по предположению однороден, то $dm = m\frac{dV}{V}$, где $dV = 4\pi r^2\, dr$ — объем сферического слоя, а $V = 4/3\, \pi R^3$ — объем всего шара. По формуле (36.15) момент инерции сферического слоя относительно диаметра равен $dI = \frac{2}{3}\, dm\, r^2 = 2m\frac{r^4\, dr}{R^3}$. Интегрируя, получаем момент инерции сплошного шара

$$I = \frac{2}{5} mR^2. \qquad (36.16)$$

11. Момент инерции однородного эллипса. Предполагается, что масса равномерно распределена по площади эллипса. Эллипс можно полу-

чить из круга равномерным сжатием вдоль одного из его диаметров, например вдоль оси Y (рис. 70). При таком сжатии момент инерции относительно оси Y не меняется. Первоначально он был равен $\frac{1}{4} ma^2$ (a — радиус круга, сжатием которого получен эллипс; он равен длине большой полуоси эллипса). Аналогичное рассуждение применимо и для оси X. В результате получим

$$I_x = \frac{1}{4} mb^2, \quad I_y = \frac{1}{4} ma^2. \qquad (36.17)$$

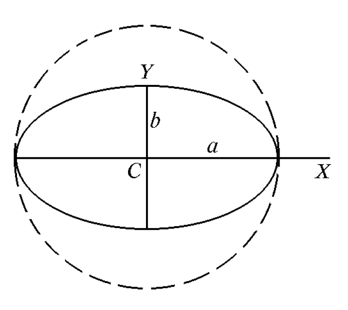


Рис. 70

Момент инерции относительно оси Z, перпендикулярной к плоскости эллипса, найдется по формуле (36.4):

$$I_z = \frac{1}{4} m(a^2 + b^2). \qquad (36.18)$$

Формула (36.18) дает также момент инерции однородного эллиптического цилиндра относительно его продольной геометрической оси.

12. Момент инерции трехосного эллипсоида. Предполагается, что масса равномерно распределена по объему эллипсоида. Координатные оси X, Y, Z направим вдоль главных осей эллипсоида. Длины полуосей эллипсоида обозначим буквами a, b, c. Вычислим момент инерции его относительно главной оси Z. Эллипсоид может быть получен из шара равномерным сжатием или растяжением по трем взаимно перпендикулярным направлениям, например по направлениям осей X, Y, Z. Возьмем однородный шар радиуса a. Его момент инерции $I_{\text{ш}} = \frac{2}{5} ma^2$. Произведем однородное сжатие в направлении оси Z, чтобы шар превратился в бесконечно тонкий круглый диск (конечно, с неравномерным распределением масс). Момент инерции I_z при этом остается неизменным, а моменты инерции I_x и I_y будут равны между собой ввиду симметрии. На основании соотношения (36.4) $I_x = I_y = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{5} ma^2$. Произведем затем равномерное сжатие круглого диска в направлении оси Y, чтобы его размеры в этом направлении сделались равными $2b$. При этом момент инерции I_y останется неизменным, а I_x сделается равным $I_x = \frac{1}{5} mb^2$. Применяя снова соотношение (36.4), для момента инерции I_z полученного эллиптического диска найдем $I_z = I_x + I_y = \frac{1}{5} m(a^2 + b^2)$. Наконец, произведем равномерное растяжение эллиптического диска в направлении оси Z, чтобы он превратился в трехосный эллипсоид с полуосями a, b, c. При этом величина I_z не изменится. Таким образом, момент инерции трехосного эллипсоида относительно оси Z равен

$$I_z = \frac{1}{5} m(a^2 + b^2). \qquad (36.19)$$

Моменты инерции относительно остальных двух главных осей равны соответственно

$$I_x = \frac{1}{5} m(b^2 + c^2), \quad I_y = \frac{1}{5} m(c^2 + a^2).$$

§ 37. УРАВНЕНИЕ МОМЕНТОВ ОТНОСИТЕЛЬНО ДВИЖУЩЕГОСЯ НАЧАЛА И ДВИЖУЩЕЙСЯ ОСИ

1. Уравнение моментов (30.5) справедливо для того случая, когда начало O, относительно которого рассматриваются моменты $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$, *неподвижно.* Точно так же уравнение (32.2) относится к моментам относительно *неподвижной оси.* В некоторых случаях, однако, целесообразно рассматривать *движущиеся начала* или *движущиеся оси.* Исследует, как меняется в этом случае уравнение моментов. Особый интерес представляют случаи, когда уравнение моментов относительно движущегося начала сохраняет прежний вид (30.5).

2. Рассмотрим сначала материальную точку. Будем понимать под $\mathbf{v}$ и $\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}$ скорость и импульс этой точки относительно неподвижной инерциальной системы отсчета S, а под $\mathbf{r}$ — ее радиус-вектор, проведенный из движущегося начала O. Движение начала O может быть как равномерным, так и неравномерным. Скорость этого движения обозначим через $\mathbf{v}_O$. Момент импульса движущейся точки относительно начала O определим прежним выражением (30.3), т. е. $\mathbf{L} = [\mathbf{rp}]$. Как и раньше, дифференцированием этого выражения найдем

$$\dot{\mathbf{L}} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}] + [\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}].$$

Однако теперь $\dot{\mathbf{r}}$ означает не скорость материальной точки $\mathbf{v}$, а разность между этой скоростью и скоростью движущегося начала $\mathbf{v}_O$. Таким образом,

$$\dot{\mathbf{L}} = [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_O)\mathbf{p}] + [\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}],$$

или ввиду уравнения Ньютона $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ и коллинеарности векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{p}$ $\dot{\mathbf{L}} = [\mathbf{rF}] - [\mathbf{v}_O\mathbf{p}]$, или, наконец,

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} - [\mathbf{v}_O\mathbf{p}]. \tag{37.1}$$

Чтобы обобщить это уравнение на случай системы материальных точек, напишем его для i-й материальной точки $\dot{\mathbf{L}}_i = \mathbf{M}_i - [\mathbf{v}_O\mathbf{p}_i]$, а затем просуммируем по всем i. Таким путем снова получим уравнение (37.1). Однако теперь $\mathbf{p}$ будет означать импульс *всей системы* материальных точек, а $\mathbf{M}$ — момент действующих на нее внешних сил.

Импульс $\mathbf{p}$ можно представить в виде $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C$, где $\mathbf{v}_C$ — скорость центра масс системы. Таким образом,

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} - m[\mathbf{v}_O\mathbf{v}_C]. \tag{37.2}$$

Это и есть *уравнение моментов относительно движущегося начала.*

Если движущееся начало O совпадает с центром масс C системы, то $\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_C$, и формула (37.2) *переходит в прежнее уравнение* (30.5). *Уравнение моментов относительно центра масс имеет такой же вид, что и относительно неподвижного начала.* Более того, в этом случае скорости $\mathbf{v}$ материальных точек не обязательно

рассматривать относительно неподвижной системы отсчета S. Их можно брать и относительно самого центра масс C, считая его как бы неподвижным. Если центр масс C движется прямолинейно и равномерно, то это утверждение непосредственно следует из принципа относительности. Но оно справедливо и в случае ускоренного движения центра масс. В самом деле, скорость каждой материальной точки может быть представлена в виде $\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{\text{отн}}$, где $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ — скорость точки относительно центра масс C. Поэтому

$$\mathbf{L} = \sum [\mathbf{r}m\mathbf{v}] = \sum [\mathbf{r}m\mathbf{v}_C] + \sum [\mathbf{r}m\mathbf{v}_{\text{отн}}].$$

Предпоследняя сумма в этом равенстве равна нулю. Действительно, так как скорость $\mathbf{v}_C$ одна и та же для всех слагаемых суммы, то ее можно вынести из-под знака суммы, что дает

$$-[\mathbf{v}_C \sum m\mathbf{r}] = -[\mathbf{v}_C\mathbf{r}_C] \sum m,$$

где $\mathbf{r}_C$ — радиус-вектор центра масс. Он равен нулю, так как начало координат O по условию помещено в центр масс. Итак,

$$\mathbf{L} = \sum [\mathbf{r}m\mathbf{v}_{\text{отн}}],$$

что и доказывает наше утверждение.

Второй, более общий, случай, когда уравнение (37.2) переходит в простую формулу (30.5), получается тогда, когда скорости $\mathbf{v}_O$ и $\mathbf{v}_C$ *коллинеарны*. В этом случае векторное произведение $[\mathbf{v}_O\mathbf{v}_C]$ обращается в нуль. Таким образом, *когда скорость движущегося начала O параллельна скорости центра масс C, уравнение моментов принимает простую форму* (30.5). В этом случае, однако, при вычислении момента импульса $\mathbf{L}$ надо брать скорости всех материальных точек обязательно *относительно инерциальной системы отсчета S, а не относительно центра масс.*

3. Аналогичные результаты справедливы и для поступательного движущихся осей, когда при движении оси она все время остается параллельной своему исходному направлению. Нет необходимости формулировать эти результаты отдельно, так как уравнение моментов относительно оси получается из соответствующего уравнения относительно точки путем проецирования на эту ось.

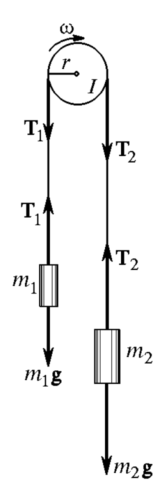


Рис. 71

ЗАДАЧИ

1. Определить ускорение тел и натяжения нити на машине Атвуда, предполагая, что $m_2 > m_1$ (рис. 71). Момент инерции блока относительно геометрической оси равен I, радиус блока r. Массу нити считать пренебрежимо малой.

Решение. Ввиду того, что масса нити пренебрежимо мала, изменения натяжений T_1 и T_2 вдоль нити можно не учитывать. Уравнения движения грузов и блока будут

$$m_1 a = T_1 - m_1 g,$$

$$m_2 a = m_2 g - T_2,$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = r(T_2 - T_1).$$

Если нет проскальзывания нити по блоку, то

$$r \frac{d\omega}{dt} = a.$$

Решая эти уравнения, получим

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}} g,$$

после чего находим T_1 и T_2. Если масса блока пренебрежимо мала, то $T_1 = T_2$.

2. К шкиву креста Обербека (рис. 72) прикреплена нить, к которой подвешен груз массой $M = 1$ кг. Груз опускается с высоты $h = 1$ м до нижнего положения, а затем начинает подниматься. В это время происходит «рывок», т. е. увеличение натяжения нити. Найти натяжение нити T при опускании или поднятии груза, а также оценить приближенно натяжение во время рывка $T_{\text{рыв}}$. Радиус шкива $r = 3$ см. На кресте укреплены четыре груза массой $m = 250$ г каждый на расстоянии $R = 30$ см от его оси. Моментом инерции самого креста и шкива пренебречь, по сравнению с моментом инерции грузов. Растяжение нити во время рывка не учитывать.

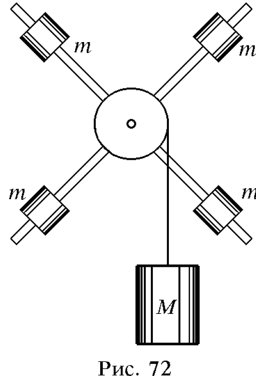


Рис. 72

Ответ. $T = \dfrac{Mg}{1 + \dfrac{Mr^2}{I}} = \dfrac{Mg}{1 + \dfrac{Mr^2}{2mR^2}} = 0{,}99 T_0$,

где I — момент инерции системы, а T_0 — натяжение нити при неподвижном грузе. Среднее натяжение нити во время рывка $T_{\text{рыв}}$ можно оценить следующим образом. Надо вычислить максимальную скорость груза M в нижнем положении. Обозначим ее через v. За время полуоборота шкива $\Delta t = \pi r/v$ импульс груза M меняется на $2Mv$. Это изменение равно импульсу силы, действующей на груз M, за то же время, т. е. $(T_{\text{рыв}} - Mg)\, \Delta t$. Вычисления дают $T_{\text{рыв}} = Mg + \dfrac{Mhr}{\pi m R^2} T \approx 1{,}42 T_0$.

3. Монета массой m и радиусом r, вращаясь в горизонтальной плоскости вокруг своей оси с угловой скоростью ω, вертикально падает на горизонтальный диск и прилипает к нему. В результате диск приходит во вращение вокруг своей оси. Возникающий при этом момент сил трения в оси диска постоянен и равен M_0. Через какое время вращение диска прекратится? Сколько оборотов N сделает диск до полной остановки? Момент инерции ди-

ска относительно его геометрической оси I_0. Расстояние между осями диска и монеты равно d.

Ответ. $t = \frac{mr^2}{2M_0}\omega$; $N = \frac{M_0}{2I}t^2$, где $I = I_0 + m\left(d^2 + \frac{r^2}{2}\right)$.

4. Сплошной однородный короткий цилиндр радиусом r, вращающийся вокруг своей геометрической оси со скоростью n об/с, ставят в вертикальное положение на горизонтальную поверхность. Сколько оборотов N сделает цилиндр, прежде чем вращение его полностью прекратится? Коэффициент трения скольжения между основанием цилиндра и поверхностью, на которую он поставлен, не зависит от скорости вращения и равен k.

Ответ. $N = \frac{3\pi r n^2}{4kg}$.

5. Тонкий стержень массой m и длиной L (рис. 73) подвешен за один конец и может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси. К той же оси подвешен на нити длиной l шарик с такой же массой m. Шарик отклоняется на некоторый угол и отпускается. При какой длине нити шарик после удара о стержень остановится? Удар абсолютно упругий.

Ответ. $l = \frac{L}{\sqrt{3}}$.

Рис. 73

6. Математический маятник массой m и стержень массой M (рис. 74) подвешены к одной и той же точке A, вокруг которой они могут свободно колебаться. Длина нити маятника равна длине стержня. Шарик маятника отклоняют в сторону, так что он приподнимается на высоту H относительно своего нижнего положения. Затем шарик отпускают, и он сталкивается неупруго с палкой. Как будут двигаться шарик и нижний конец палки после удара и на какие высоты они поднимутся?

Решение. Скорость шарика в нижнем положении до удара $v_0 = \sqrt{2gH}$. Так как удар неупругий, то непосредственно после удара шарик и нижний конец стержня в нижнем положении будут иметь одну и ту же скорость v. Она найдется из закона сохранения момента импульса относительно оси A:

$$mlv_0 = mlv + I\omega,$$

где $I = 1/3\, Ml^2$ — момент инерции стержня относительно той же оси. Так как $v = l\omega$, то написанное уравнение дает

$$v = \frac{ml^2}{I + ml^2}v_0 = \frac{3m}{M + 3m}v_0.$$

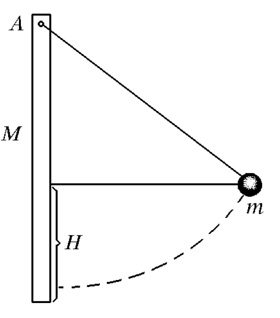


Рис. 74

Теперь надо решить, будут ли шарик и стержень после столкновения двигаться вместе или при дальнейшем движении они разойдутся. С этой целью вычислим скорость шарика v_1 и нижнего конца стержня v_2 при поднятии на какую-либо одну и ту же высоту h_1, если бы при этом они двигались независимо друг от друга. Эти скорости найдутся из уравнения

сохранения энергии

$$v^2 - v_1^2 = 2gh_1, \quad \frac{1}{2}\frac{I}{l^2}(v^2 - v_2^2) = Mg\frac{h_1}{2}.$$

Преобразовав второе уравнение к виду

$$v^2 - v_2^2 = 3gh_1,$$

видим, что $v_1 > v_2$. Поэтому в любом положении шарик будет стремиться обогнать стержень. А так как шарик движется позади стержня, то он все время будет прижиматься к стержню. Отсюда следует, что после удара шарик и стержень будут подниматься как единое тело. Высоту поднятия h легко определить из закона сохранения энергии. Она равна

$$h = \frac{I + ml^2}{(M+2m)gl^2}v^2 = \frac{6m^2}{(M+2m)(M+3m)}H.$$

7. Решить предыдущую задачу в предположении, что до удара был отклонен стержень (нижний конец его был бы поднят на высоту H).

Ответ. После удара шарик поднимается на высоту

$$h_1 = \frac{3}{2}\left(\frac{M}{M+3m}\right)^2 H,$$

нижний конец стержня — на высоту

$$h_2 = \left(\frac{M}{M+3m}\right)^2 H = \frac{2}{3}h_1.$$

8. Твердый стержень длиной l и массой M может вращаться вокруг горизонтальной оси A, проходящей через его конец (рис. 75). К той же оси A подвешен математический маятник такой же длины l и массы m. Первоначально стержень занимает горизонтальное положение, а затем отпускается. В нижнем положении происходит идеально упругий удар, в результате которого шарик и стержень деформируются, и часть кинетической энергии переходит в потенциальную энергию деформации. Затем деформация уменьшается, и запасенная потенциальная энергия вновь переходит в кинетическую. Найти значение потенциальной энергии деформации U в момент, когда она максимальна.

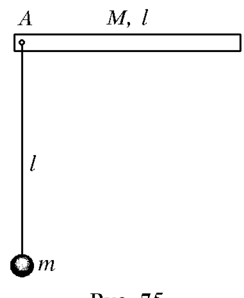


Рис. 75

Ответ. $U = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{I+ml^2}Mgl = \frac{3}{2}\frac{Mm}{M+3m}gl$, где I — момент инерции стержня.

9. Вертикально висящая однородная доска длиной $L = 1{,}5$ м и массой $M = 10$ кг может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через ее верхний конец. В нижний конец доски ударяет пуля, летящая горизонтально с начальной скоростью $V_0 = 600$ м/с. Пуля пробивает доску и летит далее со скоростью V. Определить скорость V, если после выстрела доска стала колебаться с угловой амплитудой $\alpha = 0{,}1$ рад. Масса пули $m = 10$ г.

Ответ. $V = V_0 - \frac{M}{m}\sqrt{\frac{2}{3}gL}\sin\frac{\alpha}{2} = 444$ м/с.

10. В общей точке подвеса A (рис. 76) подвешены шарик на нити длиной l и однородный стержень длиной L, отклоненный в сторону на некоторый угол. При возвращении стержня в положение равновесия происходит упругий удар. При каком соотношении между массами стержня M и шарика m шарик и точка удара стержня будут двигаться после удара с равными скоростями в противоположных направлениях? При каком соотношении между массами M и m описанный процесс невозможен?

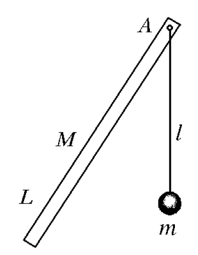


Рис. 76

Ответ. $ML^2 = ml^2$. Так как $L \geqslant l$, то для возможности процесса необходимо $M \leqslant m$. При $M > m$ процесс невозможен.

11. На горизонтальный диск, вращающийся вокруг геометрической оси с угловой скоростью ω_1, падает другой диск, вращающийся вокруг той же оси с угловой скоростью ω_2. Моменты инерции дисков относительно указанной оси равны соответственно I_1 и I_2. Оба диска при ударе сцепляются друг с другом (при помощи острых шипов на их поверхности). На сколько изменится общая кинетическая энергия вращения системы после падения второго диска? Чем объясняется изменение энергии? Геометрические оси обоих дисков являются продолжением одна другой.

Ответ. Кинетическая энергия вращения уменьшается на

$$\Delta K = \frac{1}{2}\frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}(\omega_1 - \omega_2)^2.$$

12. Шкивы двух маховиков соединены ремнем (рис. 77). Радиусы шкивов равны R_1 и R_2. Моменты инерции маховиков относительно их геометрических осей равны I_1 и I_2. Удерживая второй маховик и ремень неподвижными, раскручивают первый маховик до угловой скорости ω_0, вследствие чего между осью первого маховика и ремнем возникает скольжение. Затем ремень и второй маховик отпускают. Пренебрегая всеми силами трения, за исключением сил трения скольжения между ремнем и осями маховиков, найти установившиеся скорости вращения маховиков ω_1 и ω_2, т. е. скорости после прекращения скольжения. Найти также потерю ΔK кинетической энергии на трение скольжения. Массой ремня пренебречь.

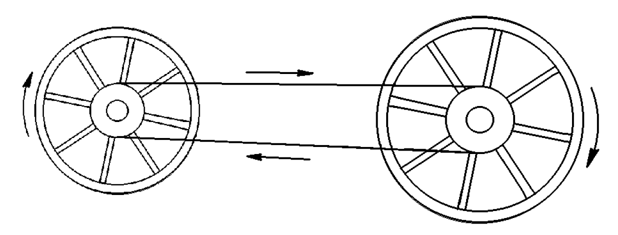


Рис. 77

Решение. Благодаря трению скольжения натяжение ремня сверху T_1 и снизу T_2 будет разным. Применяя к маховикам уравнение (33.4), получим

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = (T_1 - T_2)R_1, \quad I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = (T_2 - T_1)R_2.$$

Поделим эти уравнения соответственно на R_1 и R_2, сложим и проинтегрируем. Тогда получим

$$\frac{I_1\omega_1}{R_1} + \frac{I_2\omega_2}{R_2} = \text{const}.$$

Входящая сюда постоянная равна $I_1\omega_0/R_1$, так как в начальный момент $\omega_1 = \omega_0$, $\omega_2 = 0$. Когда скольжение прекратится, то $\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$. Решая полученную систему уравнений, найдем угловые скорости ω_1 и ω_2 после прекращения скольжения:

$$\omega_1 = \frac{I_1 R_2^2}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2}\,\omega_0, \quad \omega_2 = \frac{I_1 R_1 R_2}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2}\,\omega_0.$$

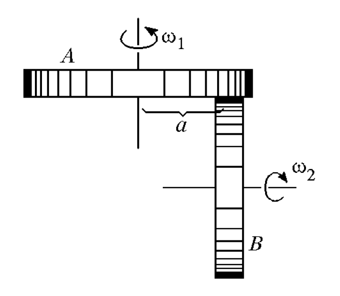


Рис. 78

Потеря кинетической энергии на трение равна

$$\Delta K = \frac{1}{2}\,\frac{I_1 I_2 R_1^2}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2}\,\omega_0^2.$$

13. Почему в предыдущей задаче полный момент импульса системы не сохраняется?

14. Однородный диск A массой M_1 и радиусом r_1 (рис. 78) раскручен до угловой скорости ω_0 и приведен в контакт с диском B, ось вращения которого перпендикулярна к оси диска A. Масса диска B равна M_2, а расстояние между точкой соприкосновения и осью диска A равна a. Найти установившиеся угловые скорости дисков ω_1 и ω_2 и потерю энергии в процессе установления. Трением в осях, а также трением качения пренебречь.

Ответ. $\omega_1 = \dfrac{M_1 r_1^2}{M_1 r_1^2 + M_2 a^2}\,\omega_0$, $\omega_2 = \dfrac{M_1 r_1^2}{M_1 r_1^2 + M_2 a^2}\,\dfrac{a}{r_2}\,\omega_0 = \dfrac{a}{r_2}\,\omega_1$.

Потеря энергии

$$\Delta K = \frac{M_1 M_2 r_1^2 a^2}{4(M_1 r_1^2 + M_2 a^2)}\,\omega_0^2.$$

15. Вертикальный столб высотой l подпиливается у основания и падает на землю, поворачиваясь вокруг нижнего основания. Определить линейную скорость его верхнего конца в момент удара о землю. Какая точка столба будет в этот момент иметь ту же скорость, какую имело бы тело, падая с той же высоты, как и данная точка?

Ответ. $v = \sqrt{3gl}$. Искомая точка находится на расстоянии $x = {}^2\!/_3\, l$ от основания столба.

16. Изменится ли ответ в предыдущей задаче, если столб первоначально стоял в вертикальном положении на абсолютно гладком льду, а затем начал падать под действием силы тяжести? Чем будет отличаться движение столба в этом случае от движения в предыдущем случае?

Решение. По теореме Кёнига кинетическая энергия столба слагается из кинетической энергии движения его центра масс ${}^1\!/_2\, m v_C^2$ со скоростью v_C и кинетической энергии вращения ${}^1\!/_2\, I\omega^2$ вокруг центра масс с угловой скоростью ω. За время падения центр масс проходит путь $l/2$. При этом совершается работа $mgl/2$, которая идет на приращение кинетической энергии:

$$\frac{1}{2}\,m v_C^2 + \frac{1}{2}\,I\omega^2 = \frac{1}{2}\,mgl.$$

В нижнем положении, когда столб горизонтален, $v_C = {}^1\!/_2\, l\omega$. Имея это в виду, а также используя выражение $I = {}^1\!/_2\, ml^2$, получим $v_C = {}^1\!/_2 \sqrt{3gl}$. Скорость верхнего конца столба вдвое больше, т. е. равна $v = \sqrt{3gl}$. Отсюда видно, что результаты будут такими же, что и в предыдущей задаче. Однако характер движения будет другим. В предыдущем случае столб при падении вращался вокруг своего нижнего основания. При этом центр масс столба двигался по дуге окружности. В рассматриваемом случае, поскольку все действующие силы направлены вертикально, центр масс столба при его падении все время будет находиться на одной и той же вертикали.

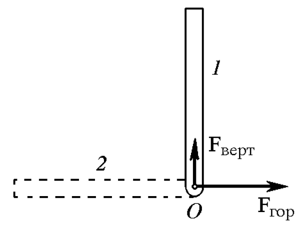


Рис. 79

17. Однородный стержень массой m и длиной l (рис. 79) падает без начальной скорости из положения *1*, вращаясь без трения вокруг неподвижной горизонтальной оси O. Найти горизонтальную $F_{гор}$ и вертикальную $F_{верт}$ составляющие силы, с которыми ось O действует на стержень в горизонтальном положении *2*.

Решение. Кинетическая энергия стержня в горизонтальном положении ${}^1\!/_2\, I\omega^2 = {}^1\!/_2\, mgl$. Центростремительное ускорение центра масс стержня в том же положении ${}^1\!/_2\, \omega^2 l$. Отсюда по теореме о движении центра масс

$$F_{гор} = m\omega^2 \frac{l}{2} = \frac{ml^2}{2I}\, mg = \frac{3}{2}\, mg.$$

Применив к вращению стержня в положении *2* уравнение (33.4), получим

$$I \frac{d\omega}{dt} = mg \frac{l}{2}.$$

Отсюда находим вертикальную составляющую ускорения центра масс в том же положении:

$$a = \frac{l}{2} \frac{d\omega}{dt} = \frac{mgl^2}{4I} = \frac{3}{4}\, g.$$

Далее,

$$ma = mg - F_{верт}.$$

В результате получится

$$F_{верт} = m(g - a) = \frac{1}{2}\, mg.$$

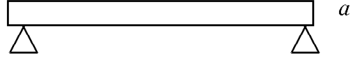


Рис. 80

18. Абсолютно твердая однородная балка весом P лежит своими концами на двух абсолютно твердых опорах (рис. 80 *а*). Одну из них выбивают. Найти начальную силу давления, действующую на оставшуюся опору (рис. 80 *б*).

Ответ. $F = {}^1\!/_4\, P$.

Когда балка лежала на двух опорах, на каждую из опор действовала сила ${}^1\!/_2 P$. При быстром удалении одной из опор сила, действующая на оставшуюся опору, скачкообразно уменьшается вдвое. Такое скачкообразное изменение связано с идеализацией — балка и опора считаются абсолютно твердыми. Реальные балки и опоры деформируются. При учете этого обстоятельства нагрузка на опору F будет меняться непрерывно.

19. Гимнаст на перекладине выполняет большой оборот из стойки на руках, т. е. вращается, не сгибаясь, вокруг перекладины под действием собственного веса. Оценить приближенно наибольшую нагрузку F на его руки, пренебрегая трением ладоней о перекладину.

Ответ. $F = \left(1 + \frac{4a^2 m}{I}\right) mg$, где m — масса, I — момент инерции человека относительно перекладины, a — расстояние между осью вращения и центром масс человека. Если при оценке момента инерции моделировать человека однородным стержнем, вращающимся вокруг одного из его концов, то получится $F = 4mg$.

20. Человек на аттракционе «гигантские шаги» движется по замкнутой траектории таким образом, что достигаемая им высота относительно положения равновесия меняется в пределах от $h_{\text{мин}}$ до $h_{\text{макс}}$. Определить максимальную и минимальную скорости человека при таком движении, если длина веревки, на которой он удерживается, равна l.

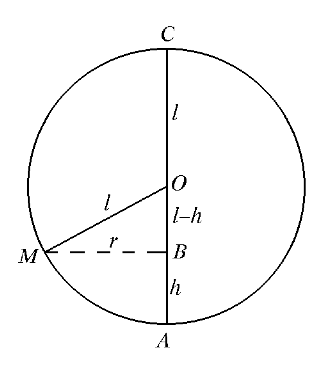


Рис. 81

Решение. На основании закона сохранения энергии

$$v^2 + 2gh = \text{const}. \tag{37.3}$$

Момент силы тяжести относительно точки подвеса не имеет вертикальной составляющей. Момент силы натяжения веревки равен нулю. Поэтому при движении человека вертикальная составляющая его момента импульса остается неизменной. В положениях, где высота h максимальна или минимальна, скорость человека v горизонтальна, а момент импульса равен mvr, где r — расстояние до вертикальной оси, вокруг которой вращается человек. Значит, в этих положениях величина vr одна и та же. В момент, когда высота h максимальна или минимальна, опишем в вертикальной плоскости окружность с центром в точке подвеса O, проходящую через точку нахождения человека M (рис. 81). По известной геометрической теореме $r^2 = AB \cdot BC$, или $r^2 = (2l - h)h$. Поэтому в положениях, где h максимальна и минимальна,

$$(2l - h)hv^2 = \text{const}. \tag{37.4}$$

Запишем соотношения (37.3) и (37.4) для этих положений, имея в виду, что максимуму h соответствует минимум v, и наоборот. Получим

$$v^2_{\text{макс}} + 2gh_{\text{мин}} = v^2_{\text{мин}} + 2gh_{\text{макс}},$$

$$(2l - h_{\text{мин}})h_{\text{мин}}v^2_{\text{макс}} = (2l - h_{\text{макс}})h_{\text{макс}}v^2_{\text{мин}}.$$

Решая эти уравнения, получим

$$v^2_{\text{макс}} = \frac{2gh_{\text{макс}}(2l - h_{\text{макс}})}{2l - (h_{\text{макс}} + h_{\text{мин}})}, \tag{37.5}$$

$$v^2_{\text{мин}} = \frac{2gh_{\text{мин}}(2l - h_{\text{мин}})}{2l - (h_{\text{макс}} + h_{\text{мин}})}. \tag{37.6}$$

При этом учтено, что в реальных условиях $h < l$, так что величина (37.5) действительно максимальна, а (37.6) — действительно минимальна. Если $h_{\text{макс}}$ и $h_{\text{мин}}$ пренебрежимо малы по сравнению с l, то

$$v^2_{\text{макс}} = 2gh_{\text{макс}}, \quad v^2_{\text{мин}} = 2gh_{\text{мин}}. \tag{37.7}$$

21. По внутренней поверхности конической воронки, стоящей вертикально, без трения скользит маленький шарик (рис. 82). В начальный момент шарик находился на высоте h_0, а скорость его v_0 была горизонтальна. Найти v_0, если известно, что при дальнейшем движении шарик поднимается до высоты h, а затем начинает опускаться. Найти также скорость шарика в наивысшем положении v.

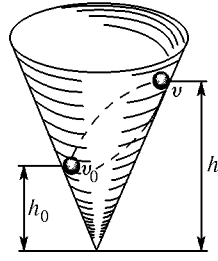


Рис. 82

Ответ. $v_0^2 = \dfrac{2gh^2}{h+h_0}$, $v^2 = \dfrac{2gh_0^2}{h+h_0}$.

22. Тяжелая веревка (линейная плотность ρ) длиной L перекинута через блок с моментом инерции I и радиусом r. В начальный момент блок неподвижен, а больший из свешивающихся концов веревки имеет длину l. Найти угловую скорость вращения блока ω, когда веревка соскользнет с него. Веревка движется по блоку без скольжения, трение в оси блока не учитывать.

Ответ: $\omega^2 = \dfrac{\rho g}{I + L\rho r^2}\left[L^2 + 4r^2 - l^2 - (L - l - \pi r)^2\right]$.

Указание. Воспользоваться законом сохранения энергии.

23. Метеорит массой $m = 10^5$ т, двигавшийся со скоростью $v = 50$ км/с, ударился о Землю на широте $\vartheta = 60^\circ$. Вся его кинетическая энергия перешла в тепловую (внутреннюю) энергию, а сам он испарился. Какое максимальное влияние мог оказать удар такого метеорита на продолжительность суток?

Ответ: Максимальное изменение продолжительности суток ΔT, вызванное ударом метеорита, определяется формулой

$$\frac{\Delta T}{T} = \pm \frac{mvR\cos\vartheta}{2\pi I}\, T,$$

где $T = 86164$ с — продолжительность суток, $R = 6400$ км — радиус, $M = 6 \cdot 10^{21}$ т — масса Земли, I — ее момент инерции. Если считать Землю однородным шаром, то $I = 2/5\, MR^2$ (на самом деле из-за возрастания плотности к центру Земли момент инерции ее несколько меньше и составляет приблизительно $I = 1/3\, MR^2$). В результате получится $\Delta T/T \sim 2 \cdot 10^{-5}$, $\Delta T \sim 2 \cdot 10^{-10}$ с.

24. Оценить, с какой минимальной скоростью v нужно выпустить на экваторе Земли снаряд массой $m = 1000$ т, чтобы изменить продолжительность земных суток на $\Delta T = 1$ мин?

Ответ. Наивыгоднейшим является выстрел в горизонтальном направлении в плоскости экватора. В этом случае

$$\frac{c - v}{c} \approx \frac{5}{18}\,\frac{m^2c^2T^4}{\pi^2 IM(\Delta T)^2} \approx \frac{25}{36}\,\frac{m^2c^2T^4}{\pi^2 M^2R^2(\Delta T)^2} \approx 2 \cdot 10^{-22},$$

где c — скорость света в вакууме. Остальные обозначения такие же, как в предыдущей задаче. Относительно приближенных вычислений см. § 22.

25. *Пульсарами* называются небесные объекты, посылающие импульсы радиоизлучения, следующие друг за другом с высокостабильными периодами, которые для известных к настоящему времени пульсаров лежат в пределах примерно от $3 \cdot 10^{-2}$ до 4 с. Согласно современным представлениям пульсары представляют собой вращающиеся нейтронные звезды, образовавшиеся в результате гравитационного сжатия. Нейтронные звезды подобны гигантским атомным ядрам, построенным из одних только нейтронов. Плотность вещества ρ в нейтронной звезде не однородна, но при грубых оценках ее можно считать одной и той же по всему объему звезды и по порядку величины равной 10^{14} г/см^3. Оценить период вращения T, с каким стало бы вращаться Солнце, если бы оно превратилось в нейтронную звезду. Плотность вещества Солнца возрастает к его центру, а различные слои его вращаются с различными скоростями. При оценке этими обстоятельствами пренебречь и считать, что средняя плотность солнечного вещества $\rho_0 = 1{,}41$ г/см^3, а период вращения Солнца $T_0 = 2{,}2 \cdot 10^6$ с.

Ответ. $T \approx T_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{2/3} = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ с.

26. Гладкий твердый стержень длиной l_0 и массой M равномерно вращается с угловой скоростью ω_0 вокруг неподвижной оси, проходящей через один из концов стержня перпендикулярно к его продольной оси. На стержень надет шарик массой m. Вначале шарик находится на свободном конце стержня и вращается вместе с ним (упор, имеющийся на конце стержня, не позволяет шарику соскользнуть со стержня). В некоторый момент шарику сообщается скорость v, направленная вдоль стержня к оси вращения. Определить наименьшее расстояние l, до которого приблизится шарик к оси вращения, и угловую скорость системы ω в этом положении. В какую сторону будет изогнут стержень, когда шарик движется по направлению к оси вращения? Как изменится изгиб стержня, когда шарик, достигнув наименьшего удаления до оси, начнет двигаться в обратном направлении?

Ответ. $\omega = \omega_0 + \frac{mv^2}{(1/3\, M + m) l_0^2 \omega_0}$, $l = l_0 \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega}}$. При приближении шарика к оси вращения стержень будет изгибаться в сторону, противоположную вращению. При удалении шарика изгиб стержня изменится в обратную сторону.

§ 38. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И СИММЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА И ВРЕМЕНИ

1. Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса связаны с определенными свойствами *симметрии пространства и времени*. Разумеется, их нельзя получить из одних только свойств симметрии какого бы то ни было вида. Законы сохранения относятся к материальным физическим объектам, а последние не являются только пространственно-временными конструкциями. Для вывода законов сохранения в механике нужны какие-то дополнительные исходные положения механического характера. Однако число этих исходных положений можно уменьшить, если использовать свойства симметрии пространства и времени. Так, в этом случае при выводе

законов сохранения импульса и момента импульса не потребуется закон равенства действия и противодействия.

В аналитической механике основные законы обычно выражают через *функцию Лангранжа* (по имени французского математика и механика Жозефа Лангранжа (1736—1813)), и симметрия, о которой идет речь, означает пространственно-временную симметрию самой функции Лангранжа. В общем курсе физики мы не можем идти по этому пути. В основу изложения мы положим *второй закон Ньютона.* Тогда утверждение, приведенное в начале этого параграфа, надо понимать в том смысле, что перечисленные в нем законы сохранения *можно получить из второго закона Ньютона, если к нему присоединить свойства симметрии пространства и времени.* Впрочем, при выводе закона сохранения энергии надо ввести и некоторые более специальные предположения относительно характера действующих сил.

2. Под симметрией пространства и времени понимают *однородность времени, однородность и изотропию пространства.* Однородность времени означает равноправие всех моментов времени. Однородность пространства означает, что в пространстве нет выделенных положений, все точки пространства равноправны. Аналогично изотропия пространства характеризуется отсутствием в нем выделенных направлений, все направления в пространстве эквивалентны.

Более полно:

Однородность времени означает, что если в два любые момента времени все тела замкнутой системы поставить в совершенно одинаковые условия, то начиная с этих моментов все явления в ней будут протекать совершенно одинаково.

Однородность пространства означает, что если замкнутую систему тел перенести из одного места пространства в другое, поставив при этом все тела в ней в те же условия, в каких они находились в прежнем положении, то это не отразится на ходе всех последующих явлений. В том же смысле надо понимать и изотропию пространства, только вместо переноса замкнутой системы надо говорить о ее *повороте* в пространстве на любой угол.

Оговорка относительно замкнутости системы существенна. Положения тела у подножья горы и на ее вершине отнюдь не эквивалентны. На Земле направления вверх и вниз объективно характеризуются разными свойствами: тела на Земле из состояния покоя самопроизвольно всегда падают вниз, но никогда не поднимаются вверх. Одно и то же явление протекает по времени по-разному, если его начать воспроизводить в различные моменты времени, так как при переходе от одного момента времени к другому может измениться обстановка, в которой явление происходит. Но все эти примеры относятся к незамкнутым системам. На поведении замкнутых систем изменения окружающей обстановки не сказываются.

Здесь необходимо сделать такое же замечание, что и в § 15 в связи с принципом относительности Галилея. Нельзя понимать под замкнутой системой тел всю Вселенную. Если поступить так, то

перечисленные свойства симметрии пространства и времени стали бы самоочевидными. Но они стали бы и бессодержательными. Ибо говорить о переносе или повороте системы тел можно только по отношению к каким-то другим телам. Речь идет не о всей Вселенной в целом, а о таких ее частях, которые можно рассматривать как (приближенно) *замкнутые системы*. Отсюда ясно, что свойства пространства и времени, о которых мы говорили, отнюдь не самоочевидны. На них надо смотреть как на *фундаментальные обобщения опытных фактов*.

3. После этих разъяснений обратимся к выводу закона сохранения энергии в механике. Из динамики мы заимствуем следствие второго закона Ньютона, выражающееся формулой

$$A_{12} = K_2 - K_1, \tag{38.1}$$

т. е. работа сил над механической системой равна приращению ее кинетической энергии K (см. § 22). Следующую часть наших рассуждений проведем применительно к одной материальной точке. В случае системы материальных точек все будет обстоять так же, изменится только число аргументов, от которых зависит потенциальная функция U, вводимая ниже. Предположим, что проекции силы F_x, F_y, F_z, действующие на материальную точку, могут быть получены дифференцированием потенциальной функции U:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Однако сама потенциальная функция U может зависеть явно не только от координат x, y, z рассматриваемой материальной точки, но и от времени t: $U = U(x, y, z, t)$. Например, это будет так, когда точка находится в силовом поле других тел, которое меняется во времени. Работа, производимая действующими силами над материальной точкой при перемещении ее вдоль некоторой кривой из положения *1* в положение *2*, представляется интегралом

$$A_{12} = -\int \left(\frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy + \frac{\partial U}{\partial z}\,dz\right),$$

взятым вдоль той же кривой. Прибавим и вычтем под знаком интеграла член $\frac{\partial U}{\partial t}\,dt$. Тогда, вводя полный дифференциал

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy + \frac{\partial U}{\partial z}\,dz + \frac{\partial U}{\partial t}\,dt,$$

представим предыдущее выражение в виде

$$A_{12} = -\int dU + \int \frac{\partial U}{\partial t}\,dt.$$

В таком виде оно справедливо и для системы материальных точек. Поэтому дальнейшие рассуждения не связаны с предположением,

что система состоит из одной материальной точки. После интегрирования получаем

$$A_{12} = U_1 - U_2 + \int \frac{\partial U}{\partial t}\, dt. \tag{38.2}$$

Комбинация этой формулы с (38.1) приводит к соотношению

$$(K_2 + U_2) - (K_1 + U_1) = \int \frac{\partial U}{\partial t}\, dt. \tag{38.3}$$

До сих пор мы не использовали условие замкнутости системы и свойства однородности времени, поэтому наши рассуждения применимы и для незамкнутых систем. Допустим теперь, что система замкнута. Тогда ввиду однородности времени функция U не может явно зависеть от времени, т. е. $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$. В результате получим

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2, \tag{38.4}$$

т. е. уравнение, выражающее механический закон сохранения энергии.

4. Перейдем к доказательству закона сохранения импульса. Допустим, что механическая система замкнута. Все силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., действующие на материальные точки системы, являются силами внутренними, внешних сил нет. Ввиду однородности пространства энергия системы не изменится, если систему сместить из одного положения пространства в другое. Математически

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots) = U(\mathbf{r}_1 + \mathbf{R}, \mathbf{r}_2 + \mathbf{R}, \ldots),$$

каковы бы ни были радиусы-векторы материальных точек системы в начальном положении $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, ... и каков бы ни был вектор смещения $\mathbf{R}$. Выберем $\mathbf{R}$ бесконечно малым и направим его вдоль оси X: $\mathbf{R} = \delta x\, \mathbf{i}$. Тогда

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2} + \ldots\right) \delta x = 0.$$

Ввиду произвольности δx выражение в скобках обращается в нуль. А в силу (29.9) его можно представить в виде $F_{1x} + F_{2x} + \ldots = 0$. Аналогичные соотношения можно написать и для проекций сил на оси Y и Z. Вообще для замкнутой системы $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots = 0$. А это есть как раз то условие, при выполнении которого из второго закона Ньютона получается закон сохранения импульса (см. § 12).

5. Закон сохранения момента импульса для замкнутой системы доказывается в точности так же. Используя изотропию пространства, можно доказать, что геометрическая сумма моментов внутренних сил, действующих в системе, равна нулю: $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \ldots = 0$ (см. задачу 2 к § 46). Отсюда немедленно следует рассматриваемый закон (см. § 30).

ЗАДАЧИ

1. Пусть $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ означает потенциальную энергию взаимодействия двух материальных точек как функцию радиусов-векторов $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, определяющих их положения в пространстве. Используя однородность пространства, доказать, что U является функцией только разности $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Обобщить результат на случай системы n взаимодействующих материальных точек.

Решение. Ввиду однородности пространства потенциальная энергия U не изменится, если обе взаимодействующие точки сместить на один и тот же вектор $\mathbf{a}$. Записанное математически, это условие гласит: $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = U(\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}, \mathbf{r}_2 + \mathbf{a})$. Это соотношение должно выполняться, каков бы ни был вектор $\mathbf{a}$. Полагая $\mathbf{a} = -\mathbf{r}_1$, получим $U = U(0, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$, т. е. $U = f(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$, где f — какая-то функция только разности $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

Если система состоит из n взаимодействующих материальных точек, то, рассуждая аналогично, найдем

$$U = f(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1, \ldots).$$

Разумеется, вместо первой точки можно взять любую из материальных точек системы. Значит, потенциальная энергия U может зависеть только от $n-1$ векторных аргументов: разностей радиусов-векторов каких-либо $n-1$ точек системы и радиуса-вектора остальной точки.

2. Какие дополнительные ограничения накладывает на вид функции U изотропия пространства?

Ответ. Потенциальная энергия U может зависеть только от расстояний каких-либо $n-1$ материальных точек системы от остальной точки.

3. Используя однородность пространства и галилеевский принцип относительности, показать, что сила взаимодействия материальных точек *1* и *2* не зависит от их координат и скоростей, а может зависеть только *от разностей* этих координат и скоростей.

Решение. В силу однородности пространства и галилеевского принципа относительности ускорение $\mathbf{a}$, а с ним и сила $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$ инвариантны относительно переноса начала координат и преобразования Галилея. Возьмем две системы отсчета S и S'. Рассматривая силу $\mathbf{f}$ как функцию координат и скоростей в системе S', напишем $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2)$. Систему S' можно выбрать произвольно. Выберем ее так, чтобы в рассматриваемый момент времени материальная точка *1* находилась в начале координат $(\mathbf{r}'_1 = 0)$, а ее скорость равнялась нулю $(\mathbf{v}'_1 = 0)$. Тогда в этот момент сила $\mathbf{f}$ будет функцией только двух аргументов: $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\Delta\mathbf{r}'_2, \Delta\mathbf{v}'_2)$. Но разности координат и скоростей в обеих системах отсчета одинаковы, а потому $\Delta\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\Delta\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$. В результате получим

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1).$$

ГЛАВА VI
ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 39. КИНЕМАТИКА ГАРМОНИЧЕСКОГО КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Колебательные явления играют важную роль в самых разнообразных вопросах физики. Подробный разбор их дается в других разделах нашего курса. Здесь же мы ограничимся предварительным рассмотрением простейших *механических колебаний*. Начнем с *колебательного движения* материальной точки. В таком движении точка через равные промежутки времени проходит через одно и то же положение и притом в одном и том же направлении.

Важнейшим среди колебательных движений является так называемое *простое* или *гармоническое колебательное движение*. О нем мы уже говорили в § 11. Характер такого движения лучше всего раскрывается с помощью следующей кинематической модели. Допустим, что геометрическая точка M равномерно вращается по окружности радиуса A с постоянной угловой скоростью ω (рис. 83). Ее проекция N на диаметр, например, на ось X, будет совершать колебательное движение от крайнего положения N_1 до другого крайнего положения N_2 и обратно. Такое колебание точки N и называют простым или гармоническим колебанием. Чтобы его описать, надо найти координату x точки N как функцию времени t. Допустим, что в начальный момент времени $t = 0$ радиус OM образовывал с осью X угол δ. Спустя время t этот угол получит приращение ωt и сделается равным $\omega t + \delta$. Из рис. 83 видно, что

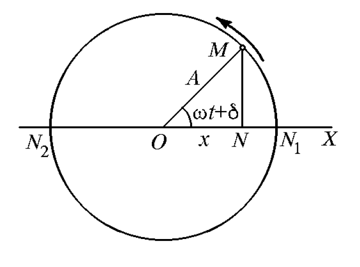


Рис. 83

$$x = A \cos(\omega t + \delta). \tag{39.1}$$

Эта формула и описывает аналитически гармоническое колебательное движение точки N вдоль диаметра N_1N_2.

Величина A дает максимальное отклонение колеблющейся точки от положения равновесия O. Она называется *амплитудой колебания*. Величина ω называется *циклической частотой*. Величину $\omega t + \delta$ называют *фазой колебания*, а ее значение при $t = 0$, т. е. величину δ, — *начальной фазой*. Если $\delta = 0$, то $x = A\cos\omega t$; если $\delta = -\pi/2$, то $x = A \sin \omega t$ и т. д. Таким образом, при гармоническом

колебании абсцисса x является синусоидальной или косинусоидальной функцией времени t. Для графического изображения гармонического колебательного движения можно откладывать по горизонтальной оси время t, а по вертикальной оси — смещение точки x (см. рис. 22). Тогда получится периодическая кривая — *синусоида*. Форма кривой полностью определяется амплитудой A и циклической частотой ω. Однако ее положение зависит также от начальной фазы δ. По истечении времени

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{39.2}$$

фаза получает приращение 2π, а колеблющаяся точка возвращается в свое исходное положение с сохранением начального направления движения. Время T называется *периодом колебания*.

Скорость колеблющейся точки найдется дифференцированием выражения (39.1) по времени. Это дает

$$v = \dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \delta). \tag{39.3}$$

Дифференцируя вторично, получаем ускорение

$$a = \dot{v} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta), \tag{39.4}$$

или, используя (39.1),

$$a = -\omega^2 x. \tag{39.5}$$

Сила, действующая на материальную точку при гармоническом колебании, равна

$$F = ma = -m\omega^2 x. \tag{39.6}$$

Она пропорциональна отклонению x и имеет противоположное направление. Она всегда направлена к положению равновесия. Такого рода силы часто возникают при малых смещениях материальной точки из положения равновесия.

§ 40. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ГРУЗА НА ПРУЖИНЕ

1. Рассмотрим спиральную пружину, один конец которой закреплен, а к другому подвешено тело массой m (рис. 84). Пусть l_0 — длина недеформированной пружины. Если пружину растянуть или сжать до длины l, то возникает сила F, стремящаяся вернуть тело в положение равновесия. При небольших растяжениях $x = l - l_0$ справедлив *закон Гука* — сила пропорциональна растяжению пружины: $F = -kx$. В этих условиях уравнение движения тела имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx. \tag{40.1}$$

Постоянная k называется *коэффициентом упругости* или *жесткостью* пружины. Знак минус означает, что сила F направлена

в сторону, противоположную смещению x, т. е. к положению равновесия.

При выводе уравнения (40.1) предполагалось, что никакие другие силы на тело не действуют. Покажем, что тому же уравнению подчиняется движение тела, подвешенного на пружине в однородном поле тяжести. Обозначим в этом случае буквой X *удлинение пружины,* т. е. разность $X = l - l_0$. Пружина тянет груз вверх с силой kX, сила тяжести — вниз. Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{X} = -kX + mg.$$

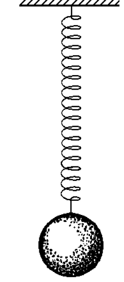


Рис. 84

Пусть X_0 означает удлинение пружины в положении равновесия. Тогда $-kX_0 + mg = 0$. Исключая вес mg, получим $m\ddot{X} = -k(X - X_0)$, тогда уравнение движения примет прежний вид (39.1). Величина x по-прежнему означает смещение груза из положения равновесия. Однако положение равновесия смещается под действием силы тяжести. Кроме того, при наличии тяжести меняется смысл величины $-kx$. Теперь она означает равнодействующую сил натяжения пружины и веса груза. Но все это не затрагивает математическую сторону колебательного процесса. Поэтому можно рассуждать так, как если бы силы тяжести совсем не было. Так мы и поступим.

2. Результирующая сила $F = -kx$ имеет такой же вид, что и сила в выражении (39.6). Если положить $m\omega^2 = k$, то уравнение (40.1) перейдет в

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{40.2}$$

Это уравнение совпадает с уравнением (39.5). Функция (39.1) является решением такого уравнения при любых значениях постоянных A и δ. Можно доказать, что это есть *общее решение,* т. е. всякое решение уравнения (40.2) может быть представлено в виде (39.1). Различные решения отличаются друг от друга только значениями постоянных A и δ. (Доказательство приводится в конце параграфа.) Из изложенного следует, что груз на пружине будет совершать гармонические колебания с круговой частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{40.3}$$

и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{40.4}$$

Период колебаний T не зависит от амплитуды A. Это свойство называется *изохронностью* колебаний. Изохронность, однако, имеет место до тех пор, пока справедлив закон Гука. При больших растяжениях закон Гука нарушается. Тогда и колебания перестают быть

изохронными, т. е. появляется зависимость периода колебаний от амплитуды.

Амплитуда A и начальная фаза δ не могут быть определены из дифференциального уравнения (40.2). Эти постоянные определяются начальными условиями, например начальными значениями смещения x и скорости $\dot{x}$. Дифференциальное уравнение (40.2) справедливо при любых начальных условиях. Оно описывает весь комплекс колебаний, которые может совершать рассматриваемая система. Конкретное колебание выделяется из этого комплекса заданием постоянных A и δ.

3. Потенциальная и кинетическая энергии тела даются выражениями

$$E_{\text{пот}} = \frac{1}{2} kx^2, \quad E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\dot{x}^2. \tag{40.5}$$

Каждая из них меняется во времени. Однако их сумма E во времени должна оставаться постоянной:

$$E = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \text{const}. \tag{40.6}$$

Если воспользоваться выражением (39.1), то из формул (40.5) найдем

$$E_{\text{пот}} = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2 (\omega t + \delta), \qquad E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2 (\omega t + \delta),$$

или в силу соотношения (40.3)

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2 (\omega t + \delta).$$

Эти формулы можно также записать в виде

$$E_{\text{пот}} = \frac{1}{4} kA^2 [1 + \cos 2(\omega t + \delta)],$$

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{4} kA^2 [1 - \cos 2(\omega t + \delta)].$$

Они показывают, что *кинетическая и потенциальные энергии в отдельности не остаются постоянными, а совершают гармонические колебания вокруг общего среднего значения* $\frac{1}{4} kA^2$ *с удвоенной круговой частотой* 2ω. Когда кинетическая энергия проходит через максимум, потенциальная обращается в нуль и обратно. Однако полная энергия $E = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}}$ остается постоянной и связана с амплитудой A соотношением

$$E = \frac{1}{2} kA^2. \tag{40.7}$$

Приведенное простое вычисление вместе с тем показывает, что выражение (39.1) является решение дифференциального уравнения (40.6) при условии, что частота ω определяется формулой (40.3), а амплитуда A — формулой (40.7). Таким образом, при заданной

полной энергии E постоянная A не произвольна. Имеется лишь одна произвольная постоянная, определяемая начальными условиями, а именно начальная фаза δ. Для ее определения достаточно знать, например, либо начальное смещение, либо начальную скорость. Наличие в решении только одной произвольной постоянной связано с тем, что уравнение (40.6) — *первого порядка* по времени, в отличие от (40.2), которое является уравнением *второго порядка.* Впрочем, на энергию в уравнении (40.6) можно смотреть как на параметр, который может принимать любые положительные значения, определяющиеся начальными условиями. Тогда уравнение (40.6) становится полностью эквивалентным уравнению (40.2).

4. Все изложенное здесь применимо к гармоническим колебаниям любых механических систем с *одной степенью свободы.* Мгновенное положение механической системы с одной степенью свободы может быть определено с помощью какой-либо *одной* величины q, называемой *обобщенной координатой,* например угла поворота, смещения вдоль некоторой линии и пр. Производная $\dot{q}$ обобщенной координаты по времени называется *обобщенной скоростью.* При рассмотрении колебаний механических систем с одной степенью свободы за исходное удобнее брать не уравнение движения Ньютона, а *уравнение энергии.* Его обычно легче составлять. Кроме того, оно в известном смысле проще уравнения Ньютона, так как является дифференциальным уравнением *первого,* а не второго порядка по времени. Допустим, что механическая система такова, что ее потенциальная и кинетическая энергии выражаются формулами вида

$$E_{\text{пот}} = \frac{1}{2}\,\alpha q^2, \qquad E_{\text{кин}} = \frac{1}{2}\,\beta\dot{q}^2, \tag{40.8}$$

где α и β — положительные постоянные (параметры системы). Тогда закон сохранения энергии приводит к уравнению

$$E = \frac{1}{2}\,\alpha q^2 + \frac{1}{2}\,\beta\dot{q}^2 = \text{const}. \tag{40.9}$$

Оно отличается от уравнения (40.6) только обозначениями, что при математическом рассмотрении не имеет значения. Из математической тождественности уравнений (40.6) и (40.9) следует, что и общие решения их одинаковы. Поэтому *если уравнение энергии приводится к виду* (40.9), *то*

$$q = q_0 \cos(\omega t + \delta), \tag{40.10}$$

т. е. обобщенная координата q совершает гармоническое колебание с круговой частотой

$$\omega = \sqrt{\alpha/\beta}. \tag{40.11}$$

5. В заключение покажем, как можно найти общее решение дифференциального уравнения (40.2). Из этого уравнения прежде всего вытекает

уравнение энергии (40.6). Поэтому можно сразу исходить из уравнения (40.6). Используя соотношение (40.3), запишем это уравнение в виде

$$\omega^2 x^2 + \dot{x}^2 = \text{const}. \tag{40.12}$$

Левая часть этого соотношения существенно положительна, так как она равна сумме квадратов. Поэтому правую часть можно обозначить через $\omega^2 A^2$, введя тем самым новую постоянную A. Тогда

$$\dot{x}^2 = \omega^2 (A^2 - x^2). \tag{40.13}$$

Так как $\dot{x}^2 \geqslant 0$, то $x \leqslant A$. Поэтому можно положить

$$x = A \cos \Theta, \tag{40.14}$$

где Θ — неизвестная функция времени t. Подставляя это выражение в уравнение (40.13), получим

$$\dot{x}^2 = \omega^2 A^2 (1 - \cos^2 \Theta) = \omega^2 A^2 \sin^2 \Theta,$$

откуда

$$\dot{x} = \pm \omega A \sin \Theta.$$

С другой стороны, дифференцируя выражение (40.14) по времени, находим

$$\dot{x} = -\dot{\Theta} A \sin \Theta.$$

Сравнение полученных выражений для x дает $\dot{\Theta} = \pm \omega$, откуда

$$\Theta = \pm \omega t + \delta,$$

где δ — произвольная постоянная. Таким образом,

$$x = A \cos (\pm \omega t + \delta).$$

Полученные выражения для x: $x_1 = A \cos (\omega t + \delta)$ и $x_2 = A \cos (-\omega t + \delta) = A \cos (\omega t - \delta)$ можно объединить в одно, так как δ — произвольная постоянная. Ее можно во втором выражении переобозначить, заменив на $-\delta$. Итак, в общем случае

$$x = A \cos (\omega t + \delta),$$

что совпадает с выражением (39.1).

§ 41. ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

1. *Физическим маятником* называется твердое тело, которое может качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Точка A пересечения ее с вертикальной плоскостью, проходящей через центр масс маятника, называется *точкой подвеса маятника* (рис. 85). Положение тела в каждый момент времени можно характеризовать углом отклонения его из положения равновесия φ. Угол φ играет роль обобщенной координаты q. Кинетическая энергия качающегося физического маятника определяется выражением

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2,$$

где I — момент инерции маятника относительно оси A. Потенциальная энергия равна $E_{\text{пот}} = mgh$, где h — высота поднятия центра масс C над его самым нижним положением. Обозначим через a расстояние между центром масс C и точкой подвеса A. Тогда

$$E_{\text{пот}} = mga(1 - \cos\varphi) = 2mga\sin^2(\varphi/2).$$

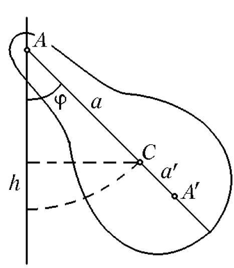
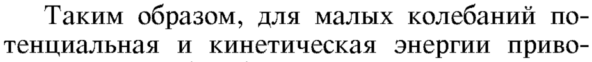


Рис. 85

В случае малых колебаний синус угла $\varphi/2$ можно приближенно заменить самим углом. В этом приближении

$$E_{\text{пот}} = \frac{1}{2}\,mga\varphi^2.$$



Таким образом, для малых колебаний потенциальная и кинетическая энергии приводятся к виду (40.8), причем $\alpha = mga$, $\beta = I$. Отсюда следует, что малые колебания физического маятника будут приблизительно гармоническими с циклической частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{I}} \qquad (41.1)$$

и периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}\,. \qquad (41.2)$$

Если период колебаний не зависит от амплитуды, то такие колебания называются *изохронными*. Мы видим, что *малые колебания физического маятника изохронны*. Колебания приближенно изохронны, когда угловая амплитуда колебаний не превышает нескольких градусов. При бо́льших амплитудах изохронность нарушается. На свойстве изохронности колебаний маятника основано его применение в часах.

Частным случаем физического маятника является *математический маятник*. Так называется маятник, вся масса которого практически сосредоточена в одной точке — в центре масс маятника C. Примером математического маятника может служить шарик, подвешенный на длинной нити. В случае математического маятника $a = l$, $I = ml^2$, где l — длина маятника, и формула (41.2) переходит в

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \qquad (41.3)$$

Сравнивая формулы (41.2) и (41.3), делаем вывод, что *физический маятник колеблется так же, как математический маятник с длиной*

$$l = \frac{I}{ma}, \qquad (41.4)$$

которая называется *приведенной длиной* физического маятника. Мы доказали это утверждение только для малых колебаний маятников.

Но оно справедливо и для колебаний с конечными амплитудами, когда колебания не изохронны. Требуется только, чтобы угловые амплитуды физического и математического маятников были одинаковы. Доказательство этого мы предоставляем читателю.

2. Отложим от точки подвеса A вдоль прямой AC отрезок AA', длина которого равна приведенной длине физического маятника l (см. рис. 85). Точка A' называется *центром качания. Центр качания можно определить как математическую точку, в которой надо сосредоточить всю массу физического маятника, чтобы период его колебаний остался без изменений.* По теореме Гюйгенса—Штейнера $I = I_C + ma^2$, где I_C — момент инерции маятника относительно параллельной оси, проходящей через центр масс C. Подставив это выражение в формулу (41.4), придадим ей вид

$$l = a + \frac{I_C}{ma}. \tag{41.5}$$

Отсюда следует, во-первых, что $l > a$, т. е. точка подвеса A и центр качания A' лежат по разные стороны от центра масс C, и, во-вторых, что всем точкам подвеса, одинаково удаленным от центра масс маятника, соответствует одна и та же длина l, а следовательно, один и тот же период колебаний T.

Точка подвеса и центр качания являются *взаимными* или *сопряженными* точками в следующем смысле. *Если маятник подвесить за центр качания A', то его период не изменится и прежняя точка подвеса A сделается новым центром качания.* Это положение называется *теоремой* Гюйгенса. Для ее доказательства обозначим через a' длину отрезка $A'C$ и допустим, что маятник подвешен за точку A'. Тогда его приведенная длина будет

$$l' = a' + \frac{I_C}{ma'}.$$

Но $a' = l - a$, или в силу соотношения (41.5) $a' = I_C/(ma)$. Подставив это значение в предыдущую формулу, получим $l' = I_C/(ma) + a$. Таким образом, $l' = l$, т. е. приведенная длина, а с ней и период колебаний физического маятника остались без изменения. Это и доказывает теорему Гюйгенса.

3. Приведем другое доказательство теоремы Гюйгенса, глубже раскрывающее ее содержание. Будем перемещать точку подвеса маятника вдоль одной и той же прямой, проходящей через центр масс C. Посмотрим, как при этом будет меняться его период колебаний. Когда точка подвеса A бесконечно удалена от C, маятник ведет себя как математический. Его период колебаний бесконечно велик. При приближении точки подвеса A к центру масс C период колебаний сначала убывает. Когда точка подвеса совместится с C, маятник при любом отклонении будет в безразличном равновесии. Это значит, что его период колебаний снова становится бесконечно большим. Поэтому по мере приближения точки A к C убывание периода должно смениться возрастанием. Положению точки подвеса, где это происходит, соот-

ветствует минимальный период колебаний. Тогда точка подвеса переходит через точку C на другую сторону прямой AA', период колебаний, перейдя через бесконечность, начинает уменьшаться. При этом двум положениям точки подвеса, находящимся по разные стороны от C на одинаковых расстояниях, соответствуют равные периоды колебаний.

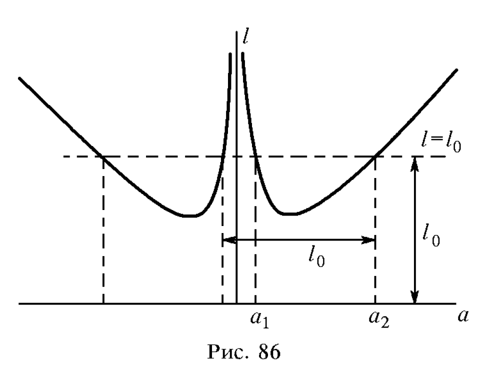


Рис. 86

Вместо периода колебаний можно пользоваться приведенной длиной маятника l, однозначно определяющей его период колебаний. При удалении точки подвеса в бесконечность или при приближении ее к центру масс C приведенная длина l стремится к бесконечности и достигает минимума в каком-то промежуточном положении. Графически это представлено кривой на рис. 86. На оси абсцисс отложена величина a, на оси ординат — приведенная длина l маятника. Кривая состоит из двух ветвей, симметрично расположенных относительно оси ординат. Одна ветвь соответствует случаю, когда точка подвеса расположена по одну, а вторая — по другую сторону от центра масс C. Аналитически кривая изображается уравнением (41.5), которое можно переписать в виде

$$a^2 - la + \frac{I_C}{m} = 0. \tag{41.6}$$

Фиксированному значению приведенной длины l_0 соответствует на рис. 86 горизонтальная прямая $l = l_0$. Точки пересечения ее с кривой определяют положение точек подвеса физического маятника, при которых его приведенная длина равна заданному значению l_0. Вообще говоря, таких точек пересечения четыре. Две из них расположены по одну, две остальные — по другую сторону от центра масс C. Их положение легко найти из квадратного уравнения

$$a^2 - l_0 a + \frac{I_C}{m} = 0. \tag{41.7}$$

Если $l_0 > 2\sqrt{I_C/m}$, это уравнение имеет два вещественных положительных корня a_1 и a_2, причем

$$a_1 + a_2 = l_0. \tag{41.8}$$

В этом случае по одну и ту же сторону от центра масс C имеются две точки подвеса A_1 и A_2 (рис. 87), которым соответствует одна и та же приведенная длина l_0. По другую сторону от центра масс C лежит вторая пара симметрично расположенных точек подвеса A_1' и A_2', характеризующаяся той же приведенной длиной l_0. Если $l_0 = 2\sqrt{I_C/m}$, корни уравнения (41.7) совпадают, т. е. обе точки подвеса по каждую сторону от центра масс сливаются в одну. Если $l_0 < 2\sqrt{I_C/m}$, корни

Рис. 87

уравнения (41.7) мнимые. Не существует точек подвеса, для которых приведенная длина была бы меньше $2\sqrt{I_C/m}$.

Теорема Гюйгенса теперь становится очевидной. Действительно, из соотношения (41.8) следует, что расстояние между точками A_1 и A_2', а также между точками A_1' и A_2 равно приведенной длине маятника l. Если одну из точек каждой пары принять за точку подвеса, то вторая будет центром качания. Но это и есть теорема Гюйгенса. Наше рассмотрение показывает также, *что точка подвеса и центр качания находятся по разные стороны от центра масс и расположены асимметрично относительно него. Исключение составляет только случай, когда $l_0 = 2\sqrt{I_C/m}$. Тогда точки A_1 и A_2 сливаются в одну точку. Сливаются также и точки A_1' и A_2'. В этом исключительном случае точка подвеса и центр качания расположены симметрично относительно центра масс.*

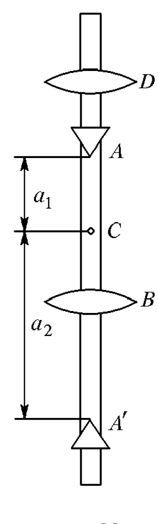


Рис. 88

4. Теорема Гюйгенса используется в *оборотном маятнике* для точных измерений ускорения свободного падения. Существуют разнообразные конструкции оборотного маятника. На рис. 88 схематически изображена одна из них. Маятник состоит из стального стержня, длина которого обычно несколько больше метра. На нем жестко закреплены опорные стальные призмы A и A' и стальная чечевица B, находящаяся между ними. Другая стальная чечевица D находится на одном из концов стержня (не между призмами), она может перемещаться по стержню и закрепляться в нужном положении. Перемещением этой чечевицы достигают совпадения периодов колебаний маятника, когда точками подвеса являются ребра опорных призм A и A'. Эти ребра закреплены *асимметрично* относительно центра масс C. Поэтому при совпадении периодов колебаний расстояние между ними дает приведенную длину физического маятника l. Измерив период колебаний T, можно вычислить g по формуле (41.3).

§ 42. БИФИЛЯРНЫЙ И ТРИФИЛЯРНЫЙ ПОДВЕСЫ

1. Найдем период малых колебаний *бифилярного подвеса*. Так называется устройство, состоящее из двух нитей AB и CD (рис. 89) одинаковой длины, на которых подвешено некоторое тело BD. Если тело повернуть вокруг вертикальной оси OO', то оно начнет совершать крутильные колебания вокруг этой оси. Бифилярный подвес есть система с одной степенью свободы. В качестве координаты, определяющей ее мгновенное положение, удобно взять угол поворота φ тела BD вокруг оси OO', отсчитывая этот угол от положения равновесия.

Кинетическая энергия системы равна $E_{\text{кин}} = {}^1\!/_2\, I\dot{\varphi}^2$, где I — момент инерции ее относительно оси OO'. Потенциальная энергия равна $E_{\text{пот}} = mgh$, где h — высота поднятия тела BD, отсчитываемая от его нижнего положения. Пусть l означает длину OO' в положении равновесия, $2a$ — рас-

стояние между точками подвеса C и A, $2b$ — расстояние DB. Предполагается, что система симметрична, так что точки O и O' являются серединами отрезков CA и DB. Высота h найдется из условия нерастяжимости нитей AB и CD. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке O, ось X направим вдоль прямой OA, ось Z — вниз вдоль прямой OO', ось Y — перпендикулярно к ним. Координаты точки A все время остаются постоянными и равны

$$x_A = a, \quad y_A = 0, \quad z_A = 0.$$

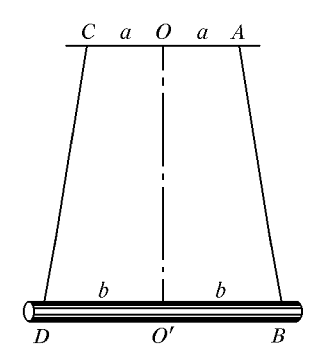


Рис. 89

Координаты точки B в положении равновесия равны

$$x_B^{(0)} = b, \quad y_B^{(0)} = 0, \quad z_B^{(0)} = l.$$

При повороте системы на угол φ координаты той же точки становятся равными

$$x_B = b\cos\varphi, \quad y_B = b\sin\varphi, \quad z_B = l - h.$$

Условие постоянства длины нити AB можно записать в виде

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = (x_B^0 - x_A^0)^2 + (y_B^0 - y_A^0)^2 + (z_B^0 - z_A^0)^2,$$

или

$$(b\cos\varphi - a)^2 + b^2\sin^2\varphi + (l - h)^2 = (b - a)^2 + l^2.$$

После простых преобразований отсюда находим

$$h = \frac{2ab(1-\cos\varphi)}{2l+h} = \frac{4\,ab}{2l+h}\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

При малых колебаниях можно положить $\sin(\varphi/2) = \varphi/2$. Кроме того, $h \ll 2\,l$, и величиной h в знаменателе можно пренебречь. В этом приближении

$$h = \frac{ab}{2l}\varphi^2, \quad E_{\text{пот}} = \frac{mgab}{2l}\varphi^2.$$

Таким образом, потенциальная и кинетическая энергии приводятся к виду (40.9), причем $\alpha = mgab/l$, $\beta = I$. Следовательно, колебания системы будут гармоническими с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Il}{mgab}}. \tag{42.1}$$

Период колебаний пропорционален корню квадратному из момента инерции и обратно пропорционален корню квадратному из массы системы. Возьмем в качестве тела BD металлический стержень. Выведем его из положения равновесия и заставим совершать крутильные колебания. Они будут сравнительно медленными. Прикрепим затем в точке O' тяжелый груз и снова заставим систему колебаться. Колебания станут значительно более быстрыми. Дело в том, что груз прикреплен на оси вращения, а потому он, значительно увеличивая массу системы, практически не влияет на ее момент инерции. Уменьшение периода колебаний можно объяснить также следующим образом. В положение равновесия система возвращается под действием горизонтальных составляющих сил натяжения нитей. Подвешивая груз, мы сильно увели-

чиваем натяжение нитей, а момент инерции увеличивается незначительно. Это и приводит к тому, что колебания становятся более быстрыми.

2. Формулой (42.1) определяется также период колебаний *трифилярного подвеса* (трифиляра). Он схематически изображен на рис. 90. Точки подвеса A, C и M расположены на окружности радиусом a, точки B, D, N — на окружности радиусом b. Нижний диск может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси OO'. Вывод формулы (42.1) применим без всяких изменений и к трифилярному подвесу. Это видно уже из того, что при выводе было использовано условие постоянства длины только одной нити AB. Постоянство длины другой нити CD при этом условии выполняется автоматически.

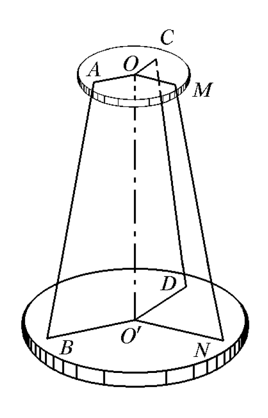


Рис. 90

Трифилярный подвес дает удобный метод измерения моментов инерции тел. Сначала измеряется период колебаний T_0 ненагруженного трифиляра. По этому периоду вычисляется его момент инерции

$$I_0 = \frac{m_0 gab}{4\pi^2 l} T_0^2.$$

Затем на нижний диск трифиляра кладется тело массой m, момент инерции I которого требуется измерить. Пусть T — период крутильных колебаний нагруженного трифиляра. Тогда момент инерции системы относительно оси OO' будет

$$I + I_0 = \frac{(m+m_0)gab}{4\pi^2 l} T^2.$$

Вычитая отсюда предыдущее выражение, находим искомый момент инерции I.

3. Укажем другой метод измерения моментов инерции, который во многих случаях является более предпочтительным. Подвесим тело на стальной проволоке, чтобы оно могло совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью проволоки (рис. 91). При повороте тела на угол φ проволока закручивается, и возникает момент сил M, стремящийся вернуть тело в положение равновесия. Опыт показывает, что момент M в довольно широких пределах пропорционален углу φ: $M = -f\varphi$, где f — постоянная для данной проволоки величина, называемая ее *модулем кручения*. Поэтому

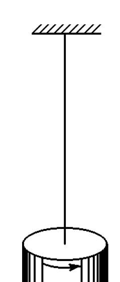
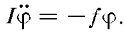


Рис. 91



$$I\ddot{\varphi} = -f\varphi.$$

Это уравнение математически тождественно уравнению (40.1). Значит, тело будет совершать гармонические крутильные колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}}. \tag{42.2}$$

Сняв первое тело, подвесим на той же проволоке другое тело с моментом инерции I'. Тогда период колебаний будет

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I'}{f}}.$$

Исключая неизвестный модуль кручения f, найдем

$$\frac{I}{I'} = \left(\frac{T}{T'}\right)^2.$$

Если один из моментов инерции, например I, известен, то по этой формуле может быть вычислен момент инерции I' другого тела. Момент инерции I можно вычислить теоретически по геометрическим размерам и массе тела. Для этого надо взять тело правильной геометрической формы, например цилиндр или шар. Формула (42.2) может быть использована также для экспериментального определения модуля кручения проволоки.

ЗАДАЧИ

1. Материальная точка движется в поле тяжести по хорде круга без начальной скорости (рис. 92). Показать, что время ее движения из точки A в нижнее положение B не зависит от положения точки A на окружности. (Этот факт был использован Галилеем для установления законов малых колебаний математического маятника. Для нахождения периода колебаний маятника Галилей заменил малую дугу окружности ADB, по которой движется материальных точка, хордой AB). Вычислить период колебаний маятника в этом приближении и убедиться, что это приближение приводит к правильной зависимости периода колебаний от длины маятника l и ускорения свободного падения g. Сравнить результат с правильной формулой (41.3).

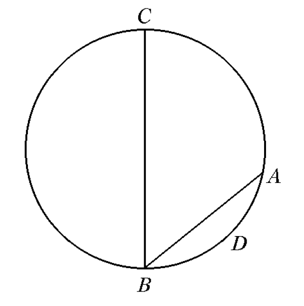


Рис. 92

Ответ. $T = 8\sqrt{\frac{l}{g}}$.

2. Через неподвижный блок с моментом инерции I (рис. 93) и радиусом r перекинута нить, к одному концу которой подвешен груз массой m. Другой конец нити привязан к пружине с закрепленным нижним концом. Вычислить период колебаний груза, если жесткость пружины равна k, а нить не может скользить по поверхности блока.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\frac{I/r^2+m}{k}}$.

3. Физический маятник представляет собой однородный стержень длиной l, подвешенный за один из его концов. Определить период колебаний такого маятника.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}$.

4. Тело вращения радиусом a с моментом инерции I (относительно геометрической оси) и массой m катается без скольжения по внутренней поверхности цилиндра радиуса R, совершая малые колебания около положения равновесия (рис. 94). Найти период этих колебаний.

Решение. Рассматривая движение тела как вращение вокруг мгновенной оси (см. § 45) с угловой скоростью ω, напишем для скорости его центра $v = \omega a$. Ту же скорость можно представить в виде $v = (R - a)\dot{\varphi}$.

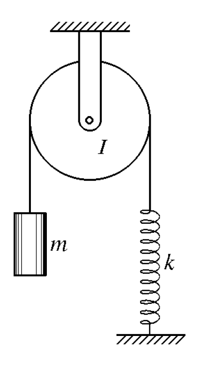


Рис. 93

Приравнивая оба выражения, находим

$$\omega = \frac{R-a}{a}\,\dot{\varphi}.$$

Кинетическая энергия по теореме Кёнига

$$K = \frac{1}{2}\,I\omega^2 + \frac{1}{2}\,m(R-a)^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\,\left(m + \frac{I}{a^2}\right)(R-a)^2\dot{\varphi}^2.$$

Потенциальная же энергия

$$U = mg(R-a)\ (1-\cos\varphi) \approx \frac{1}{2}\,mg(R-a)\varphi^2.$$

Применяя общий метод, изложенный в § 40, находим

$$T = 2\pi\,\sqrt{\left(1 + \frac{I}{ma^2}\right)\frac{R-a}{g}}.$$

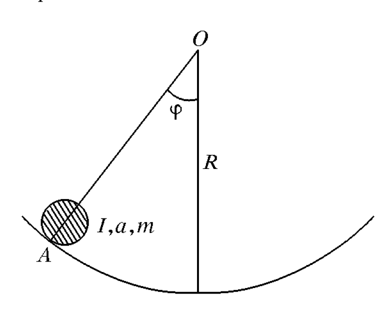


Рис. 94

В частности, для сплошного цилиндра и сплошного шара

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\,\frac{R-a}{g}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{7}{5}\,\frac{R-a}{g}}.$$

5. На горизонтальной плоскости лежит цилиндр с моментом инерции I (относительно продольной геометрической оси), массой m и радиусом r. К оси цилиндра прикреплены две одинаковые горизонтально расположенные спиральные пружины, другие концы которых закреплены в стене (рис. 95, вид сверху). Жесткость каждой пружины равна k, пружины могут работать как на растяжение, так и на сжатие. Найти период малых колебаний цилиндра, которые возникнут, если вывести его из положения равновесия и дать возможность кататься без скольжений по горизонтальной плоскости.

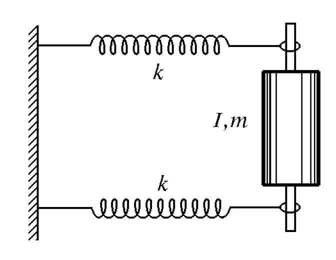


Рис. 95

Ответ. $T = \frac{2\pi}{r}\,\sqrt{\frac{I+mr^2}{2k}}$. Для сплошного цилиндра $T = \pi\,\sqrt{3m/k}$.

6. Однородная квадратная плита подвешена за свои углы к потолку зала на четырех параллельных веревках, длина каждой из которых равна l. Определить период малых крутильных колебаний плиты, которые возникнут, если повернуть ее на малый угол вокруг вертикальной оси.

Ответ. $T = 2\pi\,\sqrt{\frac{l}{3g}}$.

В более общем случае, когда плита не однородна, но центр масс ее совпадает с геометрическим центром плиты,

$$T = 2\pi\,\sqrt{\frac{2Il}{Mga^2}},$$

где I — момент инерции плиты относительно вертикальной оси, проходящей через ее центр, а a — длина одной из сторон плиты.

7. Три однородных стержня длиной l каждый соединены короткими нитями, как указано на рис. 96. Нижний стержень поворачивают на малый угол вокруг вертикальной оси, проходящей через центр системы, и отпускают. Найти период возникших при этом малых колебаний, если массы стержней одинаковы.

Рис. 96

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{2g}}$.

8. Шарик массой m подвешен на двух последовательно соединенных пружинках с жесткостями k_1 и k_2 (рис. 97). Определить период его вертикальных колебаний.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{m\left(\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}\right)}$.

Указание. Показать, что при растяжениях и сжатиях пружины ведут себя как одна пружина с жесткостью, определяемой соотношением

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}.$$

9. Найти период крутильных колебаний диска, плотно насаженного на составной стержень, состоящий из двух различных последовательно соединенных стержней (рис. 98). Верхний конец A стержня неподвижно закреплен.

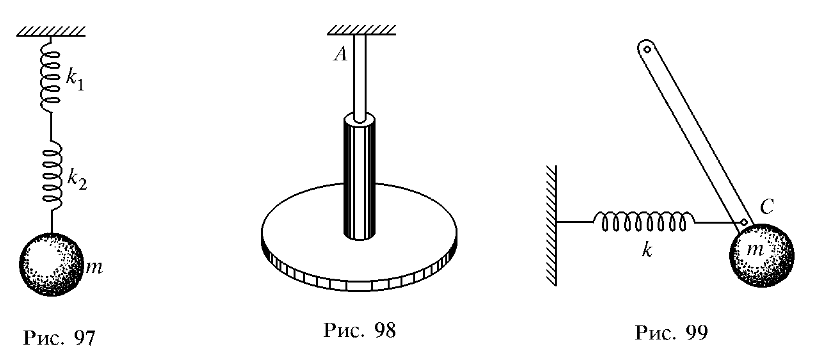


Рис. 97 Рис. 98 Рис. 99

Если бы диск был насажен только на первый стержень, то период колебаний был бы равен T_1. Если бы он был насажен только на второй стержень, то период колебаний оказался бы равным T_2.

Ответ. $T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}$.

10. Найти период малых колебаний физического маятника массой m, к центру масс C которого прикреплена горизонтальная спиральная пружина с жесткостью k. Другой конец пружины закреплен в неподвижной стенке (рис. 99). Момент инерции маятника относительно точки подвеса равен I, расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника равно a. В положении равновесия пружина не деформирована.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mga+ka^2}}$.

11. Колебательная система состоит из однородного стержня длиной l и массой m, который может вращаться вокруг горизонтальной оси O, проходящей через его конец и перпендикулярной к продольной оси стержня (рис. 100). Другой конец стержня подвешен на пружине с жесткостью k. Расстояние между центром масс стержня и осью вращения $CO = a$. Момент инерции стержня относительно оси O равен I. Найти удлинение пружины x_0 (по сравнению с ее длиной в недеформированном состоянии) в положении равновесия, если в этом положении стержень горизонтален. Определить также период малых колебаний стержня около положения равновесия.

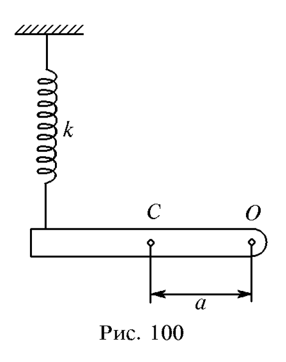


Рис. 100

Ответ. $x_0 = \dfrac{mga}{kl}$, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{kl^2}}$.

12. К концу однородного стержня длиной l и массой m прикреплена короткая упругая пластинка. Пластинку зажимают в тисках один раз так, что стержень оказывается внизу, а другой раз — вверху (рис. 101). Определить отношение периодов малых колебаний стержня в этих случаях. Момент упругих сил пластинки пропорционален углу отклонения стержня от положения равновесия, причем коэффициент пропорциональности равен k.

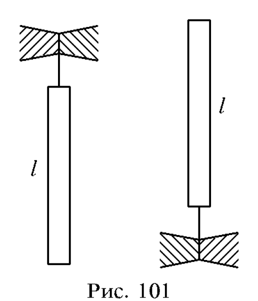


Рис. 101

Ответ. $\dfrac{T_1}{T_2} = \sqrt{\dfrac{2k-mgl}{2k+mgl}}$.

13. Два незакрепленных шарика с массами m_1 и m_2 соединены друг с другом спиральной пружинкой с жесткостью k. Определить период колебаний шариков относительно центра масс системы, которые возникнут при растяжении пружинки.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1m_2}{(m_1+m_2)k}}$.

14. Два диска с моментами инерции I_1 и I_2 насажена на общую ось, проходящую через их центры. Осью являются стержень с модулем кручения f. Определить период крутильных колебаний одного диска относительно другого в предположении, что система свободна. Массой стержня пренебречь.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_1I_2}{f(I_1+I_2)}}$.

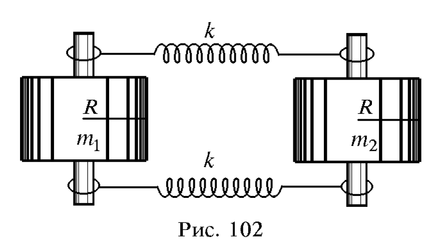


Рис. 102

15. Два сплошных однородных цилиндра с одинаковым радиусом R и массами m_1 и m_2 лежат на горизонтальном столе и связаны с помощью двух одинаковых пружин с жесткостью k каждая, как показано на рис. 102 (вид сверху). Определить период малых колебаний, которые возникнут, если растянуть пру-

жины и предоставить систему самой себе, не сообщая ей дополнительной скорости. Цилиндры катаются по столу без проскальзывания. Пружины могут работать как на растяжение, так и на сжатие.

Ответ. $T = \pi \sqrt{\frac{3m_1 m_2}{k(m_1+m_2)}}$.

16. Колебания обычного математического маятника изохронны (точнее, приблизительно изохронны) только тогда, когда их амплитуды малы. Гюйгенс задался целью построить маятник, который совершал бы строго изохронные колебания при любых амплитудах. Он показал, что таковым является *циклоидальный маятник.* Циклоидальный математический маятник представляет собой материальную точку, совершающую колебания, двигаясь под действием силы тяжести по дуге циклоиды. Показать, что колебания циклоидального маятника изохронны, и вывести формулу для его периода.

Решение. Как известно, циклоида представляет собой кривую, описываемую одной из точек окружности, катящейся по неподвижной прямой. Для наших целей надо взять циклоиду, обращенную выпуклостью вниз. В соответствии с этим примем, что окружность расположена ниже горизонтальной прямой, по которой она катится (эта прямая на рис. 103 изображена штриховой линией). За ось X примем параллельную ей прямую, смещенную вниз на диаметр окружности $2a$. Пусть точка A на катящейся окружности, описывающая циклоиду, в исходном положении находится на оси Y в наивысшей точке. Если окружность при качении повернется на угол φ, то ее центр C переместится вправо на расстояние $a\varphi$. При этом точка A сместится относительно центра влево на расстояние $a \sin \varphi$ и вниз на расстояние $a(1 - \cos \varphi)$. Поэтому прямоугольные координаты точки A станут

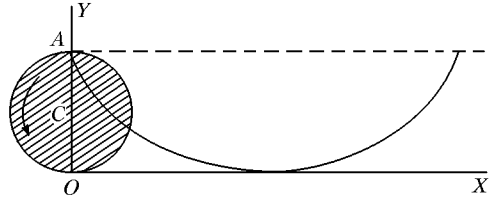


Рис. 103

$$x = a(\varphi - \sin \varphi), \quad y = a(1 + \cos \varphi).$$

Это — уравнение циклоиды в параметрической форме. Пусть теперь x и y означают координаты материальной точки, совершающей циклоидальные колебания под действием силы тяжести. Параметр φ становится функцией времени. Потенциальная энергия точки будет $U = mgy$, кинетическая — $K = {}^1\!/_2 m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$. Найдя производные $\dot{x}$, $\dot{y}$ и выполнив элементарные преобразования, получим

$$U = 2mga \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad K = 2ma^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\varphi}^2.$$

Введем обозначение $q = \cos \frac{\varphi}{2}$. Тогда $\dot{q} = -\frac{1}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \dot{\varphi}$. Величина q может быть принята за координату, определяющую положение колеблющейся точки, а ее производная $\dot{q}$ — за соответствующую обобщенную скорость. В этих обозначениях

$$U = 2mgaq^2, \quad K = 8ma^2 \dot{q}^2.$$

Потенциальная энергия является квадратичной функцией координаты q, а кинетическая — производной $\dot{q}$ с постоянными коэффициентами. Отсюда

делаем вывод, что при любых амплитудах колебания циклоидального маятника будут изохронными и гармоническими с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}}.$$

17. Маятник подвешен на резинке, растянутой настолько сильно, что ее первоначальной длиной можно пренебречь. Возможны ли горизонтальные гармонические изохронные колебания маятника сколь угодно большой амплитуды? Если возможны, то определить период этих колебаний. Возможны ли круговые движения маятника в вертикальной плоскости? Каково будет движение при любых начальных условиях?

Ответ. И те и другие движения возможны. Их период

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

где m — масса маятника, k — жесткость резинки. При произвольных начальных условиях движение маятника будет происходить по эллипсу с периодом обращения T.

18. По штанге, вращающейся в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω, может скользить без трения груз массой m, удерживаемый на некотором расстоянии от оси вращения пружиной с жесткостью k и начальной длиной r_0. Найти движение груза, которое возникнет, если штангу мгновенно остановить.

Ответ. $r = r_0\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega_0 t\right)$, где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

При этом должно быть $\omega < \omega_0$. В противном случае равновесие груза на вращающейся штанге в области применимости закона Гука было бы невозможно.

19. На горизонтальной пружине укреплено тело массой $M = 10$ кг, лежащее на гладком столе, по которому оно может скользить без трения (рис. 104). В это тело попадает и застревает в нем пуля массой $m = 10$ г, летящая с горизонтальной скоростью $v = 500$ м/с, направленной вдоль оси пружины. Тело вместе с застрявшей в нем пулей отклоняется от положения равновесия и начинает колебаться относительно него с амплитудой $a = 10$ см. Найти период колебаний тела.

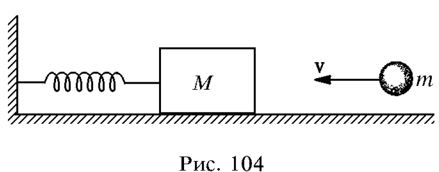


Рис. 104

Ответ. $T = 2\pi\frac{M+m}{mv}a \approx 1{,}26$ с.

20. На тонкую стальную спицу надет шарик. Противоположный конец спицы неподвижно закреплен. Показать, что если масса спицы пренебрежимо мала по сравнению с массой шарика, то период малых колебаний, возникающих при отклонении шарика в сторону, пропорционален расстоянию l между шариком и точкой закрепления спицы.

Указание. Рассмотрим вспомогательную однородную спицу, согнутую в кольцо. Если ее разрезать в одном месте и к концам прикрепить шарики A и B, то появятся упругие радикальные силы F, приложенные

к шарикам, стремящиеся распрямить спицу (рис. 105). Силы эти не зависят от места, где произведен разрез. Заметив это, вернемся теперь к нашей задаче. Если шарик сместить в сторону, то спица деформируется. При малых деформациях участок ее между шариком и точкой закрепления спицы можно в первом приближении считать дугой окружности. На основании предыдущего замечания можно утверждать, что при смещении шарика по этому деформированному участку действующая на него сила будет меняться. Пользуясь этим, нетрудно показать, что жесткость k спицы будет обратно пропорциональна квадрату длины l.

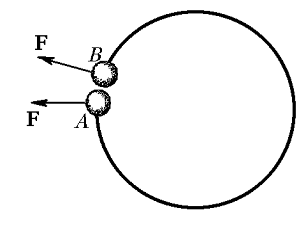


Рис. 105

21. Найти период колебаний физического маятника в зависимости от угловой амплитуды.

Решение. Закон сохранения энергии дает

$$\frac{I}{2}\dot{\varphi}^2 = mga(\cos\varphi - \cos\varphi_0),$$

где φ — угол отклонения маятника из положения равновесия, а φ_0 — максимальное его значение (угловая амплитуда колебаний). Введя приведенную длину маятника (41.4) и выполнив несложные преобразования, получим

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Разрешив это уравнение относительно dt и интегрируя по φ, найдем период колебаний маятника T как учетверенное время прохождения интервала углов от $\varphi = 0$ до $\varphi = \varphi_0$. При интегрировании удобно ввести новую переменную интегрирования $u = \sin(\varphi/2)/\sin(\varphi_0/2)$. В результате получим

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}},$$

где введено обозначение $k \equiv \sin(\varphi_0/2)$. Входящий сюда интеграл не берется в элементарных функциях. Он называется полным *эллиптическим интегралом первого рода.* Его можно представить в виде бесконечного ряда. Так как $|k\sin u| < 1$, то подынтегральное выражение можно разложить в ряд по формуле бинома Ньютона:

$$(1 - k^2\sin^2 u)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2 u + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4 u + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6 u + \ldots$$

Этот ряд равномерно сходится, а потому его можно интегрировать почленно. Сделав это, получим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\sin^6\frac{\varphi_0}{2} + \ldots\right].$$

При малых амплитудах φ_0 эта формула переходит в (41.3).

§ 43. АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

1. Энергия, импульс или момент импульса механической системы являются функциями ее координат и скоростей. Если система замкнута, то эти величины сохраняются, т. е. не меняются с течением времени. Если же система не замкнута, а параметры, определяющие ее состояние, изменяются во времени, то указанные величины, вообще говоря, также изменяются. Возьмем, например, математический маятник, нить которого перекинута через гвоздь. Параметрами здесь являются длина нити l и ускорение свободного падения g. Можно тянуть за свободный конец нити, уменьшая или увеличивая l. При этом над маятником совершается внешняя работа, а потому энергия его изменяется. Можно также менять ускорение свободного падения, поднимая или опуская маятник над земной поверхностью. Среди различных изменений внешних параметров играют свободную роль бесконечно медленные изменения, называемые *адиабатическими* *).

При этом параметры, сколь бы медленно они не менялись, могут принимать любые значения, лежащие в допустимых пределах. Для изменения их на конечные величины требуется лишь достаточно длительное время. Изменения параметров системы, даже медленные, влекут за собой и изменения других физических величин. Так, энергия системы, как уже отмечалось, не остается постоянной, поскольку во время изменения параметров над системой производится работа. Но могут встречаться и такие величины, которые остаются постоянными или приблизительно постоянными из-за медленности изменения параметров.

Функции координат, скоростей и параметров системы, остающиеся постоянными при бесконечно медленных изменениях параметров, называются адиабатическими инвариантами. Это определение в дальнейшем будет уточнено, поскольку само понятие «медленности» нуждается в уточнении. Адиабатические инварианты играли большую роль в старой полуклассической теории атома Бора. Но они имеют важное значение и в других разделах физики.

2. Выясним понятие адиабатического инварианта сначала на простейшем, но важном примере гармонического осциллятора, собственная частота которого очень медленно изменяется во времени. Примером может служить математический маятник, медленно изменяющимися параметрами которого являются длина нити l и ускорение свободного падения g (точнее, их комбинация $\omega^2 = g/l$). Другим примером может служить колебание шарика на пружине, жесткость которой k является медленно меняющимся параметром. Все эти системы, называемые *гармоническими осцилляторами*, математически эквивалентны. Для конкретности будем иметь в виду шарик на пружине. Задача о математическом маятнике сводит-

*) В термодинамике термин «адиабатический» применяется в другом смысле. Адиабатическим называют процесс, происходящий без подвода и отвода теплоты.

ся к этому случаю, если ввести обозначение $k = mg/l$. Каким образом производится изменение жесткости или величин, ей эквивалентных, — это не имеет значения, пока задача трактуется как чисто математическая.

Полная энергия гармонического осциллятора равна

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

Для ее производной по времени можно написать

$$\dot{E} = (mv\dot{v} + kx\dot{x}) + \frac{1}{2}x^2\dot{k}.$$

Выражение в скобках обращается в нуль, так как $\dot{x} = v$, действующая сила $F = -kx$ и по закону Ньютона $m\dot{v} = F$. Введя еще потенциальную энергию $U = 1/2\, kx^2$, получим

$$\dot{E} = U(x)\frac{\dot{k}}{k}. \qquad (43.1)$$

До сих пор наши вычисления были точными. Используем теперь *медленность изменения* параметра k и его производной $\dot{k}$. Медленность означает, что и при изменяющемся k движение по-прежнему будет носить характер колебаний. Только «период» этих колебаний T, а также положение крайних точек, достигаемых осциллятором, будут слегка меняться от колебания к колебанию. Иными словами, за каждое колебание параметр k должен изменяться очень мало. Это обычное представление о медленности. Но в нашей задаче его недостаточно. Надо на изменения k и его производной наложить дополнительное ограничение, потребовав, чтобы за каждый период колебания величина $\dot{k}/k$ оставалась почти постоянной. Точнее, это требование сводится к тому, чтобы на каждом периоде колебания отношение $\dot{k}/k$ могло быть представлено в виде

$$\frac{\dot{k}}{k} = \left(\frac{\dot{k}}{k}\right)_0 (1 + \alpha), \qquad (43.2)$$

где $(\dot{k}/k)_0$ — значение этого отношения в какой-либо точке рассматриваемого периода, например в его середине, а α — поправка, стремящаяся к нулю при $\dot{k} \to 0$. Имея это в виду, проинтегрируем выражение (43.1) в пределах от t до $t + T(k)$ для произвольного момента времени t. Получим

$$d\Delta E = E(t+T) - E(t) = \left(\frac{\dot{k}}{k}\right)_0 \left[\int_t^{t+T} U[x(t')]\, dt' + \beta\right]. \qquad (43.3)$$

Здесь β — поправка, обращающаяся в нуль при $\dot{k} \to 0$. (Переменная интегрирования обозначена через t', чтобы не смешивать ее с нижним пределом t.) Входящий сюда интеграл достаточно вычислить в нулевом приближении, т. е. считать при вычислении, что за время T параметр k не меняется. Возникающая вследствие этого ошибка в

выражении для ΔE будет второго или высшего порядка малости по $\dot{k}$. По той же причине можно отбросить поправку β. Наконец, можно опустить индекс нуль в множителе перед интегралом $(\dot{k}/k)_0$. Иными словами, можно написать

$$\Delta E = \frac{\dot{k}}{k} \int_t^{t+T} U[x(t')]\, dt', \tag{43.4}$$

где интеграл (но не множитель перед интегралом) вычисляется в предположении постоянства k. При вычислении интеграла момент времени t можно принять за начало отсчета времени, т. е. положить $t = 0$. Это, конечно, не изменит результата. При $k = \text{const}$ координата x совершает гармонические колебания $x = x_0 \cos(\omega t + \delta)$, а потому

$$U = \frac{1}{2} k x_0^2 \cos^2(\omega t + \delta) = \frac{1}{2} E[1 + \cos(2\omega t + \delta)],$$

так как полная энергия равна $E = ½\, k x_0^2$. Используя полученное выражение и выполняя интегрирование, получим

$$\int_0^T U\, dt = \frac{1}{2} E \int_0^T [1 + \cos(2\omega t + \delta)]\, dt = \frac{1}{2} ET.$$

Произведение $T\dot{k}$ с точностью до величин высшего порядка малости по $\dot{k}$ дает приращение Δk параметра k за период T. Таким образом, вместо (43.4) можно написать

$$\Delta E = \frac{\Delta k}{2k} E. \tag{43.5}$$

Приращение Δk за период колебаний может быть сделано сколь угодно малым. Поэтому если энергию E рассматривать как функцию параметра k, то в пределе приближенное соотношение (43.5) перейдет в точное дифференциальное уравнение

$$\frac{dE}{E} - \frac{dk}{2k} = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\ln \frac{E}{\sqrt{k}} = \text{const},$$

а потому

$$\frac{E}{\sqrt{k}} = \text{const}. \tag{43.6}$$

Используя формулы (40.3) и (40.4), из этого соотношения получим еще два других:

$$ET = \text{const}, \tag{43.7}$$

$$\frac{E}{\omega} = \text{const}. \tag{43.8}$$

Эти соотношения означают, что *величины ET и E/ω для гармонического осциллятора являются адиабатическими инвариантами.* При этом *период колебания T и частота* ω, входящие в эти соотношения, *должны вычисляться так, как если бы при колебаниях параметр k оставался постоянным*, т. е. по формулам (40.3) и (40.4). Например, в случае медленного укорочения нити математического маятника, совершающего малые колебания, его период T медленно уменьшается от колебания к колебанию. Одновременно энергия колебаний возрастает таким образом, что произведение ET остается постоянным.

3. Для правильного понимания доказанной теоремы необходимо точно отдавать себе отчет, что понимается под медленностью изменения параметра осциллятора k. Недостаточно, чтобы изменения параметра k на каждом периоде колебаний были бесконечно малы. Надо, чтобы эти изменения удовлетворяли условию (43.2). Представим себе, например, что вблизи нижнего положения нить математического маятника действием внешних сил немного укорачивается, а вблизи крайних положений удлиняется, принимая исходное значение. Работа внешних сил при укорочении нити вблизи нижнего положения будет больше работы, производимой маятником над внешними полями при удлинении нити вблизи каждого крайнего положения. Причина этого в том, что при колебаниях маятника натяжение нити меняется, достигая максимума в нижнем положении. Поэтому за каждое колебание в систему дважды будет вкладываться энергия. И если число колебаний взять достаточно большим, то и прирост энергии можно сделать также большим, хотя длина маятника, а с ней и период T останутся неизменными. Колебания с периодически меняющимися параметрами называются *параметрическими*. Примером могут служить качели. К параметрическим колебаниям результаты (43.7) и (43.8) не применимы, сколь бы малыми ни были изменения параметра k в пределах каждого периода колебаний. Причина этого в том, что эти изменения не удовлетворяют условию (43.2). Грубо говоря, *условие* (43.2) *сводится к требованию, чтобы изменения параметра k происходили медленно и монотонно.* Так, в приведенном примере адиабатическая инвариантность выражений (43.7) и (43.8) будет иметь место, если длина нити изменяется медленно и монотонно. Если же на такие изменения наложить еще малые изменения колебательного характера, подобные тем, которые имеют место при параметрическом возбуждении колебаний, то к таким случаям теорема об адиабатической инвариантности выражений (43.7) и (43.8) не применима.

4. Полученные результаты можно обобщить на случай негармонических колебаний с одной степенью свободы, т. е. колебаний, совершающихся под действием не квазиупругих сил. В этом случае колеблющаяся величина меняется во времени не синусоидально, а как-то иначе. Период колебаний T определяется не

только параметрами системы, а и их амплитудой. Вместо формулы (43.7) получается

$$\overline{K}T = \text{const}, \tag{43.9}$$

где $\overline{K}$ — кинетическая энергия системы, усредненная по времени за период колебания (черта как раз и означает такое усреднение), т. е.

$$\overline{K}(t) = \frac{1}{T}\int\limits_{t}^{t+T} K(t')\,dt'. \tag{43.10}$$

В случае гармонических колебаний, как нетрудно доказать, средние за период значения кинетической и потенциальной энергий одинаковы, а потому на каждую из них приходится половина полной энергии, т. е. $\overline{K} = \overline{U} = {}^1\!/_2\,E$. Тогда формула (43.9) переходит в ранее полученную формулу (43.7).

Подставим выражение (43.10) в формулу (43.9) и примем во внимание, что $K = {}^1\!/_2\,mv^2$, $p = mv$, $dq = v\,dt$, где dq — приращение координаты, определяющей положение математической точки. Тогда получится

$$\oint p\,dq = \text{адиабатический инвариант}, \tag{43.11}$$

причем интегрирование ведется по полному периоду движения материальной точки в предположении, что параметры, характеризующие систему, закреплены. Общее доказательство соотношения (43.11) основано на уравнениях механики в форме Гамильтона. Мы его приводить не будем. Ограничимся только двумя примерами.

5. Первый пример. В цилиндре с гладкими стенками движется вверх и вниз идеально упругий шарик, последовательно отражающийся от основания AB и поршня CD по законам абсолютно упругого удара (рис. 106). Допустим сначала, что поля силы тяжести и прочих силовых полей нет. Заставим поршень CD очень медленно перемещаться со скоростью u. Исследуем, как это скажется на движении шарика. Перейдем в движущуюся систему отсчета, в которой поршень покоится. В этой системе скорость шарика будет $v - u$. После отражения шарика она сохранится по модулю, но изменит знак, т. е. будет равна $-v + u$. В неподвижной системе отсчета та же скорость будет равна $(-v + u) + u = -v + 2u$. Приращение кинетической энергии шарика в результате однократного отражения от движущегося поршня будет поэтому равно

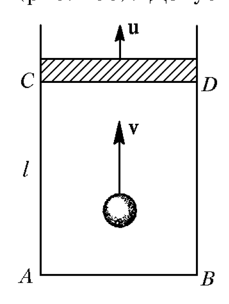


Рис. 106

$$\Delta K = \frac{m}{2}\left[(-v + 2u)^2 - v^2\right] = -2m(uv - u^2).$$

Разделив это соотношение на $K = {}^1\!/_2\,mv^2$ и пренебрегая квадратом малой скорости u, получим

$$\frac{\Delta K}{K} = -4\,\frac{u}{v}. \tag{43.12}$$

Посмотрим теперь, как меняется период колебаний шарика T в результате движения поршня. Под периодом T мы понимаем время движения шарика туда и обратно, вычисленное в предположении, что во время такого движения поршень *закреплен*. Если l — расстояние между поршнем и дном цилиндра во время этого движения, то $T = 2l/v$. Спустя время T расстояние l возрастает на uT, а скорость шарика уменьшается на $2u$. Период колебаний в только что указанном смысле изменится и сделается равным

$$T' = \frac{2(l+uT)}{v-2u} = \frac{2(l+uT)\,(v+2u)}{v^2-4u^2},$$

или, пренебрегая квадратом малой скорости u,

$$T' = T + \frac{2uTv+4lu}{v^2} = T + 4T\,\frac{u}{v}.$$

Таким образом, за время T период получает приращение

$$\Delta T = 4T\,\frac{u}{v} = -T\,\frac{\Delta K}{K}.$$

В пределе, когда поршень движется бесконечно медленно, приращения ΔT и ΔK могут рассматриваться как бесконечно малые дифференциалы, и мы получаем уравнение

$$\frac{dT}{T} + \frac{dK}{K} = 0.$$

Интегрируя его, находим

$$TK = \text{const}, \tag{43.13}$$

т. е. величина TK является адиабатическим инвариантом.

6. Второй пример. Учтем теперь наличие силы тяжести. Пусть v_1 — скорость отразившегося шара в верхнем положении (рис. 107). На расстоянии x его скорость v определится соотношением $v^2 = v_1^2 + 2gx$. Интеграл (43.11) в рассматриваемом случае будет

$$J = 2m \int_0^l \sqrt{v_1^2 + 2gx}\; dx,$$

где l — расстояние между поршнем и дном цилиндра. *Интеграл надо вычислить в предположении, что поршень закреплен, т. е. при постоянном l.* Вычисление дает

$$J = \frac{2m}{3g}\,(v_1^2 + 2gl)^{3/2} - v_1^3 = \frac{2m}{3g}\,(v_2^3 - v_1^3),$$

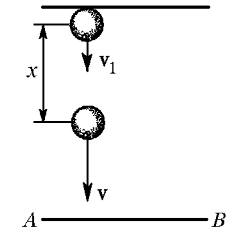


Рис. 107

где v_2 — скорость шара в нижнем положении. Таким образом, надо доказать, что разность $v_2^3 - v_1^3$ является адиабатическим инвариантом. Для этого вычислим значения скоростей v_1 и v_2 спустя период T. Обозначим эти значения через v_1' и v_2' соответственно. Разумеется, вычисление надо по-прежнему провести для неподвижного поршня, но переместившегося в новое положение. За период T поршень переместится вверх на расстояние uT. Шар пройдет это расстояние за время $\Delta T = uT/v_1$ (если пренебречь величинами более высокого порядка малости). При этом под дей-

ствием силы тяжести его скорость уменьшится на $g\ \Delta T = guT/v_1$. Кроме того, при отражении движущегося поршня эта скорость дополнительно уменьшается на $2u$. Поэтому

$$v_1' = v_1 - \left(g\frac{T}{v_1} + 2\right)u = v_1 - 2\,\frac{v_2}{v_1}\,u,$$

так как

$$v_2 = v_1 + g\,\frac{T}{2}.$$

На уровне AB скорость шара будет $v_1'' = v_1 - 2u$, а около дна цилиндра

$$v_2'^2 = v_1''^2 + 2gl = (v_1 - 2u)^2 + 2gl = v_2^2 - 4v_1u,$$

если пренебречь квадратом u. Извлекая квадратный корень и снова пренебрегая u^2, получим

$$v_2' = v_2 - 2\,\frac{v_1}{v_2}\,u.$$

С той же степенью точности

$$v_2'^3 = v_2^3 - 6v_1v_2u, \quad v_1'^3 = v_1^3 - 6v_1v_2u.$$

Значит, $v_2'^3 - v_1'^3 = v_2^3 - v_1^3$ или $J' - J = 0$, причем это соотношение верно с точностью до членов порядка $u^2 = \dot{l}^2$. Разделив его на время T и отождествив частное $(J' - J)/T$ с производной dJ/dt, получим

$$\frac{dJ}{dt} = A\dot{l}^2,$$

где A от $\dot{l}$ не зависит. Имея в виду, что нас интересуют изменения величины J при *конечных изменениях* l, преобразуем это соотношение, введя вместо дифференциала времени дифференциал длины $dl = \dot{l}\,dt$. Тогда получится

$$\frac{dJ}{dl} = A\dot{l},$$

или в пределе при $\dot{l} \to 0$

$$\frac{dJ}{dl} = 0.$$

Следовательно, $J = \text{const}$, как бы велики ни были изменения параметра l, т. е. *величина J является адиабатическим инвариантом.* Такая адиабатическая инвариантность получилась благодаря тому, что производная dJ/dt оказалась пропорциональной *второй,* а не первой степени $\dot{l}$. Если бы dJ/dt была пропорциональна первой степени производной $\dot{l}$, то адиабатической инвариантности J не получилось бы.

ЗАДАЧИ

1. Шарик математического маятника (или шарик, прикрепленный к пружине с заданной жесткостью) медленно испаряется (система с переменной массой). Будет ли величина ET адиабатическим инвариантом и почему?

Ответ. Нет.

2. Шарику массой m, надетому на тонкую стальную спицу, масса которой пренебрежимо мала по сравнению с m, сообщена продольная скорость в направлении к точке закрепления спицы, а также скорость в перпендикулярном направлении. Предполагая, что за период колебания шарика его смещение вдоль спицы мало по сравнению с ее длиной, и пренебрегая трением, определить характер последующего движения шарика.

Решение. Если $v_\perp$ — поперечная скорость шарика, то величина $v_\perp^2 T$ является адиабатическим инвариантом. Период T пропорционален расстоянию l шарика от точки закрепления спицы (см. задачу 20 к § 42). Поэтому адиабатическим инвариантом будет также $A = v_\perp^2 l$. Кроме того, движение шарика подчиняется закону сохранения энергии, который требует, чтобы полная скорость шарика v сохранялась по абсолютной величине. Если $v_\parallel$ — скорость шарика вдоль спицы, то $v^2 \equiv v_\parallel^2 + v_\perp^2 = \text{const}$. Таким образом, величина $A = (v^2 - v_\parallel^2) l$ есть адиабатический инвариант. На расстоянии l_0, при котором $v^2 l_0 = A$, продольная скорость $v_\parallel$ обратится в нуль. Поэтому шарик не может подойти к точке закрепления ближе расстояния l_0. Достигнув положения $l = l_0$, он должен отразиться.

ГЛАВА VII

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

---

§ 44. ТВЕРДОЕ ТЕЛО В МЕХАНИКЕ. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И РАВНОВЕСИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

1. В двух предыдущих главах уже говорилось о законах движения твердого тела и их применениях к некоторым простейшим движениям. В этой главе будет продолжено изучение избранных вопросов механики твердого тела.

Напомним, что *твердым телом* в механике называют неизменяемую систему материальных точек, т. е. такую идеализированную систему, при любых движениях которой взаимные расстояния между материальными точками системы остаются неизменными. Здесь, как и вообще в классической механике, под материальными точками понимают не атомы или молекулы, а достаточно малые макроскопические части, на которые мысленно можно разделить рассматриваемую механическую систему.

С атомистической точки зрения силы взаимодействия между материальными точками твердого тела являются силами *электрическими*. Но атомистический подход чужд феноменологической механике твердого тела. Последняя рассматривает твердое тело как *сплошную среду*, между различными элементами которой действуют внутренние силы в виде *нормальных* и *касательных напряжений*. Причиной их феноменологическая механика считает *деформации тел*. Если в теле совсем нет деформаций, то не может быть и внутренних напряжений. Однако если деформации, возникающие под действием внешних сил, малы и сами по себе нас не интересуют, то в ряде случаев от них можно отвлечься. Таким путем мы приходим к идеализированной модели тела, совершенно не способного деформироваться, хотя под действием внешних сил в нем и могут возникать внутренние натяжения и давления. Это и есть идеально твердое тело. Допустима или нет такая, как и всякая другая, идеализация — это определяется не только свойствами реальных тел, но и содержанием тех вопросов, на которые надо получить ответ.

2. Твердое тело является механической системой с шестью степенями свободы (см. § 8). Для описания его движения требуется шесть независимых числовых уравнений. Вместо них можно взять два независимых векторных уравнения. Таковыми являются уравнение движения центра масс

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внеш}} \qquad (44.1)$$

и уравнение моментов

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_{\text{внеш}}. \qquad (44.2)$$

Уравнение моментов можно брать относительно произвольного неподвижного начала или относительно центра масс твердого тела. Можно также брать произвольно движущееся начало, если только скорость его в любой момент времени параллельна скорости центра масс (см. § 37). При ограничении свободы движения число независимых уравнений, требующихся для описания движения твердого тела, уменьшается. Оно всегда равно числу степеней свободы.

В уравнения (44.1) и (44.2) входят только внешние силы. Внутренние силы не влияют на движение центра масс и не могут изменить момент импульса тела. Они могут изменять только взаимное расположение и скорости материальных точек тела. Но для абсолютно твердого тела такие изменения невозможны. Таким образом, внутренние силы не влияют на движение твердого тела. Если же сила внешняя, то точку приложения ее можно произвольно перемещать вдоль линии, по которой она действует. Действительно, при таком перемещении не меняются результирующая внешних сил $\mathbf{F}_{\text{внеш}}$ и их момент $\mathbf{M}_{\text{внеш}}$, т. е. уравнения движения (44.1) и (44.2) остаются без изменения. Подобное перемещение недопустимо в случае деформированного тела, так как оно приводит к перераспределению деформаций и изменению внутренних движений тела.

3. Если твердое тело покоится, то уравнения (44.1) и (44.2) переходят в

$$\mathbf{F}_{\text{внеш}} = 0, \quad \mathbf{M}_{\text{внеш}} = 0. \qquad (44.3)$$

Это *необходимые условия* равновесия твердого тела. Но они не являются достаточными. При их выполнении центр масс может еще двигаться прямолинейно и равномерно с произвольной скоростью, а само тело может вращаться с сохранением вращательного импульса. Так как при равновесии результирующая внешних сил $\mathbf{F}_{\text{внеш}}$ равна нулю, то момент этих сил $\mathbf{M}_{\text{внеш}}$ в состоянии равновесия не зависит от положения неподвижного начала O, относительно которого он берется [см. формулу (30.7)]. Поэтому при решении любой задачи на равновесие твердого тела начало O можно выбирать произвольно, что можно использовать для упрощения самого решения.

4. Не всегда можно заменять реальные твердые тела идеализированными абсолютно твердыми моделями даже в тех случаях, когда деформации пренебрежимо малы. В качестве примера рассмотрим задачу о равновесии твердой балки. Пусть однородная балка весом P лежит на двух опорах *1* и *2* (рис. 108). Центр масс балки находится посередине между опорами. Найдем силы F_1 и F_2, с которыми балка давит на опоры. Механика твердого тела дает два условия равновесия:

$$F_1 + F_2 = P, \quad F_2 l = P\frac{l}{2}, \qquad (44.4)$$

где l — расстояние между опорами. Второе из них означает, что должен обращаться в нуль момент действующих сил относительно опоры *1*. Из этих условий получаем $F_1 = F_2 = P/2$. Это разумный результат. Деформации балки в рассматриваемой задаче не играют существенной роли. Идеализация абсолютно твердого тела допустима.

Рассмотрим теперь балку на трех опорах (рис. 109). Механика твердого тела по-прежнему дает два условия равновесия:

$$F_1 + F_2 + F_3 = P, \quad F_3 x + F_2 l = Pl/2, \tag{44.5}$$

где l — расстояние между опорами *1* и *2*, а x — между опорами *1* и *3*. (Второе уравнение (44.5) получится, если приравнять нулю момент внешних сил от-

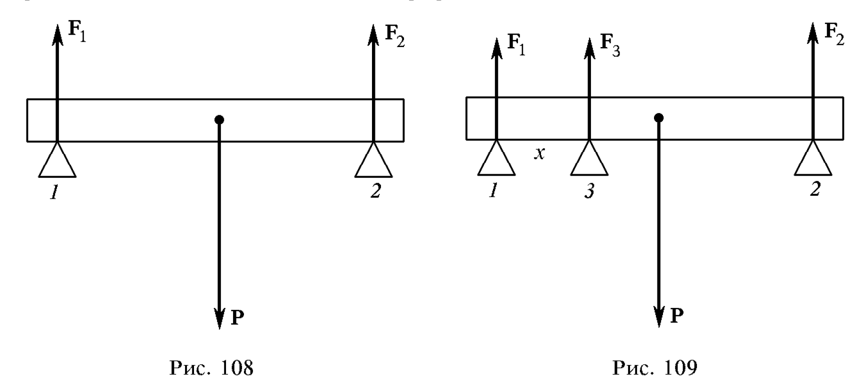


Рис. 108 Рис. 109

носительно опоры *1*.) Двух уравнений недостаточно для определения трех неизвестных сил F_1, F_2, F_3. Одной из этих сил можно придать произвольное значение, тогда из уравнений (44.5) найдутся остальные две. Задача о распределении веса абсолютно твердой балки между тремя опорами, на которых она лежит, оказалась неопределенной. Механические системы, подобные абсолютно твердой балке на трех опорах, называют *статически неопределенными*.

Аналогичная ситуация встречается также в задаче о равновесии стола, стоящего на горизонтальной плоскости. Механика твердого тела дает в этом случае три независимых уравнения равновесия. Если число ножек стола равно трем, то из этих трех уравнений можно однозначно определить три силы, с которыми ножки давят на плоскость опоры. Но если стол стоит на четырех ножках, то трех уравнений мало для определения четырех сил давления ножек на плоскость опоры. Идеально твердый стол с четырьмя ножками, стоящий на идеально твердой горизонтальной плоскости, является также статически неопределенной системой.

Конечно, вес реальной балки, лежащей на трех опорах, вполне определенным образом распределяется между ними. Точно так же вполне определенным образом распределяется сила давления реального стола между четырьмя ножками, на которых он стоит. Неопределенность, к которой мы пришли, указывает просто на то, что в рассматриваемых задачах балку на трех опорах или стол на четырех ножках *нельзя считать идеально твердыми*. Надо учитывать их деформации, а также деформации опор.

5. Следующее простое рассуждение выясняет, почему деформации могут оказаться существенными. Допустим, что идеально твердая балка лежит на

трех опорах (см. рис. 109). Сместим среднюю опору немного вниз. Так как идеально твердая балка не может деформироваться, то между ней и опорой *3* сразу же возникает зазор — балка перестанет опираться на опору *3* и давить на нее. Сила давления на опору *3* скачком обратится в нуль, а вес балки вполне определенным образом и тоже скачком распределится между оставшимися опорами *1* и *2*. То же произойдет, если у твердого стола бесконечно мало укоротить одну из четырех ножек. Не то будет в случае реальной балки или реального стола. При бесконечно малом опускании опоры *3* балка прогнется и по-прежнему будет на нее опираться. Сила давления на опору *3* не обратится в нуль, а уменьшится бесконечно мало. Аналогично когда стол стоит на четырех ножках, то все ножки деформируются, укорачиваясь под действием силы веса. Если подпилить одну из ножек, укоротив ее бесконечно мало, то деформация ножки уменьшится, ножка удлинится и снова будет касаться плоскости опоры. Таким образом, и в этом случае давление на ножку изменяется бесконечно мало, т. е. непрерывно.

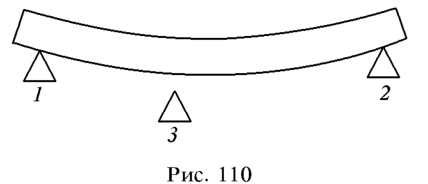


Рис. 110

Допустим теперь, что реальная балка лежит на двух опорах, *1* и *2* (рис. 110). Под действием силы веса балка прогнется. Будем подводить под балку третью опору *3*, непрерывно поднимая ее. Как только опора *3* коснется балки, с балкой не произойдет еще никаких изменений. Но дальнейшее поднятие опоры *3* будет связано с выпрямлением балки, а для этого опора должна действовать на балку с некоторой силой. По мере поднятия опоры *3* эта сила будет непрерывно возрастать, принимая вполне определенное значение при каждом положении опоры *3*. Приведенное рассуждение ясно показывает, почему при решении задачи о распределении веса балки между тремя опорами надо учитывать ее упругие свойства. Эта задача будет решена в гл. X (см. задачу 3 к § 80). Аналогичное рассуждение можно провести и для стола на четырех ножках.

§ 45. МГНОВЕННАЯ ОСЬ ВРАЩЕНИЯ

1. Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси. Чтобы получить представление о распределении скоростей в нем, достаточно рассмотреть движение точек тела, лежащих в какой-либо одной плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Это значит, что тело можно считать как бы плоским. Соответствующее распределение скоростей показано на схематическом рис. 111. Точка O тела, через которую проходит ось вращения, неподвижна. Все другие точки тела движутся по окружностям с центром в O. Их плоскости пропорциональны радиусам соответствующих окружностей. Модули скоростей могут меняться с течением времени, но ось вращения остается одной и той же.

2. Рассмотрим теперь более общее движение плоского твердого тела. Плоскость вращения совпадает с плоскостью самого тела. Никакой неподвижной оси, вокруг которой происходило бы вращение

тела, не предполагается. Если A и B — две произвольные точки твердого тела (рис. 112), то расстояние между ними остается неизменным, а потому $(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)^2 = \text{const}$. Дифференцируя это соотношение по времени, получим $(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)(\dot{\mathbf{r}}_B - \dot{\mathbf{r}}_A) = 0$, или

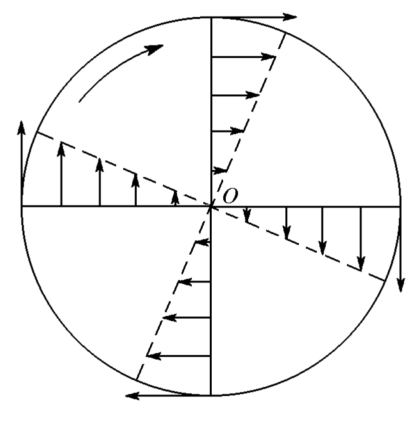


Рис. 111

$$\mathbf{r}_{AB}(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) = 0, \quad (45.1)$$

где $\mathbf{r}_{AB} \equiv \overrightarrow{AB}$. Допустим, что в рассматриваемый момент времени в теле существует точка, скорость которой в этот момент времени равна нулю. (В § 47 будет показано, что такая точка существует для произвольного плоского движения твердого тела.) Примем ее за точку A. Тогда для рассматриваемого момента времени

$$\mathbf{r}_{AB}\mathbf{v}_B = 0,$$

каково бы ни было положение точки B. Отсюда видно, что скорость $\mathbf{v}_B$ перпендикулярна к $\mathbf{r}_{AB}$, т. е. направлена по касательной к окружности с центром в A. При движении твердого тела всякая прямая в теле остается прямой. Это справедливо и для прямой, соединяющей точки A и B. Поскольку в рассматриваемый момент точка A неподвижна, то модуль скорости $\mathbf{v}_B$ в этот момент пропорционален расстоянию AB от точки B до точки A. На основании всего этого можно сказать, что *мгновенное распределение скоростей в теле в рассматриваемый момент времени будет в точности таким же, как и при вращении вокруг неподвижной оси, проходящей через точку A.* Движение тела в этом случае называют *мгновенным вращением.* Прямая, проходящая через точки тела, скорости которых в рассматриваемый момент времени равны нулю, называется *мгновенной осью вращения.* В нашем примере мгновенная ось проходит через точку A. Словом «мгновенная» хотят подчеркнуть, что это понятие служит для описания распределения скоростей только в какой-то заданный *момент времени.* В отличие от неподвижной оси, сохраняющей свое положение в теле и в пространстве, *мгновенная ось, вообще говоря, перемещается как в теле, так и в пространстве.* Если получить моментальную фотографию распределения скоростей в теле, то по виду этой фотографии нельзя сказать, происходит ли вращение вокруг неподвижной или вокруг мгновенной оси. Чтобы отличить эти два вращения, надо

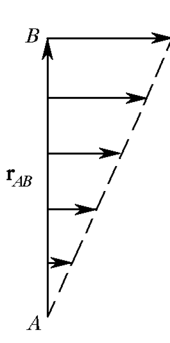


Рис. 112

получить такие фотографии по крайней мере в два различных момента времени.

3. *Мгновенная ось служит для описания мгновенного распределения только скоростей.* Той же осью нельзя пользоваться для описания мгновенного распределения ускорений или высших производных скорости по времени. Распределение ускорений при вращении вокруг мгновенной оси может существенно отличаться от соответствующего распределения ускорений при вращении вокруг неподвижной оси, хотя бы угловые скорости вращения в обоих случаях и совпадали. Дело в том, что для определения ускорений недостаточно знать распределение скоростей только в рассматриваемый момент времени. Надо знать это распределение также в бесконечно близкий момент времени. А в этот момент может оказаться, что движение тела уже перестанет быть вращением вокруг прежней мгновенной оси.

Следующий простой пример хорошо разъясняет суть дела. Рассмотрим качение обруча или диска по плоскости без скольжения (рис. 113). Отсутствие скольжения означает, что точка обруча A, в которой он касается плоскости, в рассматриваемый момент неподвижна. Следовательно, движение обруча можно рассматривать как мгновенное вращение его вокруг мгновенной оси, проходящей через точку касания A. Распределения скоростей при таком движении показано на рис. 113. С течением времени в соприкосновении с плоскостью будут приходить другие точки обруча. При этом точка касания будет перемещаться по плоскости в ту же сторону, куда движется обруч. Это означает, что мгновенная ось перемещается как относительно катящегося обруча, так и относительно плоскости, по которой происходит качение. В этом и состоит смысл утверждения, что мгновенная ось перемещается как в теле, так и в пространстве. Допустим теперь, что качение происходит с постоянной скоростью. Было бы грубой ошибкой вычислять ускорение по формуле $\mathbf{a} = -\omega^2\mathbf{R}$, понимая под $\mathbf{R}$ радиус-вектор, проведенный от мгновенной оси к рассматриваемой точке обруча. Действительно, полная скорость $\mathbf{v}$ любой точки обруча векторно складывается из скорости $\mathbf{v}_C$ поступательного движения центра обруча C и скорости $\mathbf{v}_{\text{вр}}$ вращения ее относительно того же центра: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{\text{вр}}$. Если обруч катится равномерно, то $\frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = 0$, и ускорение

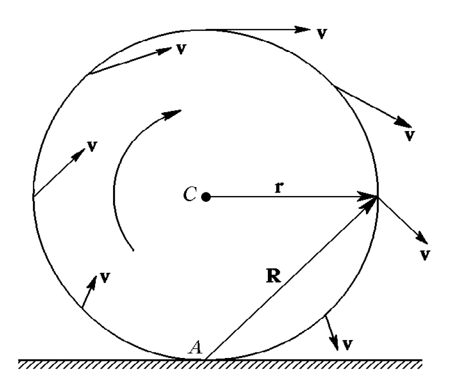


Рис. 113

будет равно $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}_{\text{вр}}}{dt}$. Поступательное движение не влияет на ускорение $\mathbf{a}$. Оно такое же, как и при вращении вокруг неподвижного центра, т. е. $\mathbf{a} = -\omega^2\mathbf{r}$, где радиус-вектор $\mathbf{r}$ проведен из центра обруча O. Таким образом, при равномерном качении ускорение $\mathbf{a}$ направлено к центру обруча, а не к мгновенной оси.

§ 46. УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ КАК ВЕКТОР. СЛОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ

1. Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной или мгновенной оси OA с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ (рис. 114). Возьмем какую-либо произвольную точку этого тела M, отстоящую от оси вращения на расстояние $\mathbf{r}_\perp$. Линейная и угловая скорости точки M связаны соотношением

$$v = \omega r_\perp. \tag{46.1}$$

Введем аксиальный вектор $\boldsymbol{\omega}$, определяемый векторным произведением

$$\boldsymbol{\omega} = [\mathbf{r}_\perp \mathbf{v}]/\mathbf{r}_\perp^2, \tag{46.2}$$

где $\mathbf{r}_\perp$ — радиус-вектор, проведенный от оси вращения к точке M перпендикулярно к этой оси. Длина вектора $\boldsymbol{\omega}$ в силу соотношения (46.1) численно равна угловой скорости вращения, а направление совпадает с направлением оси вращения. Взаимное расположение векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{r}_\perp$ и $\mathbf{v}$ мы уясним лучше, если отложим их из общего начала (рис. 115). Эти три вектора взаимно перпендикулярны. Из рисунка видно, что

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_\perp]. \tag{46.3}$$

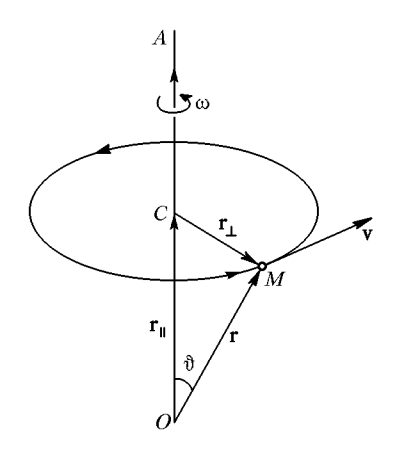


Рис. 114

Эта формула является обобщением формулы (46.1), поскольку она определяет не только модуль скорости $\mathbf{v}$, но и ее направление. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ называется *вектором угловой скорости*, или просто *угловой скоростью вращения*. Таким образом, *угловую скорость можно рассматривать как вектор*. Если расположить буравчик с правой нарезкой параллельно оси вращения и вращать его в ту же сторону, в какую вращается само тело, то направление ввинчивания буравчика укажет направление вектора $\boldsymbol{\omega}$.

Формуле (46.3) можно придать более общий и удобный вид. Возьмем на оси вращения произвольную точку O в качестве начала координат (см. рис. 114). Тогда радиус-вектор $\mathbf{r}$, проведенный из этого начала к точке M, можно представить в виде векторной суммы $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}_\parallel$, где $\mathbf{r}_\parallel$ — слагающая вектора $\mathbf{r}$ вдоль оси вращения. Так как $[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_\parallel] = 0$, то вместо формулы (46.3) можно написать более общую формулу

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]. \tag{46.4}$$

Из нее получаем $v = \omega r \sin \vartheta$, что совпадает с формулой (46.1), так как $\mathbf{r} \sin \vartheta = \mathbf{r}_\perp$.

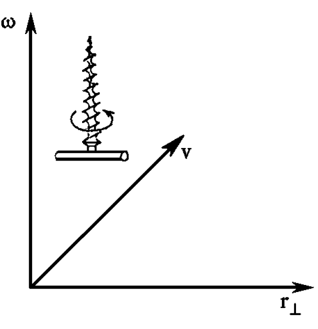


Рис. 115

2. *То что угловая скорость* $\boldsymbol{\omega}$ *есть вектор, не требует специального доказательства, поскольку она определена как векторное произведение двух векторов. Векторный характер* $\boldsymbol{\omega}$ *означает*, разумеется, *только то, что при повороте координатных систем проекции* $\boldsymbol{\omega}$ *на их оси преобразуются так же, как разности координат концов направленного геометрического отрезка.* Над векторами угловых скоростей можно выполнять все математические операции, как над всякими векторами. В частности, можно ввести математическое сложение векторов $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ по правилу параллелограмма. Но как будут складываться угловые скорости, если сложение определить с помощью той или иной *физической* операции, — это требует особого исследования. Введем понятие *сложения вращений*, вложив в него следующий смысл. Пусть тело вращается вокруг некоторой оси OA с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$ (рис. 116). Пусть сама ось OA, в свою очередь, вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$, вокруг другой оси OB. Подчеркнем, что в общем случае *речь идет о мгновенных вращениях и притом с нерелятивистскими скоростями.* Первое вращение рассматривается в системе отсчета, в которой (в рассматриваемый момент) ось OA неподвижна. Второе вращение рассматривается в другой системе отсчета — в той, в которой (в тот же момент) неподвижна ось OB. Сложить вращательные движения — значит ответить на вопрос, к какому движению приводит наложение этих двух вращений? При рассмотрении этого вопроса ограничимся случаем, когда оси OA и OB пересекаются между собой.

Вопрос сводится к сложению линейных скоростей в аналогичном физическом смысле (см. § 7; в нерелятивистской механике, как известно, сложение линейных скоростей производится по правилу параллелограмма). Произвольная точка твердого тела M с радиусом-

вектором $\mathbf{r}$ в результате первого вращения (вокруг оси OA) получает линейную скорость $\mathbf{v}_1 = [\boldsymbol{\omega}_1 \mathbf{r}]$, а в результате второго вращения (вокруг оси OB) — линейную скорость $\mathbf{v}_2 = [\boldsymbol{\omega}_2 \mathbf{r}]$. Результирующая линейная скорость будет равна

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = [(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2)\mathbf{r}].$$

Если ввести векторную сумму в математическом смысле

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2, \tag{46.5}$$

то результат запишется в виде

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]. \tag{46.6}$$

Пусть точка M лежит на оси вектора $\boldsymbol{\omega}$, т. е. на диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, или ее продолжении. Тогда $\mathbf{v} = 0$. Все точки указанной оси в рассматриваемый момент времени находятся в покое. Это объясняется тем, что все эти точки в результате первого вращения движутся в одну, в результате второго вращения — в противоположную сторону. Результирующая линейная скорость получается равной нулю. Все прочие точки тела вращаются вокруг оси вектора $\boldsymbol{\omega}$ с угловой скоростью ω. Мгновенную линейную скорость любой точки тела можно вычислить по формуле (46.6). Это значит, что *мгновенное результирующее движение твердого тела есть вращение вокруг мгновенной оси OC.* Эта ось, вообще говоря, непрерывно перемещается как относительно самого твердого тела, так и относительно неподвижной системы отсчета, в которой рассматривается движение.

Итак, мы доказали, что *два вращения с угловыми скоростями $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ складываются* (в рассматриваемом физическом смысле) *в одно вращение вокруг мгновенной оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$. Мгновенная ось в каждый момент времени направлена вдоль диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$. Сложение подчиняется правилу параллелограмма.* Физическое сложение в указанном смысле оказалось тождественным с математическим.

3. Поясним изложенное наглядным примером. Пусть по поверхности неподвижного конуса *2* катится без скольжения другой круговой конус *1* (рисунки 117 и 118). Вершины обоих конусов все время находятся в одной и той же точке O. В рассматриваемом движении конус *1* вращается вокруг собственной оси OA с некоторой угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$. Сама ось OA описывает коническую поверхность, вращаясь вокруг другой оси OB с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$. Речь идет о сложении этих двух вращений. Так как скольжения нет, то все точки тела, лежащие на прямой OC, по которой конусы

касаются друг друга, неподвижны. Касательная OC является поэтому мгновенной осью вращения конуса *1*. Мгновенная ось вращения перемещается в теле, т. е. в конусе *1*, двигаясь по его поверхности. Но она перемещается также и в пространстве, т. е. по поверхности конуса *2*.

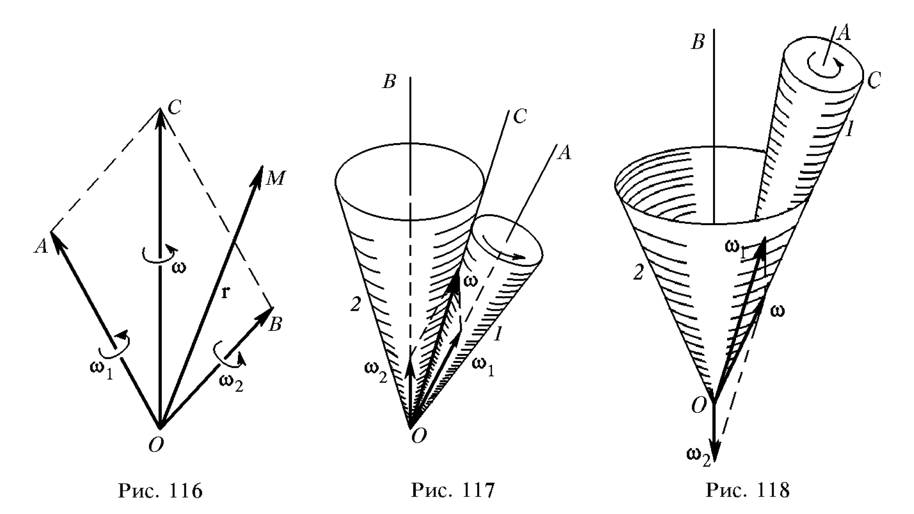


Рис. 116 Рис. 117 Рис. 118

4. Вращение вокруг параллельных осей можно рассматривать как предельный случай вращений вокруг пересекающихся осей. При сложении таких вращений надо различать два случая: 1) вращения совершаются в одном направлении; 2) вращения совершаются в противоположных направлениях. Рассмотрим первый случай. Построив параллелограмм на векторах $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, пересечем его произвольной прямой ACB, перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{\omega}$ (рис. 119 *а*). Тогда $h_1 = OC \cdot \operatorname{tg} \alpha_1$, $h_2 = OC \cdot \operatorname{tg} \alpha_2$. Если углы α_1 и α_2 малы, то их тангенсы можно заменить синусами. Сделав это, получим

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \tag{46.7}$$

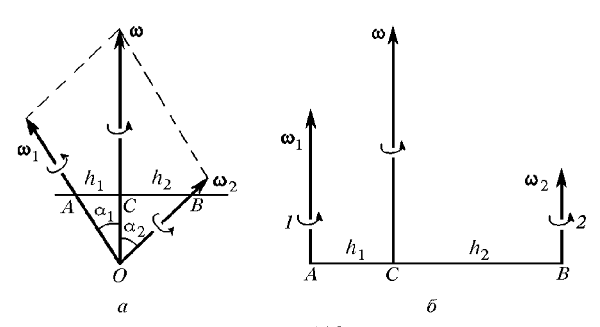


Рис. 119

Устремив точку O в бесконечность, получим предельный случай одинаково направленных вращений вокруг параллельных осей (рис. 119 *б*). Такие два вращения складываются в одно вращение вокруг мгновенной оси с угловой скоростью $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Мгновенная ось проходит между осями *1* и *2* и делит расстояние между ними обратно пропорционально угловым скоростям ω_1 и ω_2.

Аналогично рассматривается случай, когда векторы $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ направлены противоположно. Если $\omega_1 > \omega_2$, то $\omega = \omega_1 - \omega_2$. Мгновенная ось проходит вне отрезка AB со стороны большей угловой ско-

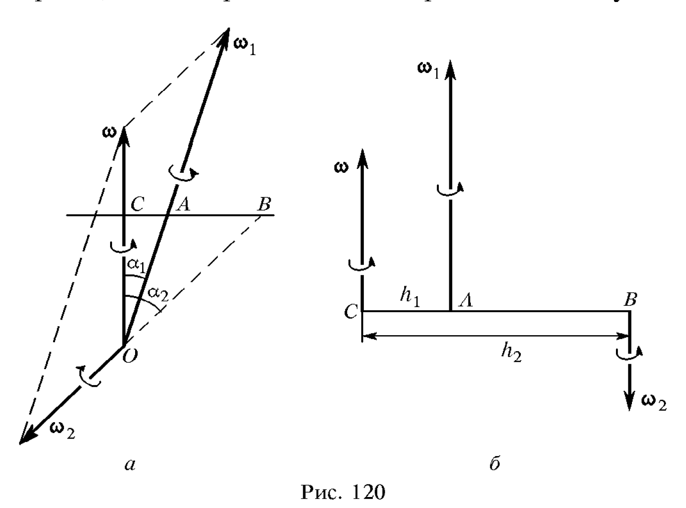


Рис. 120

рости (рис. 120). Она делит отрезок AB *внешним образом* на части h_1 и h_2, обратно пропорциональные угловым скоростям ω_1 и ω_2.

5. Рассмотрим, наконец, сложение поступательного и вращательного движений. Если поступательное движение совершается параллельно оси вращения, то при сложении, очевидно, получится *винтовое движение.* Достаточно поэтому ограничиться случаем, когда поступательное движение перпендикулярно к оси вращения. В этом случае все точки тела будут двигаться, параллельно одной и той же плоскости, перпендикулярной к той же оси. Такое движение называется *плоским.* Плоскость, параллельно которой происходит движение, можно принять за плоскость рисунка. Поступательное движение можно рассматривать как вращение вокруг бесконечно удаленной оси. Поэтому разбираемый случай можно свести к сложению двух вращений вокруг параллельных осей, удаляя одну из осей в бесконечность. Ясно, что в результате возникает вращение вокруг какой-то мгновенной оси. Задача сводится к определению положения мгновенной оси и угловой скорости мгновенного вращения. Пусть тело вращается

вокруг оси O с угловой скоростью ω, а сама ось O вращается вокруг параллельной неподвижной оси O_1 с угловой скоростью ω_1 (рис. 121). При сложении возникнет вращение вокруг мгновенной оси A, причем

$$\frac{h}{h_1} = \frac{\omega_1}{\omega}.$$

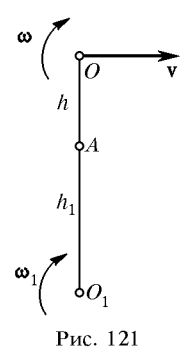


Рис. 121

Вследствие вращения вокруг оси O_1 ось O получает скорость $v = \omega_1(h + h_1)$, перпендикулярную к линии O_1O. Будем удалять O_1 в бесконечность, одновременно уменьшая ω_1 так, чтобы скорость v оставалась неизменной. В пределе вращение оси O вокруг оси O_1 перейдет в поступательное движение со скоростью v. Положение мгновенной оси вращения A определится ее расстоянием до оси O. Это расстояние равно

$$h = \frac{h_1\omega_1}{\omega} = \frac{(h_1+h)\omega_1 - h\omega_1}{\omega} = \frac{v - h\omega_1}{\omega}.$$

Отсюда

$$h\left(1 + \frac{\omega_1}{\omega}\right) = \frac{v}{\omega}.$$

Так как $\omega_1 \to 0$, то в пределе

$$h = \frac{v}{\omega}. \tag{46.8}$$

При этом угловая скорость мгновенного вращения в пределе станет равной ω.

6. Если аксиальный вектор $\boldsymbol{\omega}$ продифференцировать по скалярному аргументу, например по времени t, то в результате получится новый аксиальный вектор $\boldsymbol{\eta} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$, называемый *угловым ускорением* (см. § 7). Его проекции на координатные оси по определению даются выражениями $\eta_x = \frac{d\omega_x}{dt}$, $\eta_y = \frac{d\omega_y}{dt}$, $\eta_z = \frac{d\omega_z}{dt}$. Аналогично в результате интегрирования $\boldsymbol{\omega}$ по t получается другой аксиальный вектор $\boldsymbol{\varphi} = \int \boldsymbol{\omega}\, dt$ с составляющими $\varphi_x = \int \omega_x\, dt$, $\varphi_y = \int \omega_y\, dt$, $\varphi_z = \int \omega_z\, dt$. Векторный (точнее, псевдовекторный) характер этих величин, как всегда, означает только то, что при повороте (но не инверсии) координатных систем их составляющие преобразуются так же, как разности координат концов направленного геометрического отрезка. Если направление оси вращения не меняется с течением времени, то вектор $\boldsymbol{\varphi}$ направлен параллельно $\boldsymbol{\omega}$, т. е. по оси вращения. Его

длина численно равна углу поворота тела за рассматриваемый промежуток времени. Поэтому $\boldsymbol{\varphi}$ естественно назвать *угловым поворотом тела.* Угловой поворот пропорционален площади сектора OAB, описываемого каким-либо отрезком OA, перпендикулярным к оси вращения, при его переходе из начального положения OA в конечное положение OB (рис. 122). Направление $\boldsymbol{\varphi}$ совпадает с направлением перпендикуляра к плоскости сектора OAB, а его составляющие φ_x, φ_y, φ_z пропорциональны площадям проекций этого сектора на координатные плоскости. Это лишний раз подтверждает векторный характер величины $\boldsymbol{\varphi}$ (см. § 7).

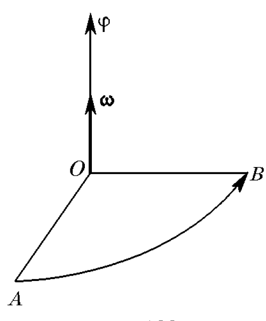


Рис. 122

7. На примере угловых поворотов можно наглядно показать необходимость строгого разграничения между *математическим сложением* векторов (аксиоматически определяемым с помощью правила параллелограмма) и *физическим сложением* их, вводимым с помощью какой-либо физической операции. Введем физическое сложение угловых перемещений в том же смысле, в каком понимается физическое сложение линейных перемещений (см. § 7, п. 6). Пусть материальная точка последовательно совершает вращения вокруг различных осей, проходящих через неподвижную точку O (рис. 123). При таких вращениях она движется вдоль дуг больших кругов по поверхности сферы с центром O. Пусть точка перешла из начального положения A в конечное положение B вдоль дуги большого круга AB. Радиус-вектор точки при этом повернулся на угол φ_1. Затем точка совершила поворот на угол φ_2, перейдя по дуге большого круга BC из положения B в положение C. Каким одним поворотом можно заменить эти два поворота, чтобы перевести точку из того же начального положения A в то же конечное положение C? Ясно, что таким поворотом будет вращение точки по дуге большого круга, проходящей через точки A и C. Обозначим соответствующий угол поворота φ_3. В соответствии со сказанным выше рассматриваемые три поворота можно изобразить векторами $\boldsymbol{\varphi}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_2$, $\boldsymbol{\varphi}_3$, перпендикулярными соответственно к плоскостям секторов OAB, OBC и OAC. Поворот $\boldsymbol{\varphi}_3$ можно назвать суммой поворотов $\boldsymbol{\varphi}_1$ и $\boldsymbol{\varphi}_2$ в рассматриваемом физическом смысле. Ясно, что такое сложение не подчиняется правилу параллелограмма. Это

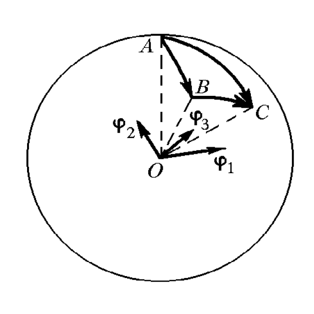


Рис. 123

видно уже из того, что в общем случае вектор $\boldsymbol{\varphi}_3$ не лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{\varphi}_1$ и $\boldsymbol{\varphi}_2$.

Особенно очевидным станет это утверждение, если рассмотреть частный случай. За начальное положение материальной точки возьмем полюс A (рис. 124). Затем по дуге меридиана AB совершим первый поворот на угол $\varphi_1 = 90°$, переведя точку в положение B на экваторе. Второй поворот на угол $\varphi_2 = 90°$ совершим по дуге экватора BC. Очевидно, третий поворот φ_3 надо произвести по дуге меридиана AC также на 90°. В рассматриваемом случае все три вектора $\boldsymbol{\varphi}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_2$, $\boldsymbol{\varphi}_3$, взаимно перпендикулярны и имеют одну и ту же длину. Ни один из них не может быть геометрической суммой двух других.

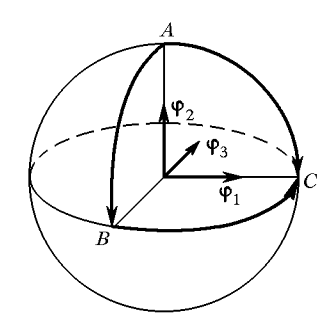


Рис. 124

Если φ_x, φ_y, φ_z означают проекции вектора $\boldsymbol{\varphi}$ на координатные оси, то $\boldsymbol{\varphi} = \varphi_x\mathbf{i} + \varphi_y\mathbf{j} + \varphi_z\mathbf{k}$. Здесь сложение понимается в математическом смысле (по правилу параллелограмма). Однако, как следует из изложенного, слагаемые $\varphi_x\mathbf{i}$, $\varphi_y\mathbf{j}$, $\varphi_z\mathbf{k}$ нельзя рассматривать как последовательно выполняемые повороты вокруг координатных осей, приводящие к единому повороту, представляемому вектором $\boldsymbol{\varphi}$.

8. Допустим, однако, что углы φ_1, φ_2, φ_3 неограниченно стремятся к нулю. Тогда сферический треугольник ABC (см. рис. 123) становится бесконечно малым и может считаться плоским (рис. 125). Дуги больших кругов AB, BC и AC могут рассматриваться как прямолинейные отрезки. Векторы угловых перемещений $\delta\boldsymbol{\varphi}_1$, $\delta\boldsymbol{\varphi}_2$, $\delta\boldsymbol{\varphi}_3$ будут лежать в плоскости треугольника ABC. (Мы пишем $\delta\boldsymbol{\varphi}$ вместо $\boldsymbol{\varphi}$, чтобы подчеркнуть, что речь идет о бесконечно малых углах.) Они, очевидно, перпендикулярны к сторонам AB, BC и AC соответственно, а их длины пропорциональны этим сторонам (рис. 125). Отсюда следует, что бесконечно малый вектор $\delta\boldsymbol{\varphi}_3$ является геометрической суммой векторов $\delta\boldsymbol{\varphi}_1$ и $\delta\boldsymbol{\varphi}_2$. Это значит, что *бесконечно малые угловые перемещения складываются геометрически* (в указанном выше физическом смысле), *т. е. по прави-*

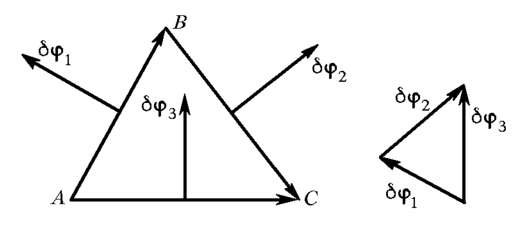


Рис. 125

лу параллелограмма. Иными словами, такое *физическое сложение угловых перемещений в пределе бесконечно малых углов поворота переходит в математическое.*

ЗАДАЧИ

1. Показать, что элементарная работа, совершаемая над системой материальных точек при ее повороте на бесконечно малый угол $\delta\boldsymbol{\varphi}$, выражается скалярным произведением

$$\delta A = (\mathbf{M}\,\delta\boldsymbol{\varphi}),$$

где $\mathbf{M}$ — геометрическая сумма моментов сил, действующих на материальные точки системы, относительно вершины угла поворота.

Решение. $\delta A = \sum (\mathbf{F}_i\,\delta\mathbf{r}_i)$. Здесь суммирование ведется по всем точкам системы. При повороте $\delta\mathbf{r}_i = [\delta\boldsymbol{\varphi}\,\mathbf{r}_i]$, причем угол $\delta\boldsymbol{\varphi}$ один и тот же для всей системы. Подставив это выражение в предыдущую формулу и заметив, что $\mathbf{F}_i[\delta\boldsymbol{\varphi}\mathbf{r}_i] = \delta\boldsymbol{\varphi}[\mathbf{r}_i\mathbf{F}_i] = (\mathbf{M}_i\,\delta\boldsymbol{\varphi})$, получим требуемый результат.

2. Используя изотропию пространства, доказать, что геометрическая сумма моментов внутренних сил, действующих в системе материальных точек, равна нулю (см. § 38).

Решение. Допустим, что система замкнута. Пусть $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, ... — моменты внутренних сил, действующие на материальные точки системы, относительно произвольного неподвижного начала O. Повернем всю систему вокруг точки O на произвольный бесконечно малый угол $\delta\boldsymbol{\varphi}$ и притом так, чтобы скорости всех материальных точек повернулись на тот же угол без изменения своего модуля. Ввиду изотропии пространства на такой поворот не требуется затраты работы. Но эта работа представляется скалярным произведением $(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \ldots)\,\delta\boldsymbol{\varphi}$. Значит, это скалярное произведение равно нулю, каков бы ни был поворот $\delta\boldsymbol{\varphi}$. Отсюда следует, что для замкнутой системы $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \ldots = 0$.

3. Пусть вектор $\mathbf{A}$ неизменной длины вращается вокруг своего начала с угловой скорость $\boldsymbol{\omega}$. Показать, что его производная по времени определяется формулой

$$\dot{\mathbf{A}} = [\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{A}]. \qquad (46.10)$$

В частности, при вращении координатной системы орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ дифференцируются по формулам

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{i}], \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{j}], \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{k}]. \qquad (46.11)$$

Решение. Вектор $\mathbf{A}$ неизменной длины можно отождествить с абсолютно твердым тонким стержнем той же длины. Если начало вектора $\mathbf{A}$ неподвижно, то производная $\dot{\mathbf{A}}$ имеет смысл скорости движущегося конца стержня. При такой интерпретации формула (46.10) становится частным случаем формулы (46.4).

4. Движение точки на плоскости можно задать полярными координатами r и φ (рис. 126). Найти выражения для скорости и ускорения точки в этой системе координат.

Решение. Введем единичные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Вектор $\mathbf{i}$ направим вдоль радиуса r. Вектор $\mathbf{j}$ перпендикулярен к нему и направлен в сторону возрастания угла φ. Вектор $\mathbf{k}$ (не изображенный на рисунке) перпендикулярен к плоскости рисунка и образует с векторами $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ правовинтовую систему. При движении точки векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ вращаются вокруг начала координат с угловой скоростью $\omega = \dot{\varphi}$. Вектор угловой скорости направлен вдоль $\mathbf{k}$, так что $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{k}$. Применяя формулы (46.11), находим производные векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \dot{\varphi}[\mathbf{k}\mathbf{i}] = \dot{\varphi}\mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \dot{\varphi}[\mathbf{k}\mathbf{j}] = -\dot{\varphi}\mathbf{i}. \qquad (46.12)$$

Рис. 126

Представим радиус-вектор движущейся точки в виде $\mathbf{r} = r\mathbf{i}$. Дифференцируя его один раз, находим скорость:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{i} + r\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \dot{r}\mathbf{i} + r\dot{\varphi}\mathbf{j}.$$

Дифференцируя вторично, находим ускорение:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{r}\mathbf{i} + r\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}\mathbf{j} + r\ddot{\varphi}\mathbf{j} + r\dot{\varphi}\frac{d\mathbf{j}}{dt} = (\ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r)\mathbf{i} + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\mathbf{j}.$$

Эти формулы дают разложение скорости и ускорения на радиальные (направленные вдоль радиуса) и азимутальные (направленные по $\mathbf{j}$, т. е. в сторону возрастания угла φ) составляющие:

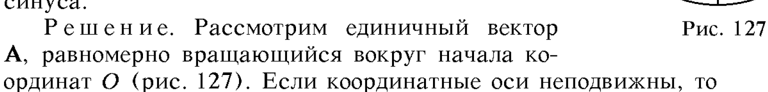
$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \qquad (46.13)$$

$$a_r = \ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r, \quad a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}. \qquad (46.14)$$

5. С помощью соотношения (46.10) получить формулы для дифференцирования синуса и косинуса.

Рис. 127

Решение. Рассмотрим единичный вектор $\mathbf{A}$, равномерно вращающийся вокруг начала координат O (рис. 127). Если координатные оси неподвижны, то



$$\mathbf{A} = \mathbf{i}\cos\omega t + \mathbf{j}\sin\omega t.$$

Производная этого вектора по t равны

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{i}\frac{d}{dt}(\cos\omega t) + \mathbf{j}\frac{d}{dt}(\sin\omega t).$$

С другой стороны, ту же производную можно вычислить по формуле (46.10). Так как $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$, то эта формула дает

$$\dot{\mathbf{A}} = \omega\,[\mathbf{k}\mathbf{A}] = \omega\cos\omega t\,[\mathbf{k}\mathbf{i}] + \omega\sin\omega t\,[\mathbf{k}\mathbf{j}] = \mathbf{j}\,\omega\cos\omega t - \mathbf{i}\,\omega\sin\omega t.$$

Сравнивая оба результата, получим

$$\frac{d}{dt}(\sin\omega t) = \omega\cos\omega t, \quad \frac{d}{dt}(\cos\omega t) = -\omega\sin\omega t.$$

Можно сказать, что векторная формула (46.10) эквивалентна правилам дифференцирования синуса и косинуса.

§ 47. ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА. ОБЩЕЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

1. Рассмотрим *плоское движение* твердого тела, т. е. такое движение, когда все точки тела движутся параллельно одной плоскости. Не теряя общности, можно считать само тело плоским, а движение — происходящим в плоскости тела. Положение плоского тела однозначно определяется заданием положений каких-либо двух точек его. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением движения какой-либо одной прямой плоского тела. Пусть выбранная прямая твердого тела перешла из положения AB в положение A_1B_1 (рис. 128). Соединим точку A с точкой A_1, а точку B с точкой B_1. Из середин отрезков AA_1 и BB_1 восстановим перпендикуляры EO и DO, пересекающиеся в точке O. Докажем, что прямую AB можно перевести в положение A_1B_1 путем одного поворота вокруг точки O. Действительно, из построения следует, что точка O равноудалена от точек A и A_1, а также от точек B и B_1. В силу этого прямую AB можно повернуть вокруг точки O так, чтобы точка A совместилась с точкой A_1. Докажем, что при этом точка B также совместится с точкой B_1. Для доказательства допустим, что точка B не совместилась с точкой B_1, а заняла положение B_2. Разумеется, точка B_2 будет находиться на таком же расстоянии от O, что и точка B, а потому $OB_1 = OB_2$. Кроме того, в треугольниках OA_1B_1 и OA_1B_2 сторона OA_1 — общая, а стороны A_1B_1 и A_1B_2 равны, так как тело твердое, а потому расстояние между концами отрезка AB не меняется при его движении. Следовательно, треугольники OA_1B_1 и OA_1B_2 равны. Отсюда делаем вывод, что $\angle OA_1B_1 = \angle OA_1B_2$, так что точка B_2 должна совпадать с точкой B_1.

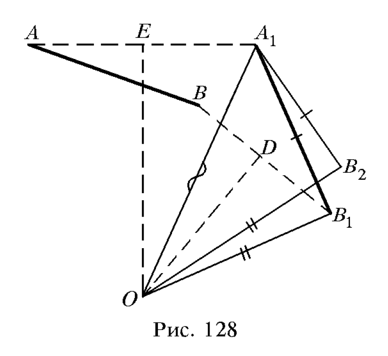


Рис. 128

Таким образом, *при плоском движении твердое тело может быть переведено из любого положения в другое произвольное положение с помощью одного поворота вокруг некоторой оси.* Это положение является частным случаем *теоремы Эйлера* (по имени Леонарда Эйлера (1707—1783)), доказываемой ниже.

Произвольное плоское движение тела можно разбить на ряд следующих друг за другом бесконечно малых перемещений. В результате получится ряд бесконечно близких положений *1*, *2*, *3*, *4*, ..., последовательно проходимых телом. Согласно доказанной теореме

переход тела из положения *1* в положение *2* может быть осуществлен поворотом вокруг некоторой оси O_1; переход из положения *2* в положение *3* — поворотом вокруг другой бесконечно близкой оси O_2 и т. д. Если число промежуточных положений *1*, *2*, *3*, ... стремить к бесконечности, а смещение тела из каждого положения в соседнее — к нулю, то *произвольное плоское движение твердого тела может рассматриваться как вращение вокруг мгновенной оси, движущейся как в теле, так и в пространстве.*

2. Совершенно аналогично формируется *теорема Эйлера.* Согласно теореме Эйлера *твердое тело, имеющее одну неподвижную точку, может быть переведено из произвольного положения в другое произвольное положение путем поворота вокруг некоторой оси, проходящей через эту неподвижную точку.* Доказательство теоремы Эйлера проводится совершенно так же, как и соответствующей теоремы для плоского движения. Если одна из точек твердого тела C неподвижна, то его положение однозначно определяется заданием положений каких-либо двух точек A и B, не лежащих на одной прямой с точкой C. В качестве точек A и B можно взять две точки на поверхности сферы с центром в точке C. Проведем через центр сферы C и точки A и B плоскость. Она пересечет сферу по дуге большого круга AB (см. рис. 128; мы не рисуем отдельно соответствующую сферу и дуги больших кругов, а пользуемся прежним плоским рисунком, мысленно заменяя, где это нужно, прямолинейные отрезки дугами больших кругов; понятно, что центр сферы C на плоском рисунке изобразить нельзя.) Движение дуги AB по поверхности сферы однозначно определяет и движение всего твердого тела. Пусть выбранная дуга перешла из положения AB в положение A_1B_1. Соединим дугами больших кругов точку A с точкой A_1, а точку B с точкой B_1. Через середины этих дуг E и D проведем перпендикулярные к ним дуги больших кругов EO и DO, пересекающиеся в точке O сферы. Точку O соединим с центром сферы C прямой OC. Докажем, что дуга AB может быть переведена в положение A_1B_1 путем поворота вокруг оси CO. Действительно, по построению точки A и A_1, а также точки B и B_1 равноудалены от точки O. Ввиду этого твердое тело можно повернуть вокруг оси CO так, чтобы точка A перешла в положение A_1. Докажем, что при таком повороте точка B также перейдет в положение B_1. Для доказательства допустим, что точка B при повороте перешла не в положение B_1, а в положение B_2. Проведем дуги больших кругов OA_1, A_1B_2 и OB_2. Так как точка B_2 находится на том же расстоянии от O, что и точка B, то $\smile OB_1 = \smile OB_2$. Кроме того, в сферических треугольниках OA_1B_1 и OA_1B_2 дуга OA_1 общая, а дуги

A_1B_1 и A_1B_2 равны, так как тело твердое, и, следовательно, при его движении длина дуги AB не изменяется. Поэтому сферические треугольники OA_1B_1 и OA_1B_2 равны. Значит, $\angle OA_1B_1 = \angle OA_1B_2$, а потому точка B_2 должна совпадать с точкой B_1. Тем самым теорема Эйлера доказана.

Доказанная в начале этого параграфа теорема является частным случаем теоремы Эйлера, так как плоское движение плоского тела может рассматриваться как предельный случай движения по сферической поверхности бесконечно большого радиуса.

Рассуждая так же, как и в случае плоского движения, из теоремы Эйлера можно вывести следующее следствие. *Любое движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, можно рассматривать как вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через эту неподвижную точку. С течением времени мгновенная ось, вообще говоря, непрерывно перемещается как в теле, так и в пространстве.*

3. Рассмотрим теперь самый общий случай движения твердого тела. Выберем в теле произвольную точку O. Всякое движение тела можно разложить на поступательное со скоростью $\mathbf{v}_0$, равной скорости точки O, и вращательное вокруг мгновенной оси, проходящей через эту точку. Обозначая через $\boldsymbol{\omega}$ вектор угловой скорости мгновенного вращения, можем написать для скорости другой произвольной точки A твердого тела

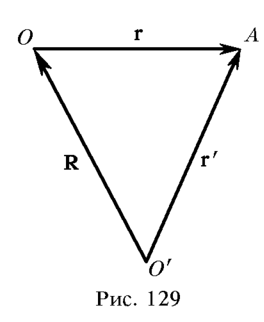


Рис. 129

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}], \qquad (47.1)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из точки O в точку A (рис. 129). Скорость поступательного движения $\mathbf{v}_O$, конечно, зависит от выбора точки O. Но *угловая скорость* $\boldsymbol{\omega}$ *не зависит от положения точки* O, *к которой отнесено вращение твердого тела.* Поэтому *можно говорить об угловой скорости вращения твердого тела, не указывая эту точку.* Докажем это.

Выберем другую произвольную точку тела O' и отнесем к ней вращение твердого тела. Соответствующую угловую скорость вращения обозначим через $\boldsymbol{\omega}$. Тогда скорость $\mathbf{v}$ прежней точки A можно представить в другом виде:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + [\boldsymbol{\omega}' r'],$$

где $\mathbf{r}'$ — радиус-вектор, проведенный из O' в A. Так как речь идет о скорости одной и той же точки, то эта величина должна совпадать с (47.1). Это дает

$$\mathbf{v}_O + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}] = \mathbf{v}_{O'} + [\boldsymbol{\omega}'\mathbf{r}'].$$

Подставим сюда $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ означает вектор $\overrightarrow{O'O}$. Кроме того, примем во внимание, что скорость точки O можно получить векторным сложением скорости точки O' и скорости вращения вокруг нее с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}'$, т. е.

$$\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_{O'} + [\boldsymbol{\omega}'\mathbf{R}].$$

С учетом этого получим

$$\mathbf{v}_{O'} + [\boldsymbol{\omega}'\mathbf{R}] + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}] = \mathbf{v}_{O'} + [\boldsymbol{\omega}'(\mathbf{r} + \mathbf{R})],$$

или

$$[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}] = [\boldsymbol{\omega}'\mathbf{r}].$$

В силу произвольности $\mathbf{r}$ отсюда следует $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}$.

4. Допустим, что твердое тело вращается вокруг неподвижной точки. Примем эту точку за начало координат O. Кинетическая энергия такого тела, очевидно, равна

$$K = \frac{1}{2}\int \mathbf{v}^2\, dm,$$

где интегрирование ведется по всей массе тела. Воспользовавшись формулой $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$, можем написать $\mathbf{v}^2 = (\mathbf{v}\mathbf{v}) = ([\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]\mathbf{v})$, или после перестановки порядка сомножителей $\mathbf{v}^2 = (\boldsymbol{\omega}[\mathbf{r}\mathbf{v}])$. Так как $\boldsymbol{\omega}$ одинакова для всех точек тела, то

$$K = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\int [\mathbf{r}\mathbf{v}]\, dm,$$

или

$$K = \frac{1}{2}(\mathbf{L}\boldsymbol{\omega}), \qquad (47.2)$$

где $\mathbf{L}$ — момент импульса тела относительно точки O.

В общем случае векторы $\mathbf{L}$ и $\boldsymbol{\omega}$ направлены под углом друг к другу. В этом проще всего убедиться на примере одной материальной точки M, вращающейся вокруг неподвижной или мгновенной оси. Возьмем начало O на этой оси. Тогда

$$\mathbf{L} = m[\mathbf{r}\mathbf{v}] = m[\mathbf{r}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]] = m\mathbf{r}^2\boldsymbol{\omega} - m(\mathbf{r}\boldsymbol{\omega})\mathbf{r}.$$

Последнее слагаемое в нуль, вообще говоря, не обращается, а потому в общем случае векторы $\mathbf{L}$ и $\boldsymbol{\omega}$ не коллинеарны. Они коллинеарны только тогда, когда в качестве начала O взято основание перпендикуляра, опущенного из M на ось вращения. В этом случае момент $\mathbf{L}$ относительно точки O сводится к моменту относительно оси вращения. Обозначая последний через L_x, можем написать $L = L_x = I\omega$, где I — момент инерции точки относительно оси вращения. Таким образом, формула (47.2) переходит в $K = 1/2\, L_x\omega = 1/2\, I\omega^2$. Последняя формула справедлива не только

для одной материальной точки, но и для всего тела, поскольку последнее можно рассматривать как систему материальных точек, вращающихся вокруг общей оси. Таким образом, формула (47.2) эквивалентна формуле (33.6), полученной ранее иным путем.

§ 48. СКАТЫВАНИЕ ТЕЛ С НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

1. Пусть скатывающееся тело обладает *симметрией вращения* относительно геометрической оси C (рис. 130). Будем предполагать, что при движении не возникает скольжения. Это означает, что скорость тела в точке касания A равна нулю. Отсутствие скольжения обеспечивается действием сил со стороны наклонной плоскости на скатывающееся тело. Эти силы сводятся к силе нормального давления $\mathbf{F}_n$ и к касательной силе трения $\mathbf{F}_\tau$. При отсутствии скольжения сила $\mathbf{F}_\tau$ есть сила трения покоя или сила трения сцепления.

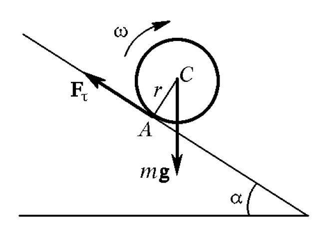


Рис. 130

Модуль силы $\mathbf{F}_\tau$ может принимать любое значение от 0 до kF_n, где k — коэффициент трения (см. § 17). При качении сила устанавливается как раз такой, чтобы не было скольжения. Если касательная сила, требующаяся для этого, превышает kF_n, то чистое качение невозможно — оно будет сопровождаться скольжением.

Решим задачу о скатывании тела тремя различными способами.

Способ 1. Применим уравнение моментов относительно мгновенной оси вращения. При отсутствии скольжения мгновенная ось проходит через точку касания A. Так как мгновенная ось и ось, проходящая через центр масс C, движутся параллельно друг другу, то уравнение моментов имеет обычную простую форму

$$I_A \frac{d\omega}{dt} = M_A, \tag{48.1}$$

где I_A — момент инерции скатывающегося тела относительно мгновенной оси, а M_A — момент внешних сил относительно той же оси. Внешними силами являются сила тяжести $m\mathbf{g}$ и реакция опоры, действующая со стороны наклонной плоскости на скатывающееся тело. Сила реакции опоры выпадает из уравнения моментов, так как она проходит через ось A, и ее момент относительно этой оси равен нулю. Таким образом,

$$I_A \frac{d\omega}{dt} = mgr \sin \alpha.$$

Обозначим через v линейную скорость точки C. Она связана со скоростью v_A точки A тела соотношением $v = v_A + \omega r$. При отсутствии скольжения $v_A = 0$, а потому $v = \omega r$. Для линейного ускорения точки C получаем $a = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$. Поэтому предыдущее уравнение дает

$$a = \frac{mgr^2}{I_A}\sin\alpha. \tag{48.2}$$

По теореме Гюйгенса—Штейнера $I_A = I_C + mr^2$, где I_C — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс C. Следовательно,

$$a = \frac{g\sin\alpha}{1 + I_C/mr^2}. \tag{48.3}$$

Преимущество рассматриваемого способа состоит в том, что в исходное уравнение (48.1) совсем не входит неизвестная реакция опоры.

Способ 2. Применим уравнение моментов относительно оси, проходящей через центр масс C. Оно также имеет простой вид

$$I_C\frac{d\omega}{dt} = M_C,$$

где M_C — момент внешних сил относительно оси C. В это уравнение не войдет сила тяжести, так как она проходит через ось C. Момент создается силой реакции опоры. При этом играет роль только слагаемая F_τ этой силы, параллельная наклонной плоскости, т. е. сила трения сцепления. Ее момент $M_C = rF_\tau$, а потому

$$I_C\frac{d\omega}{dt} = rF_\tau.$$

Это уравнение содержит два неизвестных: угловое ускорение $\frac{d\omega}{dt}$ и силу F_τ. Недостающее уравнение дает теорема о движении центра масс:

$$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\alpha - F_\tau. \tag{48.4}$$

Присоединив сюда прежнее соотношение $a = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$ и разрешив полученные уравнения относительно a, найдем прежний результат (48.3). Кроме того, получаем следующее выражение для силы трения сцепления:

$$F_\tau = \frac{I_C}{I_C + mr^2}mg\sin\alpha. \tag{48.5}$$

Способ 3. Применим закон сохранения энергии. Кинетическая энергия тела равна $K = ½\, I_A\omega^2$. Поэтому $½\, I_A\omega^2 = mgh$, где h — высота, с которой опустилось тело при скатывании из состояния покоя. Если оно прошло вдоль наклонной плоскости путь x, то $h = x \sin\alpha$, и, следовательно,

$$\frac{1}{2}\, I_A\omega^2 = \frac{I_A}{2r^2}\, v^2 = mgx \sin\alpha.$$

Дифференцируя это соотношение по времени и замечая, что $\frac{dx}{dt} = v$, снова получим формулу (48.2).

2. Так как на скатывающееся тело действует сила трения, то может возникнуть вопрос, почему в рассматриваемой задаче можно применять закон сохранения энергии в его механической форме. Ответ заключается в том, что *при отсутствии скольжения сила трения приложена к тем точкам тела, которые лежат на мгновенной оси вращения.* Мгновенная скорость таких точек равна нулю, а потому приложенная к ним сила трения сцепления *работы не производит* и не влияет на полную кинетическую энергию скатывающегося тела. Роль силы трения сцепления $\mathbf{F}_\tau$ сводится к тому, чтобы привести тело во вращение и обеспечить чистое качение. При наличии силы трения сцепления работа силы тяжести идет на увеличение кинетической энергии не только поступательного, но и вращательного движения тела.

3. Комбинация I_C/m, входящая в формулу (48.3), имеет размерность квадрата длины. Введем для нее обозначение

$$\rho^2 = \frac{I_C}{m}$$

и назовем ρ *радиусом инерции* тела. Формула (48.3) принимает вид

$$a = \frac{g \sin\alpha}{1 + (\rho/r)^2}. \qquad (48.6)$$

Величину r можно назвать *радиусом качения* тела. Радиус качения есть расстояние между центром масс скатывающегося тела и мгновенной осью вращения. Для цилиндра или шара радиус качения равен геометрическому радиусу этих тел.

Ускорение скатывающегося тела и приобретенная им скорость поступательного движения зависят от отношения радиуса инерции к радиусу качения. Чем больше это отношение, тем медленнее скатывается тело. Особенно просто этот результат можно уяснить с помощью закона сохранения энергии. Если тело скатывается с высоты h, то вся его потенциальная энергия mgh переходит в кинетическую. Последняя складывается из кинетических энергий поступательного и вращательного движений. Полная кинетическая энергия

тела в нижнем положении равна mgh, т. е. зависит только от высоты h. Чем большая доля кинетической энергии приходится на вращение тела, тем медленнее оно скатывается с наклонной плоскости. Отношение кинетической энергии вращательного движения к кинетической энергии поступательного движения равно

$$\frac{E_{\text{вр}}}{E_{\text{пост}}} = \frac{I_C\omega^2}{mv^2} = \left(\frac{\rho}{r}\right)^2.$$

Максимальное значение для ускорения a получается в случае чистого скольжения при отсутствии сил трения.

Пользуясь выражениями для моментов инерции, полученными в § 36, легко найти соответствующие радиусы инерции, а затем вычислить ускорение a. Таким путем получим следующие результаты:

полый цилиндр (без тормозов): $\rho^2 = r^2$, $a = 1/2\, g \sin\alpha$;

сплошной цилиндр: $\rho^2 = 1/2\, r^2$, $a = 2/3\, g \sin\alpha$;

полый шар: $\rho^2 = 2/3\, r^2$, $a = 3/5\, g \sin\alpha$;

сплошной шар: $\rho^2 = 2/5\, r^2$, $a = 5/7\, g \sin\alpha$.

Полые тела скатываются медленнее, чем сплошные тела той же геометрической формы. При одинаковых массах моменты инерции полых тел больше, чем сплошных. Поэтому на долю вращательного движения у полых тел приходится относительно большая кинетическая энергия, чем у сплошных.

Возьмем маховичок, насаженный на ось. Положим ось на наклонные рельсы, чтобы маховичок находился между ними (рис. 131). Радиус качения в этом случае совпадает с радиусом оси маховичка r. Отношение ρ/r здесь велико, и маховичок будет скатываться очень медленно.

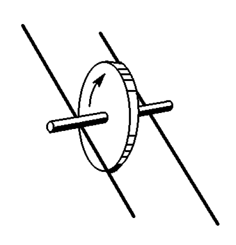


Рис. 131

4. Когда угол наклона α равен нулю, ускорение a обращается в нуль. Вместе с ним обращается в нуль и сила трения сцепления F_τ, как это видно из формулы (48.5). Таким образом, твердое тело, обладающее осевой симметрией, например цилиндр или шар, при отсутствии скольжения катится по твердой горизонтальной плоскости прямолинейно и равномерно, совсем не испытывая силы сопротивления. Этот результат относится к идеализированным моделям тел. Тело и плоскость, по которой оно катится, должны быть идеально твердыми и гладкими. Для реальных тел он не справедлив или справедлив только приближенно. В этом случае тело и плоскость деформируются. На плоскости возникает углубление, тело соприкасается с ней не в одной геометрической точке, а на некотором участке конечной площади. В результате при качении по горизон-

тальной плоскости возникает сила, замедляющая движение. Это есть сила *трения качения.* Она обычно мала по сравнению с силой трения скольжения, и во многих случаях ею можно пренебречь (см. § 17).

ЗАДАЧИ

1. Определить ускорение a центра шарика, скатывающегося без скольжения по наклонному желобу, образующему угол α с горизонтом. Форма поперечного сечения желоба изображена на рис. 132 *а* и *б*.

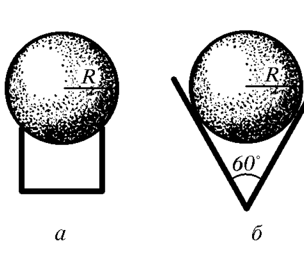


Рис. 132

Ответ. а) $a = \dfrac{R^2 - h^2}{\rho^2 + (R^2 - h^2)} g \sin \alpha$, где ρ — радиус инерции шарика, $2h$ — ширина желоба; б) $a = \dfrac{R^2}{4\rho^2 + R^2} g \sin \alpha$.

2. С какой высоты H должен скатиться шарик с радиусом инерции ρ, для того чтобы он смог без скольжения описать мертвую петлю по желобу радиуса R? Радиусом шарика r по сравнению с R пренебречь.

Ответ. $H = \dfrac{5r^2 + \rho^2}{2r^2} R$. Для сплошного шара $H = {}^{27}/_{10}\, R$, для полого $H = {}^{17}/_{6}\, R$.

3. Цилиндр или шар радиусом r катится по плоскости, наклоненной под углом α к горизонту. Определить, при каком значении угла α начнется качение со скольжением, если коэффициент трения скольжения между катящимся телом и плоскостью равен k.

Ответ. $\operatorname{tg} \alpha > \dfrac{r^2 + \rho^2}{\rho^2} k$, где ρ — радиус инерции катящегося тела. Для сплошного шара $\operatorname{tg} \alpha > {}^{7}/_{2}\, k$, для полого $\operatorname{tg} \alpha > {}^{5}/_{2}\, k$. Для сплошного цилиндра $\operatorname{tg} \alpha > 3k$, для полого $\operatorname{tg} \alpha > 2k$.

4. Шарик радиусом r скатывается без начальной скорости и без скольжения по поверхности сферы из самого верхнего положения A (рис. 133). Определить точку, в которой он оторвется от сферы и начнет свободно двигаться под действием силы тяжести.

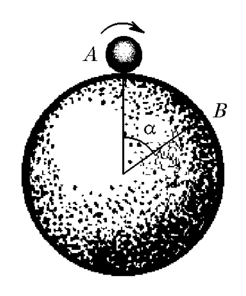


Рис. 133

Ответ. Положение точки B, в которой шарик отрывается от сферы и начинает свободно двигаться под действием силы тяжести, определяется углом α, косинус которого равен

$$\cos \alpha = \frac{2r^2}{3r^2 + \rho^2},$$

где ρ — радиус инерции шарика. Результат не зависит от радиуса сферы. Для сплошного шарика $\cos \alpha = {}^{10}/_{17}$ ($\alpha = 54°$), для полого $\cos \alpha = {}^{6}/_{11}$ ($\alpha = 57°$).

5. Цилиндр массой M и радиусом r катится по горизонтальной поверхности стола (рис. 134). Обвитая вокруг цилиндра нить горизонтально проходит через неподвижный блок, к другому концу нити подвешен груз

массой m. Пренебрегая массами блока и нити, найти ускорение центра масс цилиндра.

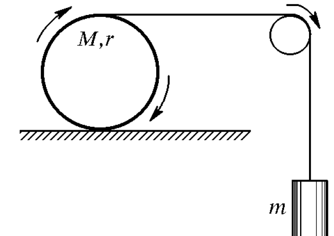


Рис. 134

Ответ. $a = \frac{2mr^2}{M(\rho^2+r^2)+4mr^2}g$, где ρ — радиус инерции цилиндра. Для сплошного цилиндра $a = \frac{4m}{3M+8m}g$, для полого $a = \frac{m}{M+2m}g$.

6. По наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, скатывается массивный полый цилиндр массой M и радиусом r. По поверхности цилиндра бежит собака таким образом, что она все время занимает наивысшее положение на поверхности цилиндра. Определить, с каким ускорением a скатывается цилиндр, если масса собаки m.

Решение. Метод решения этой задачи поучителен. Для решения проще всего воспользоваться уравнением моментов относительно мгновенной оси вращения A (рис. 135). При этом все движения должны рассматриваться относительно системы отсчета, в которой наклонная плоскость неподвижна. В этой системе собака, все время находится в наивысшей точке цилиндра S, движется параллельно наклонной плоскости и притом с той же скоростью v, с какой движется центр цилиндра. Момент импульса системы L слагается из момента импульса цилиндра $I\omega$ и момента импульса собаки mvh, где $h = r(1 + \cos\alpha)$ — длина перпендикуляра, опущенного на наклонную плоскость из точки S. Итак,

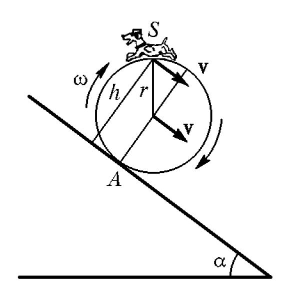


Рис. 135

$$L = I\omega + mrv(1 + \cos\alpha),$$

причем под I следует понимать момент инерции цилиндра относительно мгновенной оси, т. е. величину $2Mr^2$. Из-за отсутствия скольжения $v = \omega r$, а потому

$$L = [2M + m(1 + \cos\alpha)]rv.$$

Так как центр масс системы и мгновенная ось A движутся параллельно, то производная L по времени должна равняться моменту внешних сил относительно мгновенной оси A, т. е. $(M + m)gr\sin\alpha$. Приравнивая оба выражения, получим

$$a = \frac{M+m}{2M+m(1+\cos\alpha)}g\sin\alpha.$$

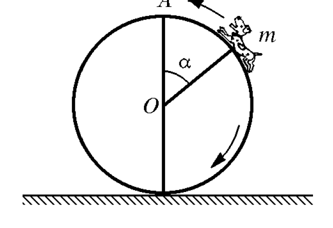


Рис. 136

7. По поверхности большого полого цилиндра, лежащего на горизонтальной плоскости, начинает бежать собака массой m в направлении к наивысшей точке A и притом так, что она все время находится на одном и том же расстоянии от этой точки (рис. 136). В результате цилиндр начинает ка-

титься по горизонтальной плоскости без скольжения. Масса цилиндра M, а угол AOm равен α. Определить: 1) ускорение оси цилиндра a; 2) силу трения между цилиндром и плоскостью во время качения $F_{тр}$; 3) время t, в течение которого собака способна оставаться на указанном расстоянии от точки A, если максимальная полезная мощность, которую она способна развить, равна $P_{макс}$. Какая при этом будет достигнута максимальная скорость $v_{макс}$ поступательного движения цилиндра? (Полезной мощностью здесь называется мощность, которая затрачивается собакой на увеличение кинетической энергии системы.)

Ответ. $a = \dfrac{mg\sin\alpha}{2M+m(1+\cos\alpha)}$, $F_{тр} = (M+m)a$, $t = \dfrac{P_{макс}}{2M+m}\dfrac{1}{a^2}$, $v_{макс} = \dfrac{P_{макс}}{(2M+m)a}$.

8. Определить ускорение a, с которым цилиндрическая бочка, целиком заполненная жидкостью, скатывается без скольжения с наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом (рис. 137). Трение между жидкостью и стенками бочки считать пренебрежимо малым.

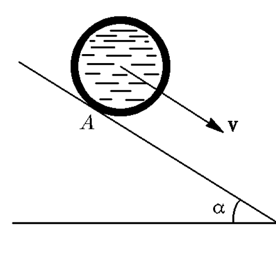


Рис. 137

Решение. При отсутствии трения между жидкостью и стенками бочки вращение бочки не передается жидкости. Жидкость движется поступательно как целое со скоростью v, равной скорости движения центра масс. Момент импульса системы относительно мгновенной оси A равен $L = I_A\omega + mRv$, где R — внешний радиус бочки, I_A — момент инерции ее относительно мгновенной оси A, m — масса жидкости. Из-за отсутствия скольжения $v = \omega R$, так что

$$L = \left(\frac{I_A}{R} + mR\right)v.$$

Центр масс бочки движется параллельно мгновенной оси, а потому

$$\frac{dL}{dt} = \left(\frac{I_A}{R} + mR\right)\frac{dv}{dt} = (M+m)Rg\sin\alpha,$$

где M — масса бочки. Отсюда

$$a = \frac{(M+m)R^2}{I_A + mR^2}\, g\sin\alpha.$$

В предельном случае, когда бочка не заполнена жидкостью ($m = 0$), получается ранее выведенная формула (48.2). В другом предельном случае, когда толщина стенок бочки пренебрежимо мала по сравнению с радиусом R, $I_A = 2MR^2$,

$$a = \frac{M+m}{2M+m}\, g\sin\alpha.$$

При этом мы не учитывали моменты инерции днищ бочки, считая их пренебрежимо малыми.

Читателю рекомендуется решить ту же задачу с помощью уравнения моментов относительно центра масс, а также с помощью уравнения сохранения энергии.

9. Диск Максвелла (по имени выдающегося английского физика Джемса Максвелла (1831—1879)) подвешен на очень длинных нитях (рис. 138). Части нитей длиной $l = 50$ см каждая были намотаны на ось диска, после чего диск стал опускаться под действием силы тяжести. Достигнув нижнего положения, диск начал подниматься, сообщив «рывок» нитям. Найти ускорение диска и натяжение нити во время его опускания и поднятия, а также оценить приближенно натяжение нити во время рывка. Масса диска $M = 1$ кг, его радиус $R = 10$ см, радиус оси $r = 0{,}5$ см. Растяжением нити во время рывка пренебречь. (Сравните эту задачу с задачей 2 к § 37.)

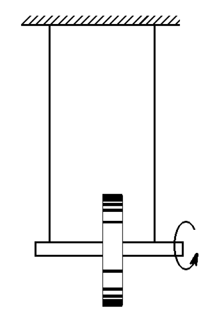


Рис. 138

Ответ. Пока движение совершается без рывка, диск опускается и поднимается с одним и тем же ускорением, направленным вниз:

$$a = \frac{2r^2}{R^2+2r^2}\,g.$$

Натяжение нити при опускании и поднятии диска также одно и то же и равно

$$T_0 = \frac{Mg}{2}\left(1 - \frac{a}{g}\right) \approx 4{,}83 \text{ Н}.$$

Во время рывка нить испытывает дополнительное натяжение ΔT, определяемое приближенным выражением

$$\Delta T \approx \frac{l}{\pi r}\,\frac{2a}{g}\,Mg \approx 3{,}14 \text{ Н}.$$

Полное натяжение нити во время рывка $T = T_0 + \Delta T \approx 8{,}0$ Н.

10. На каком расстоянии l от оси баллистического маятника должно находиться место попадания горизонтально летящего снаряда, чтобы ось маятника при ударе снаряда не испытывала добавочной нагрузки?

Решение. Пусть $\mathbf{F}$ — горизонтальная сила, с которой ударяющий снаряд действует на маятник (рис. 139). Уравнение моментов относительно точки подвеса O дает

$$I\,\frac{d\omega}{dt} = Fl.$$

Так как при ударе ось маятника не испытывает дополнительной нагрузки, то на основании теоремы о движении центра масс можно написать

$$m\,\frac{dv}{dt} = F,$$

Рис. 139

где v — скорость центра масс, m — масса маятника. Массой снаряда пренебрегаем. Почленным делением из этого и предыдущего уравнений исключаем силу F и получаем

$$l = \frac{I}{m}\,\frac{d\omega}{dv}.$$

Если a — расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника, то $v = \omega a$. В результате находим

$$l = \frac{I}{ma}.$$

Отсюда видно, что l есть приведенная длина физического маятника, а точка A совпадает с центром качения его. Соответствующая ей точка подвеса маятника O называется *«центром удара»*. Кузнец точно знает, в каком месте нужно держать рукоятку своего тяжелого молота (именно — в центре удара), чтобы при ударе не ощущать в руке неприятную отдачу.

11. Каким местом шашки следует наносить удар по лозе, чтобы при рубке не ощущалась неприятная отдача? Шашку считать однородной полосой длины l, которую при ударе держать за конец.

Ответ. Расстояние от руки до места удара должно составлять $2l/3$.

12. Твердый цилиндр или шар, положенный на твердую горизонтальную плоскость, катится по ней со скольжением. Показать, что во время качения поступательная и вращательная скорости этого тела связаны соотношением

$$mrv + I\omega = \text{const}, \qquad (48.7)$$

где I — момент инерции относительно геометрической оси тела.

Решение. Уравнения движения центра масс и моментов имеют вид

$$m\frac{dv}{dt} = \pm F, \quad I\frac{d\omega}{dt} = \mp M = \mp rF.$$

Верхний знак относится к случаю, когда сила трения F направлена вперед (поступательное движение ускоряется, вращение замедляется), нижний — когда F направлена назад (поступательное движение замедляется, вращение ускоряется). Исключая F и dt, найдем в обоих случаях $mr\,dv = -I\,d\omega$, откуда и следует соотношение (48.7).

13. Согласно уравнению (48.7) качение твердого тела по горизонтальной плоскости не может прекратиться, если нет никаких дополнительных сил, помимо горизонтальной силы трения, действующей в точке касания. В чем причина расхождения этого вывода с опытом?

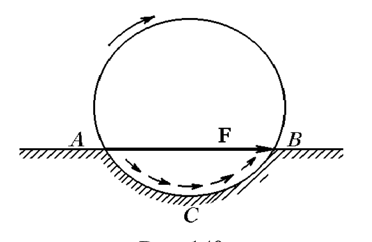


Рис. 140

Решение. Реальные тела деформируемы. На плоскости, по которой катится тело, возникает углубление. Силы трения, действующие на катящееся тело, на рис. 140 изображены маленькими стрелками, их результирующая $\mathbf{F} = \overrightarrow{AB}$. Ясно, что момент сил трения M больше момента результирующей, т. е. $M > rF$ (F и M — величины положительные). Из уравнений $m\,dv = \pm F\,dt$, $I\,d\omega = \mp M\,dt$ почленным делением и умножением на r получаем

$$mr\,dv + I\,d\omega(rF/M) = 0.$$

С учетом неравенства $rF < M$ отсюда следует, что $mr\,dv + I\,d\omega < 0$, или

$$\frac{d}{dt}(mrv + I\omega) < 0. \qquad (48.8)$$

Таким образом, в случае реального качения величина $mrv + I\omega$ убывает со временем и в конце концов обращается в нуль.

14. Сплошному однородному шару радиусом r, лежащему на горизонтальной плоскости, в момент $t = 0$ сообщена скорость v_0 без вращения. Учитывая трение скольжения, но пренебрегая трением качения, найти угловую скорость шара, когда его движение перейдет в чистое качение. Определить потерю кинетической энергии на трение.

Решение. На основании (48.7)

$$mrv_0 = mrv + I\omega = (mr^2 + I)\ \omega,$$

где v — поступательная, а ω — вращательная скорости шара после установления чистого качения. Отсюда и найдется искомая угловая скорость ω. Потеря кинетической энергии равна

$$\Delta K = \frac{1}{2}\frac{I}{I+mr^2}\,mv_0^2 = \frac{1}{7}\,mv_0^2.$$

15. Сплошной однородный шар радиусом r, вращающийся вокруг горизонтального диаметра с угловой скоростью ω_0, ставится на горизонтальную плоскость без сообщения ему поступательного движения. Учитывая трение скольжения, но пренебрегая трением качения, найти линейную скорость v центра шара, когда его движение перейдет в чистое качение. Определить потерю кинетической энергии на трение.

Ответ. $v = \frac{Ir}{I+mr^2}\,\omega_0 = \frac{2}{7}\,r\omega_0$, $\Delta K = \frac{1}{2}\frac{mr^2}{I+mr^2}\,I\omega_0^2 = \frac{1}{7}\,mr^2\omega_0^2$.

16. Бильярдный шар катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью v и ударяется в покоящийся такой же бильярдный шар, причем линия центров параллельна скорости движения. Определить скорости обоих шаров после того, как их движения перейдут в чистые качения. Какая доля первоначальной кинетической энергии перейдет в тепло? Считать, что при столкновении шаров передачи вращательного движения не происходит. Потерей энергии на трение при чистом качении пренебречь.

Ответ. Скорость первого шара $v_1 = 2/7\ v$, второго $v_2 = 5/7\ v$. Потеря кинетической энергии на трение составляет 20/49 начального значения кинетической энергии.

17. Два одинаковых бильярдных шара катятся без скольжения навстречу друг другу с одной и той же скоростью v_0 и претерпевают упругий удар. Предполагая, что удар центральный и за время соударения шаров угловые скорости не изменяются, вычислить скорость каждого шара столкновения, когда установится чистое качение.

Решение. При столкновении шары обмениваются поступательными скоростями, тогда как вращательные скорости их сохраняются неизменными. Очевидно, достаточно найти движение одного из шаров. Непосредственно после столкновения начальные скорости рассматриваемого шара будут $v_{\text{нач}} = -v_0$, $\omega_{\text{нач}} = \omega_0 = v_0/r$. Поэтому на основании (48.7) для движения шара после столкновения можно написать $mvr + I\omega = -mv_0r + I\omega_0$. После установления чистого качения $v = \omega r$ и, следовательно,

$$v = \frac{I-mr^2}{I+mr^2}\,v_0 = -\,\frac{3}{7}\,v_0.$$

18. Бильярдный шар, катящийся без скольжения со скоростью v_0, отражается упруго при нормальном столкновении с неподвижной стенкой. Предполагая, что за время соударения угловая скорость шара не меняется, определить его скорость v после отражения, когда движение перейдет в чистое качение.

Ответ. $v = \frac{I - mr^2}{I + mr^2} v_0 = \frac{3}{7} v_0$.

19. Как надо ударить кием по бильярдному шару, чтобы сила трения шара о сукно бильярдного стола заставляла его двигаться: а) ускоренно; б) замедленно; в) равномерно? Предполагается, что удар наносится горизонтально в вертикальной плоскости, проходящей через центра шара и точку касания его с плоскостью бильярдного стола.

Ответ. Шар будет двигаться равномерно, если точка удара лежит выше его центра на расстоянии 2/5 радиуса. Такие удары называются *нормальными*. Если она лежит еще выше, то движение шара будет ускоренным. Если же точка удара лежит ниже, то шар будут двигаться замедленно. Соответствующие удары называют *высокими* и *низкими*. Решение получено в предположении, что сила трения шара о плоскость стола пренебрежимо мала по сравнению с силой, с которой на шар действует кий во время удара.

20. Как надо ударить кием по бильярдному шару, чтобы при столкновении с другим (неподвижным) шаром: а) оба шара стали двигаться вперед (*удар с накатом*); б) первый шар остановился, а другой двигался вперед; в) второй шар двигался вперед, а первый откатился назад (*удар с оттяжкой*)? Относительно направления и плоскости удара ввести те же предположения, что и в предыдущей задаче.

Ответ. Случай а) реализуется при высоких ударах, случай б) — при нормальных, случай в) — при низких.

21. Виртуозный парижский биллиардист Миньо в 1883 г. в Варшаве ставил на краю бильярда стакан с водой. Бильярдный шар располагался в противоположном конце бильярда. Миньо наносил по шару сильный кратковременный удар кием, наклоненным под большим углом к горизонтальной плоскости, быстро убирая кий после удара. Кий располагался в вертикальной плоскости, проходившей через центр шара и линию, соединявшую его со стаканом. Шар быстро приближался к стакану, но затем внезапно отбрасывался назад, не дойдя 1—2 см до стакана. Объяснить явление.

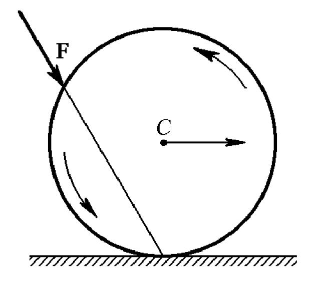


Рис. 140а

Решение. Если удар наклонным кием нанести левее центра шара (рис. 140*а*), то возникает как поступательное движение вправо, так и его вращение со скольжением против часовой стрелки. Из-за скольжения поступательная и вращательная скорости шара будут уменьшаться. Удар кием надо нанести так, чтобы в некоторый момент поступательное движение шара пропало, а вращение продолжилось в том же направлении. Тогда в этот момент шар мгновенно остановится, а затем из-за вращения откатится назад — возникнет частое качение.

22. По бильярдному шару нанесен боковой удар горизонтальным кием, так что вертикальная плоскость не проходит через центр шара. Как отразится такая нецентральность удара на движении шара?

Ответ. Возникнет дополнительное вращение шара вокруг вертикальной оси — верчение. Сила трения верчения и ее момент пренебрежимо малы. Поэтому шар, пока он не ударился о борт бильярда, будет двигаться так же, как и при ударе, нанесенном в вертикальной плоскости, проходящей через центр шара. Верчение скажется при ударе шара о борт бильярда. Так как борт бильярда «мягкий», то время соприкосновения с ним шара конечно. За это время из-за верчения шара на него будет действовать касательная сила трения скольжения, увеличивая или уменьшая касательную скорость поступательного движения шара. Шар отразится от борта бильярда, но угол падения уже не будет равен углу отражения. Он будет больше или меньше, в зависимости от направления верчения.

23. Удар кием по бильярдному шару наносится в какой-то точке в верхней половине шара, причем направление кия может быть каким угодно. Определить в общем случае вид траектории шара в плоскости бильярда.

Решение. Поместим начало координатной системы в центр шара. Координатные оси X и Y направим параллельно плоскости бильярда, а ось Z — вертикально вверх. Пусть F_x, F_y, F_z — слагающие мгновенной силы удара. Сила F_x вызовет вращение вокруг осей Y и Z с угловыми скоростями ω_y' и ω_z', сила F_y — вращение с угловыми скоростями ω_x' и ω_z'', сила F_z — вращения с угловыми скоростями ω_x'' и ω_y''. Вращение с угловыми скоростями ω_z' и ω_z'' есть верчение вокруг вертикальной оси. Пока шар ударяется о борт бильярда, от верчения можно отвлечься, так как силы трения верчения и их моменты пренебрежимо малы. Надо принять во внимание только угловые скорости $\omega_x = \omega_x' + \omega_x''$ и $\omega_y = \omega_y' + \omega_y''$. Они складываются в угловую скорость $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_x + \boldsymbol{\omega}_y$. Не нарушая общности, оси X и Y можно повернуть, направив ось X вдоль вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Тогда шар будет вращаться только вокруг оси X в общем случае со скольжением. Помимо вращения силы F_x и F_y вызовут поступательное движение центра шара параллельно осям X и Y, которое передается и движению точки соприкосновения шара с плоскостью бильярда. (Сила F_z на поступательное движение не влияет, так как ее действие компенсируется нормальным давлением.) Благодаря этому изменяется и сила трения скольжения шара по плоскости бильярда. Существенно однако, что результирующая сила трения скольжения постоянна, т. е. не зависит от скорости движения шара. Так как в общем случае эта сила направлена под углом к начальной скорости, сообщенной силой удара, то возникает движение шара по параболе.

24. Вращающийся с угловой скоростью ω_0 сплошной однородный цилиндр радиусом r ставится без начальной поступательной скорости у основании наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтальной плоскостью, и начинает вкатываться наверх. Определить время, в течение которого цилиндр достигает наивысшего положения на наклонной плоскости.

Решение. Пусть $\mathbf{F}$ — сила трения, действующая на цилиндр в месте соприкосновения его с наклонной плоскостью (рис. 141). Она заставляет цилиндр подниматься по наклонной плоскости. Сначала, пока не установилось чистое качение, $\mathbf{F}$ является силой трения скольжения. После перехода движения в чистое качение $\mathbf{F}$ переходит в силу трения покоя (сцепления).

Однако независимо от характера движения оно всегда подчиняется уравнению движения центра масс

$$m\frac{dv}{dt} = F - mg\sin\alpha$$

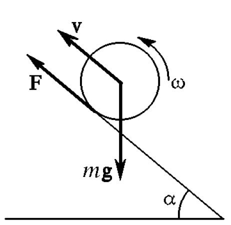


Рис. 141

и уравнению моментов (относительно геометрической оси цилиндра)

$$I\frac{d\omega}{dt} = -Fr.$$

Исключая F, получим

$$mr\frac{dv}{dt} = -I\frac{d\omega}{dt} - mgr\sin\alpha.$$

Интегрирование этого уравнения с учетом начального условия ($\omega = \omega_0$ при $t = 0$) дает

$$mrv = I(\omega_0 - \omega) - mgrt\sin\alpha.$$

Это соотношение справедливо в течение всего времени движения, независимо от того, происходит ли оно со скольжением или является чистым качением. В наивысшей точке должно быть $v = 0$. Отсюда следует, что в той же точке $\omega = 0$. В противном случае цилиндр продолжал бы вкатываться и рассматриваемая точка не была бы наивысшей. Поэтому время подъема t найдется, если в предыдущем уравнении положить $v = \omega = 0$. Это дает

$$t = \frac{I\omega_0}{mgr\sin\alpha} = \frac{r\omega_0}{2g\sin\alpha}.$$

Любопытно, что время поднятия t не зависит от коэффициентов трения между цилиндром и наклонной плоскостью. Результат не изменился бы даже тогда, когда коэффициент трения стал бы переменным. Решение предполагает, однако, что трение достаточно велико, чтобы цилиндр мог вкатываться на наклонную плоскость. При недостаточном трении будет происходить лишь замедление скорости вращения цилиндра. Нетрудно подсчитать, что время замедления определяется прежней формулой.

Напротив, время обратного скатывания цилиндра, а также наибольшая высота поднятия его зависят от коэффициента трения. Такое различие объясняется тем, что скатывание цилиндра все время является чистым качением. Поднятие же его сначала происходит со скольжением, а затем переходит в чистое качение.

25. Считая в предыдущей задаче коэффициент трения скольжения k цилиндра о наклонную плоскость заданным и постоянным, определить: 1) ускорение цилиндра a_1, когда качение происходит со скольжением; 2) время t_1, по истечении которого наступает чистое качение; 3) высоту H_1, которой достигает цилиндр, прежде чем начинается чистое качение; 4) ускорение a_2 при чистом качении; 5) дополнительную высоту H_2, на которую поднимается цилиндр при чистом качении; 6) полную высоту поднятия H; 7) время обратного скатывания цилиндра вниз t. Предполагается, что $k > \operatorname{tg}\alpha$.

Ответ. $a_1 = g(k\cos\alpha - \sin\alpha)$, направлено вверх;

$$t_1 = \frac{I\omega_0 r}{(I+mr^2)a_1 + mr^2 g\sin\alpha} = \frac{\omega_0 r}{(3k\cos\alpha - \sin\alpha)g};$$

$$H_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 \sin\alpha;\ a_2 = \frac{mr^2}{I+mr^2}g\sin\alpha = \frac{2}{3}g\sin\alpha;\ H_2 = \frac{a_1}{a_2}H_1;$$

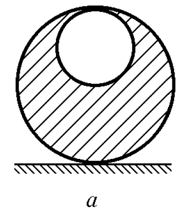
$$H = H_1 + H_2 = \frac{k\cos\alpha - \sin\alpha}{4g(3k\cos\alpha - \sin\alpha)}\,\omega_0^2 r^2;$$

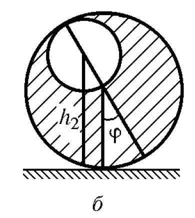
$$\overline{t} = \sqrt{\frac{2H}{a_2\sin\alpha}} = \frac{\omega_0 r_0}{2g\sin\alpha}\sqrt{\frac{3(k\cos\alpha - \sin\alpha)}{3k\cos\alpha - \sin\alpha}}.$$

26. Вращающийся с угловой скоростью ω_0 сплошной однородный цилиндр массой m_1 ставится без начальной поступательной скорости на длинную доску массой m_2, лежащую на гладкой горизонтальной плоскости. Начальная скорость доски равна нулю. Пренебрегая силой трения качения, но учитывая трение скольжения между доской и цилиндром, найти угловую скорость вращения цилиндра после того, как его движение перейдет в чистое качение. Доска предполагается настолько длинной, что чистое качение успевает установиться до того, как цилиндр скатится с доски.

Ответ. $\omega = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + 3m_2}\,\omega_0$.

27. В сплошном однородном цилиндре радиусом R сделана цилиндрическая полость радиусом $R/2$ с осью, проходящей через середину радиуса цилиндра (рис. 142 *а*). Определить период малых колебаний T, которые возникнут, если положить цилиндр на горизонтальную плоскость и дать ему возможность катиться по ней без скольжения.


а



б

Рис. 142

Решение. Задача сводится к нахождению выражений для потенциальной и кинетической энергии системы. С этой целью мысленно заполним полость тем же веществом, из которого сделан цилиндр. Образовавшийся таким образом сплошной однородный цилиндр назовем цилиндром *1*, а цилиндр вдвое меньшего радиуса, заполняющий полость, — цилиндром *2*. Массы цилиндров обозначим соответственно через m_1 и m_2. Энергия системы, как потенциальная, так и кинетическая, будет равна разности энергий цилиндров *1* и *2*. При повороте системы из положения равновесия на угол φ (рис. 142 *б*) центр масс цилиндра *1* остается на прежней высоте, его потенциальная энергия U_1 не изменяется. Потенциальная же энергия цилиндра *2* становится равной $U_2 = m_2 g h_2$, где $h_2 = R + {}^1\!/_2\, R\cos\varphi$ — высота центра масс этого цилиндра над горизонтальной плоскостью, на которой находится система. Полная потенциальная энергия всей системы

$$U = U_1 - U_2 = \mathrm{const} - m_2 gR\left(1 + \frac{1}{2}\cos\varphi\right).$$

Единственное переменное слагаемое, которое оно содержит, есть $-{}^1\!/_2\, m_2 gR\cos\varphi$. Поэтому при надлежащем выборе аддитивной постоянной

величину U всегда можно представить в виде

$$U = \text{const} + \frac{1}{2} m_2 gR(1 - \cos\varphi) = \text{const} + m_2 gR \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

или для малых углов φ

$$U \approx \text{const} + \frac{1}{4} m_2 gR\varphi^2.$$

Кинетическая энергия системы $K = {}^1/_2\,(I_1 - I_2)\dot\varphi^2$, где I_1 и I_2 — моменты инерции цилиндров относительно мгновенной оси. При изменении угла φ величины I_1 и I_2 изменяются. Но для малых колебаний этими изменениями можно пренебречь и отнести I_1 и I_2 к тому моменту, когда система находится в положении равновесия. В этом положении с помощью теоремы Гюйгенса—Штейнера нетрудно получить

$$I_1 = {}^3/_2\, m_1 R^2, \quad I_2 = {}^{19}/_8\, m_2 R^2.$$

Приняв еще во внимание, что $m_1 = 4m_2$, найдем

$$K = \frac{29}{16} m_2 R^2 \dot\varphi^2.$$

Из полученных выражений для U и K делаем вывод, что малые колебания системы будут гармоническими с периодом

$$T = \pi\sqrt{29\frac{R}{g}}.$$

28. Большой однородный свинцовый шар массой M лежит на плоской горизонтальной поверхности. Небольшая пуля массой m выпущена из ружья горизонтально со скоростью V в направлении к центру шара. После выстрела пуля застревает внутри шара. Определить линейную скорость шара v после того, как его движение перейдет в чистое качение. При рассмотрении движения шара после удара считать его однородным, пренебрегая массой застрявшей пули. Трением качения пренебречь.

Ответ. $v = \frac{5}{7}\frac{m}{M} V$.

29. Шар массой $M = 1000$ г, лежащий на горизонтальной плоскости, пробивается по диаметру пулей, летящей горизонтально с начальной скоростью $V_0 = 500$ м/с. После удара шар начинает скользить по плоскости. Спустя некоторое время его движение переходит в чистое качение с постоянной скоростью $v = 3$ м/с. Определить скорость пули V после вылета ее из шара, если масса пули $m = 10$ г. Трением качения пренебречь.

Ответ. $V = V_0 - \frac{7}{5}\frac{M}{m} v = 80$ м/с.

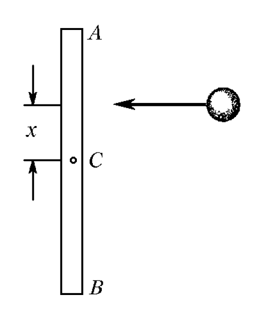


Рис. 143

30. На гладком горизонтальном столе лежит однородный стержень длиной l, который может двигаться по столу без трения (рис. 143). В начальный момент, когда скорость стержня равна нулю, в него ударяется шарик, движущийся перпендикулярно к стержню. На каком расстоянии x от центра стержня C ударился шарик, если непосредственно после удара концы стержня A и B начали двигаться со скоростями v_A и v_B соответственно? (Скорости v_A и v_B считаются положитель-

ными, когда они направлены в ту же сторону, что и скорость шарика до удара, и отрицательными — в противоположном случае.)

Ответ. $x = \frac{l}{6}\frac{v_A - v_B}{v_A + v_B}$. Результат не зависит от характера удара.

31. На идеально гладкой горизонтальной поверхности лежит стержень длиной l и массой M, который может скользить по этой поверхности без трения (см. рис. 143). В одну из точек стержня ударяет шарик массой m, движущийся перпендикулярно к стержню. На каком расстоянии x от середины стержня должен произойти удар, чтобы шарик передал стержню всю свою кинетическую энергию? Удар считать абсолютно упругим. При каком соотношении масс M и m это возможно?

Ответ. $x = \frac{l}{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{M}{m} - 1}$. Для возможности описываемого процесса необходимо $M \geqslant m$. Условие $x \leqslant l/2$ дает еще $M \leqslant 4m$.

32. На гладком горизонтальном столе лежит однородный упругий стержень длиной l и массой M. В конец стержня ударяет упругий шарик массой m, движущийся со скоростью v перпендикулярно к стержню. Найти значение энергии деформации системы в момент, когда она максимальна. Трением между стержнем и столом пренебречь.

Ответ. $U = \frac{M}{M+4m}\frac{mv^2}{2}$. В предельных случаях 1) $M = 0$ и 2) $M = \infty$ получаем 1) $U = 0$; 2) $U = {}^1\!/_2\, mv^2$.

33. На гладком горизонтальном столе лежит однородный твердый стержень длиной l и массой M, в край которого ударяет твердый шарик массой m, движущийся со скоростью v_0, перпендикулярной к оси стержня. Считая удар идеально упругим и предполагая, что силы трения между поверхностью стола и лежащими на ней телами пренебрежимо малы, вычислить угловую скорость вращения стержня после удара.

Решение. Если F — сила, действующая на шарик во время удара, то

$$m\frac{dv}{dt} = -F, \quad M\frac{dV}{dt} = F, \quad I\frac{d\omega}{dt} = F\frac{l}{2}.$$

Почленным делением исключаем F и получаем

$$\frac{m}{I}\frac{dv}{d\omega} = -\frac{2}{l}, \quad \frac{M}{I}\frac{dV}{d\omega} = \frac{2}{l}.$$

Интегрируя в пределах от начального значения угловой скорости $\omega = 0$ до конечного, найдем

$$v - v_0 = \frac{2}{l} - \frac{I}{m}\,\omega, \quad V = \frac{2}{l}\frac{I}{M}\,\omega,$$

причем в этих уравнениях v, V и ω означают величины соответствующих скоростей после удара. Угловая скорость ω найдется из уравнения сохранения энергии. Если в него подставить значения v и V, то для ω получится квадратное уравнение

$$\left[1 + \frac{4I}{l^2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\right]\omega^2 - 4\,\frac{v_0}{l}\,\omega = 0.$$

Один из корней этого уравнения ($\omega = 0$) дает угловую скорость стержня до удара, второй — после удара. По условию задачи надо взять второй корень. С учетом соотношения $I = {}^1\!/_{12}\, Ml^2$ для него получаем

$$\omega = \frac{12mv_0}{(4m+M)l}.$$

§ 49. ГИРОСКОПЫ. ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОГО ГИРОСКОПА

1. Слово «гироскоп» в буквальном переводе означает прибор для обнаружения вращения. В широком смысле *гироскопом* называется быстро вращающееся твердое тело, ось вращения которого может изменять свое направление в пространстве. Гироскоп, в особенности когда на него действуют внешние силы, может совершать удивительные движения, кажущиеся на первый взгляд неожиданными и непонятными. Они всегда воспринимаются с захватывающим интересом. Быстро вращающийся волчок может служить не только забавной игрушкой, но и прекрасным демонстрационным прибором при изучении законов механики. Все явления, обусловленные быстрым вращением гироскопа, называются *гироскопическими*. Они нашли широкое научно-техническое применение (см. § 51).

Гироскопические эффекты проявляются также у атомов благодаря наличию у них моментов импульса, связанных с внутренними орбитальными движениями или собственными вращениями (спинами) электронов и атомных ядер. Конечно, эти, как и всякие другие, атомные явления должны рассматриваться на основе квантовой механики. Однако есть много общего в гироскопических свойствах атомных и макроскопических систем. Поэтому теория гироскопов может оказаться полезной и при изучении атомной физики.

Наибольшее значение в науке и технике имеют *симметричные гироскопы*. *Симметричным* называют гироскоп, обладающей симметрией вращения относительно некоторой оси, называемой *геометрической осью* или *осью фигуры гироскопа*. Теория симметричного гироскопа более проста и более важна, чем теория несимметричного гироскопа. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только симметричных гироскопов. Обычно одна из точек оси фигуры гироскопа бывает закреплена. Закрепленную точку оси фигуры называют *точкой опоры гироскопа*. В более общем смысле *точкой опоры гироскопа* называют такую точку O оси фигуры его, относительно которой рассматривают вращение гироскопа. В общем случае движение гироскопа слагается из движения точки опоры O и вращения вокруг мгновенной оси, проходящей через эту точку. Примером гироскопа с движущейся точкой опоры может служить детская игрушка — *волчок*. Основным в теории является случай, когда точка опоры *неподвижна*. К этому частному случаю можно свести и общий случай, когда точка опоры движется (см. п. 6).

2. Чтобы ось фигуры гироскопа могла свободно поворачиваться в пространстве, гироскоп обычно помещают в так называемом *кардановом подвесе* (рис. 144). Маховичок гироскопа закрепляется на его оси фигуры $A'A$, которая может вращается по возможности с малым трением в подшипниках, укрепленных на концах диаметра *внутреннего кольца*. Внутреннее кольцо, в свою очередь, может вращаться вокруг перпендикулярной оси $B'B$, проходящей через

подшипники на концах диаметра *наружного кольца*. Наконец, наружное кольцо может совершать вращение вокруг третьей оси $D'D$, проходящей через неподвижные подшипники подставки. Ось $B'B$ перпендикулярна к оси $A'A$. Все три оси пересекаются в одной точке, называемой *центром карданова подвеса*. Гироскоп в кардановом подвесе имеет *три* степени свободы и может совершать любые повороты вокруг центра подвеса. Во всех вопросах мы будем пренебрегать кинетической энергией и моментами импульсов колец, считая их пренебрежимо малыми по сравнению с кинетической энергией и моментом импульса маховичка гироскопа. Если центр карданова подвеса или точка опоры совпадает с центром масс гироскопа, то гироскоп называется *уравновешенным*.

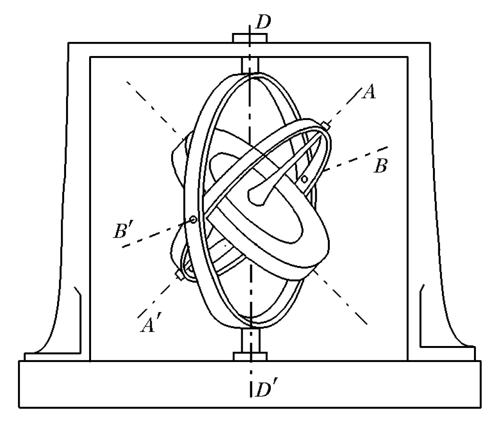


Рис. 144

3. Согласно теореме Эйлера (§ 47) движение гироскопа с неподвижной точкой опоры O можно представить как вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через эту точку. Обозначим через $\boldsymbol{\omega}$ вектор мгновенной угловой скорости, с которой вращается гироскоп, $\mathbf{L}$ — момент импульса гироскопа относительно точки O. Найдем связь между векторами $\mathbf{L}$ и $\boldsymbol{\omega}$ для симметричного гироскопа. Если угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ направлена вдоль оси фигуры гироскопа или перпендикулярно к ней, то векторы $\mathbf{L}$ и $\boldsymbol{\omega}$ параллельны между собой. Убедиться в этом проще всего можно следующим образом. Мысленно разобьем все тело гироскопа на пары одинаковых материальных точек, симметрично расположенных относительно оси фигуры гироскопа, как указано на рисунках 145 и 146. Момент импульса такой пары точек относительно точки O будет $d\mathbf{L} = dm[\mathbf{r}_1\mathbf{v}_1] + dm[\mathbf{r}_2\mathbf{v}_2]$, где dm — масса каждой из них. Если гироскоп вращается вокруг оси своей фигуры (рис. 145), то

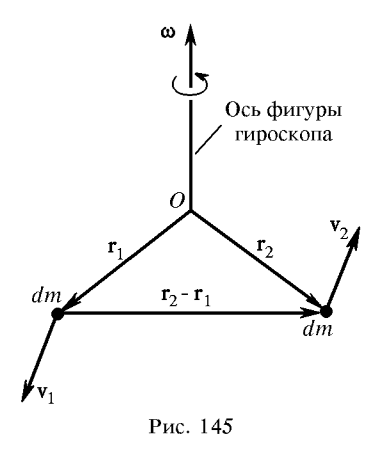


Рис. 145

скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ равны по модулю, но направлены противоположно. В этом случае $d\mathbf{L} = dm[\mathbf{v}_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)]$. Векторы $\mathbf{v}_2$ и $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ перпендикулярны к оси вращения. Поэтому вектор $d\mathbf{L}$, а с ним и момент импульса всего гироскопа $\mathbf{L}$ будут направлены вдоль оси вращения. Вектор $\mathbf{L}$ совпадает с моментом импульса относительно оси вращения, а потому $\mathbf{L} = \mathbf{I}_{\parallel}\boldsymbol{\omega}$, где $\mathbf{I}_{\parallel}$ — момент инерции гироскопа относительно оси его фигуры. Если теперь гироскоп вращается вокруг оси, перпендикулярной к оси фигуры (рис. 146), то $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, а потому $d\mathbf{L} = dm[\mathbf{v}_1(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)]$. Отсюда видно, что $d\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}$ опять направлены вдоль оси вращения, причем $\mathbf{L} = I_{\perp}\boldsymbol{\omega}$, где $I_{\perp}$ — момент инерции гироскопа относительно оси, перпендикулярной к его оси фигуры.

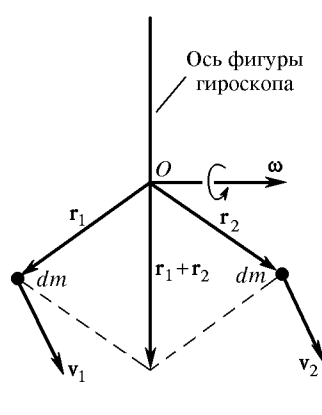


Рис. 146

Допустим теперь, что мгновенная ось направлена под горизонтальным углом к оси фигуры гироскопа. Разложим вектор $\boldsymbol{\omega}$ на две составляющие: направленную вдоль оси фигуры гироскопа $\boldsymbol{\omega}_{\parallel}$ и перпендикулярную к ней $\boldsymbol{\omega}_{\perp}$ (рис. 147). Из общего определения момента импульса (см. § 30) следует, что он выражается линейно через линейные скорости материальных точек, на которые мысленно можно разбить тело гироскопа. В свою очередь эти скорости выражаются линейно через вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, одинаковый для всех точек гироскопа. Отсюда следует, что *вектор* $\mathbf{L}$ *линейно выражается через* $\boldsymbol{\omega}$. Рассматривая его как функцию $\boldsymbol{\omega}$, можно написать $\mathbf{L} = \mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}_{\parallel} + \boldsymbol{\omega}_{\perp})$, или, в силу указанной линейности, $\mathbf{L} = \mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}_{\parallel}) + \mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}_{\perp})$. Но функция $\mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}_{\parallel})$ была бы равна моменту импульса гироскопа, если бы последний вращался только вокруг его оси фигуры с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_{\parallel}$. Значит, $\mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}_{\parallel}) = I_{\parallel}\boldsymbol{\omega}_{\parallel}$. Аналогично $\mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}_{\perp}) = I_{\perp}\boldsymbol{\omega}_{\perp}$. В результате получим

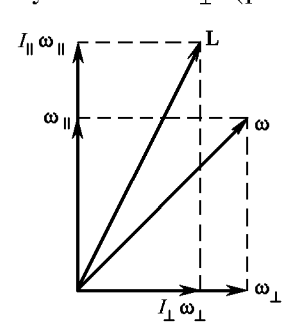


Рис. 147

$$\mathbf{L} = I_{\parallel}\boldsymbol{\omega}_{\parallel} + I_{\perp}\boldsymbol{\omega}_{\perp}. \qquad (49.1)$$

Пользуясь этой формулой, легко найти построением вектор $\mathbf{L}$, если известен вектор $\boldsymbol{\omega}$ (рис. 147). Из построения видно, что векторы $\mathbf{L}$,

$\boldsymbol{\omega}$ и ось фигуры гироскопа лежат в одной плоскости. Однако в общем случае направления векторов **L** и $\boldsymbol{\omega}$ не совпадают.

Если воспользоваться формулой (47.2), то из (49.1) можно получить следующие два выражения для кинетической энергии вращающегося гироскопа:

$$K = \frac{1}{2}\left(I_{\parallel}\omega_{\parallel}^2 + I_{\perp}\omega_{\perp}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{L}_{\parallel}^2}{I_{\parallel}} + \frac{\mathbf{L}_{\perp}^2}{I_{\perp}}\right). \qquad (49.2)$$

Эти выражения показывают, что *кинетическая энергия симметричного гироскопа равна сумме кинетических энергий двух вращений, из которых одно совершается вокруг оси фигуры, а другое — вокруг оси, к ней перпендикулярной.*

На практике гироскоп всегда приводится в быстрое вращение вокруг оси фигуры. По сравнению с этим быстрым вращением вращение, возникающее по тем или иным причинам вокруг перпендикулярной оси, всегда происходит *медленно.* Тогда различие в направлениях векторов **L** и $\boldsymbol{\omega}$ становится очень малым. Оба эти направления практически совпадают с направлением оси фигуры гироскопа.

За положительное направление оси фигуры гироскопа принимают направление ее, совпадающее с направлением вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ (точнее, образующее с ним острый угол). Если от точки опоры O отложить отрезок OS единичной длины в положительном направлении оси фигуры гироскопа, то конец этого отрезка S называется *вершиной гироскопа.* Если известно движение вершины гироскопа и угловая скорость вращения его вокруг оси фигуры, то движение гироскопа определено полностью. Поэтому основная задача теории гироскопа сводится к нахождению движения вершины гироскопа и угловой скорости вращения его вокруг оси фигуры.

4. Вся теория гироскопа построена на уравнении моментов

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}, \qquad (49.3)$$

причем моменты **L** и **M** берутся относительно неподвижной точки опоры гироскопа O. Если момент внешних сил **M** равен нулю, то гироскоп называется *свободным.* Для свободного гироскопа $\dot{\mathbf{L}} = 0$, и следовательно,

$$\mathbf{L} \equiv \mathrm{I}_{\parallel}\boldsymbol{\omega}_{\parallel} + \mathrm{I}_{\perp}\boldsymbol{\omega}_{\perp} = \mathrm{const}. \qquad (49.4)$$

Это уравнение выражает сохранение моментов импульса гироскопа. К нему следует присоединить уравнение сохранения энергии

$$K \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{L}\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{I}_{\parallel}\omega_{\parallel}^2 + \mathrm{I}_{\perp}\omega_{\perp}^2\right) = \mathrm{const}, \qquad (49.5)$$

которое также является следствием уравнения (49.3). Если уравнение (49.4) возвести в квадрат, то получится

$$\mathrm{I}_{\parallel}^2\omega_{\parallel}^2 + \mathrm{I}_{\perp}^2\omega_{\perp}^2 = \mathrm{const}.$$

Из этого и предыдущего уравнений следует, что *при движении свободного гироскопа длины векторов* $\boldsymbol{\omega}_{\parallel}$ *и* $\boldsymbol{\omega}_{\perp}$ *остаются постоянными.* Вместе с ними *остаются постоянными и обе составляющие момента импульса*: $L_{\parallel} = I_{\parallel}\omega_{\parallel}$ и $L_{\perp} = I_{\perp}\omega_{\perp}$. Следовательно, *остается постоянным угол между векторами* $\mathbf{L}$ *и* $\boldsymbol{\omega}$, как это видно из уравнения (49.5). *Из постоянства* $L_{\parallel}$ *и* $L_{\perp}$ *следует также постоянство угла между вектором* $\mathbf{L}$ *и осью фигуры гироскопа.* В каждый момент времени ось фигуры гироскопа совершает вращение вокруг мгновенной оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{L}$, как мы видели, лежат в одной плоскости с осью фигуры гироскопа. А так как вектор $\mathbf{L}$ сохраняет неизменным свое направление в пространстве, то мгновенная ось и ось фигуры должны вращаться вокруг этого неизменного направления с одной и той же угловой скоростью. Все это приводит к следующей картине движения свободного гироскопа.

В каждый момент времени движение свободного гироскопа есть вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через неподвижную точку опоры. С течением времени мгновенная ось и вектор $\mathbf{L}$ *меняют свое положение в теле, описывая конусы вокруг оси фигуры гироскопа с одной и той же постоянной угловой скоростью* $\boldsymbol{\omega}_1$, *вообще говоря, не равной* $\boldsymbol{\omega}$. *Направление вектора* $\mathbf{L}$ *неизменно в пространстве. Ось фигуры гироскопа и мгновенная ось равномерно вращаются в пространстве вокруг этого направления с той же угловой скоростью* $\boldsymbol{\omega}_1$, *но в противоположном направлении.* Такое движение называется *свободной регулярной прецессией гироскопа.* Слово «регулярная» надо понимать в том смысле, что на конические вращения оси фигуры гироскопа и мгновенной оси не накладываются никакие дрожания.

5. Если гироскоп с достаточно большим моментом инерции привести в быстрое вращение, то он будет обладать большим моментом импульса. Приращение момента импульса, как это следует из уравнения (49.3), определяется интегралом

$$\Delta\mathbf{L} = \int \mathbf{M}\,dt. \qquad (49.6)$$

Если внешняя сила действует в течение короткого промежутка времени, то интеграл (49.6), а с ним и приращение момента импульса будут малы. Значит, при кратковременных воздействиях даже очень больших сил движение свободного гироскопа изменяется мало.

Гироскоп как бы сопротивляется всяким попыткам изменить его момент импульса. С этим связана замечательная устойчивость, которую приобретает движение гироскопа после приведения его в быстрое вращение.

Возьмем массивный гироскоп, имеющий конусообразную форму (рис. 148). Вдоль оси его фигуры может ввинчиваться стержень с острым концом, которым гироскоп опирается на подставку. Ввинтим стержень настолько, чтобы точка опоры совпала с центром массы ги-

роскопа. Тогда гироскоп станет уравновешенным. При любом наклоне его оси фигуры он будет находиться в безразличном равновесии. Пока гироскоп не вращается, малейший толчок далеко уводит его из положения равновесия. Приведем теперь гироскоп в быстрое вращение вокруг его оси фигуры. Если палкой нанести сильный удар по стержню гироскопа, то направление стержня в пространстве почти не изменится. Стержень начнет лишь совершать свободную регулярную прецессию, т. е. вращательное движение по поверхности конуса малого угла раствора. Осью конуса будет служить направление момента импульса гироскопа, которое он примет после нанесения удара.

Вот другая демонстрация устойчивости движения быстро вращающегося гироскопа. Гироскоп состоит из массивного металлического маховичка, помещаемого внутри разборного полого металлического шара, состоящего из двух полушарий, которые могут сцепляться между собой. Концы оси маховичка входят в подшипники полого шара, так что маховичок может вращаться вокруг одного из диаметров шара. На ось маховичка наматывается нить, свободный конец которой выходит наружу через отверстие в полом шаре. Дергая за нить, можно привести маховичок в быстрое вращение. Если такой шар попытаться скатить с наклонной плоскости, то он будет упорно сопротивляться этим попыткам. «Послушным» шар будет только тогда, когда ось маховичка горизонтальна и перпендикулярна к направлению скатывания. В этом положении шар может свободно скатываться

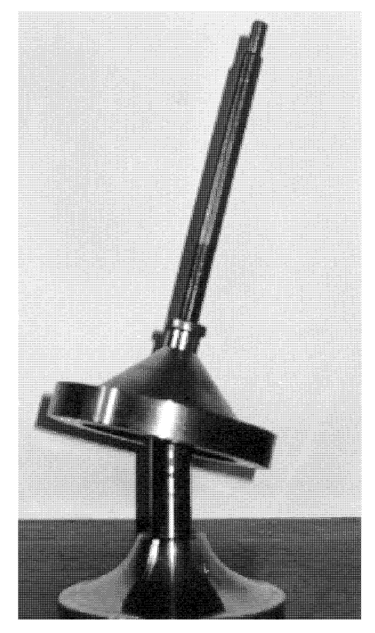




Рис. 148

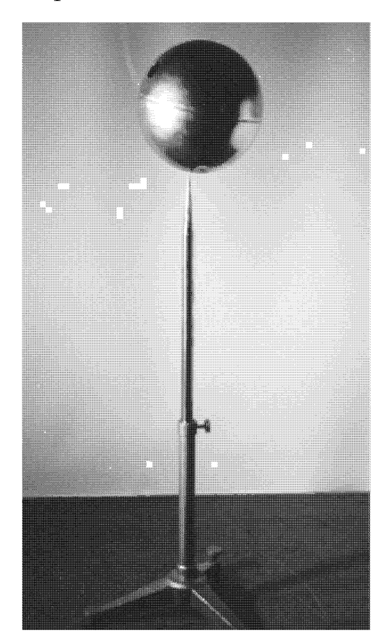


Рис. 149

без изменения направления оси маховичка, т. е. без изменения направления вектора момента импульса **L**. Во всяком другом положении для «нормального» скатывания ось маховичка, а с ней и вектор **L** должны менять направление в пространстве. «Упрямый» гироскоп этого «делать не хочет». Под действием силы тяжести шар гироскопа приобретает медленное вращение и скатывается с наклонной плоскости «боком», стремясь сохранить неизменной ориентацию оси маховичка в пространстве.

Если шар с вращающимся внутри него маховичком поставить на острие иглы даже в наклонном положении, то он не падает (рис. 149), а приобретает медленное вращение вокруг вертикальной оси под действием силы тяжести. Такое вращение называется *вынужденной прецессией*. Вынужденную прецессию мы рассмотрим в следующем параграфе.

6. Посмотрим теперь, как изменится основное уравнение (49.3), если точка опоры гироскопа движется. Ответ можно получить из уравнения (37.2). Скорость каждой точки движущегося гироскопа представим в виде $\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{\text{вр}}$, где $\mathbf{v}_O$ — скорость точки опоры O, а $\mathbf{v}_{\text{вр}} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$ — скорость, возникающая из-за вращения вокруг этой точки. Тогда момент импульса гироскопа относительно точки опоры представится выражением

$$\mathbf{L} = \int [\mathbf{r}\mathbf{v}_O]\, dm + \mathbf{L}_{\text{вр}},$$

где $\mathbf{L}_{\text{вр}}$ — момент импульса, возникающий только из-за вращения. Если ввести радиус-вектор центра масс $\mathbf{r}_C$, то

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{вр}} + m[\mathbf{r}_C\mathbf{v}_O]. \qquad (49.7)$$

Продифференцировав это выражение и подставив в формулу (37.2), получим

$$\dot{\mathbf{L}}_{\text{вр}} = \mathbf{M} - m[\mathbf{r}_C\dot{\mathbf{v}}_O]. \qquad (49.8)$$

Это формула показывает, что от движения точки опоры можно отвлечься. Но тогда к моменту действующих сил **M** надо прибавить момент «фиктивной силы», или «силы инерции», $\mathbf{F}_{\text{ин}} = -m\dot{\mathbf{v}}_O$, приложенной к центру масс гироскопа. Этот результат становится совершенно естественным, если отнести движение к системе отсчета, в которой точка опоры гироскопа неподвижна (см. гл. IX).

§ 50. ГИРОСКОП ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ. ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ

1. Наиболее интересным видом движения гироскопа является *вынужденная прецессия*. Она возникает под действием внешних сил. Возьмем, например, гироскоп, изображенный на схематическом рис. 150. Он состоит из двух одинаковых маховичков, свободно наса-

женных на общую ось. Гироскоп устроен так, что он может свободно вращаться не только вокруг его оси фигуры OZ, но также вокруг вертикальной и горизонтальной осей OY и OX. Про такой гироскоп говорят, что он имеет *три степени свободы*. Приложим в какой-либо точке A оси фигуры гироскопа постоянную силу $\mathbf{F}$, например подвесим в этой точке небольшой груз P. Когда маховички гироскопа не вращаются, наблюдается привычное явление: под действием веса груза правый маховичок опускается, левый — поднимается.

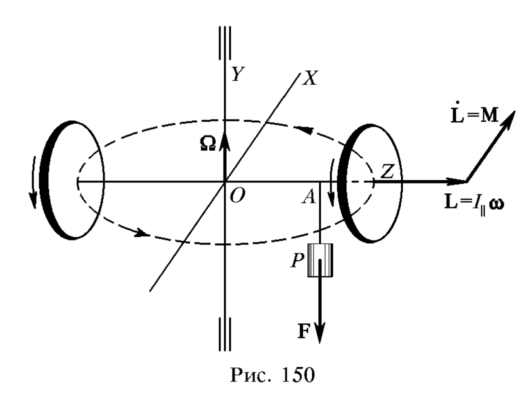


Рис. 150

Однако движение приобретает совсем иной характер, если предварительно маховички были приведены в быстрое вращение в одну и ту же сторону*). В этом случае ось фигуры гироскопа вместе с грузиком P не опускается, а начинает медленно вращаться с постоянной скоростью вокруг вертикальной оси OY. Такое вращение называется *вынужденной прецессией*. Вынужденная прецессия проще всего объясняется *приближенной теорией гироскопа*. Гироскопу всегда стремятся сообщить быстрое вращение вокруг оси его фигуры. Но вследствие различных причин гироскоп, вообще говоря, получает также вращение вокруг перпендикулярной оси. Специфические гироскопические эффекты проявляются тогда, когда это вращение является медленным по сравнению с вращением вокруг оси фигуры гироскопа. В приближенной теории им пренебрегают. В формуле (49.4) отбрасываем второе слагаемое, т. е. полагают

$$\mathbf{L} \approx I_{\parallel}\boldsymbol{\omega}_{\parallel} \approx I_{\parallel}\boldsymbol{\omega}. \qquad (50.1)$$

В этом приближении векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{L}$ не отличаются по направлению, оба они направлены вдоль оси фигуры гироскопа. Поэтому о движении оси его фигуры можно судить по изменению направления вектора $\mathbf{L}$, описываемому уравнением (49.3). Если рассматривать $\mathbf{L}$ как радиус-вектор, то производная $\dot{\mathbf{L}}$ геометрически может быть истолкована как скорость движения конца вектора $\mathbf{L}$. Допустим, что точка приложения внешней силы $\mathbf{F}$ лежит на оси фигуры гироскопа. Момент этой силы будет $\mathbf{M} = [\mathbf{aF}]$, где $\mathbf{a}$ — радиус-вектор, проведенный от точки опоры гироскопа к точке приложения силы $\mathbf{F}$. В силу уравнения

*) В демонстрационных опытах маховичок гироскопа приводят в быстрое вращение, прижимая его обод к шкиву электромотора. Существуют гироскопы (например, волчки-компасы), которые сами представляют собой электродвигатели с вращающимся магнитным полем и приводятся во вращение трехфазным током.

(49.3) вектор «скорости» $\dot{\mathbf{L}}$ будет перпендикулярен к оси фигуры гироскопа Z. Такой момент сил может изменить только направление вектора $\mathbf{L}$, а не его длину. Следовательно, если внешняя сила $\mathbf{F}$ постоянна, то вектор $\mathbf{L}$, а с ним и ось фигуры гироскопа должны совершать равномерное вращение вокруг оси OY. Это вращение и есть вынужденная прецессия. Вектор угловой скорости прецессии $\mathbf{\Omega}$ в рассматриваемом примере направлен вдоль оси OY.

Если один из маховичков (см. рис. 150) закрутить в одну, а другой — в противоположную сторону с той же угловой скоростью, то прецессии не возникает. В этом случае $\mathbf{L} = 0$, и под действием груза P гироскоп поворачивается вокруг горизонтальной оси OX, как если бы его маховички не вращались.

2. Найдем длину вектора $\mathbf{\Omega}$. Вектор $\mathbf{L}$ изменяется только вследствие вращения с угловой скоростью прецессии $\mathbf{\Omega}$. Для линейной скорости движения его конца, т. е. производной $\dot{\mathbf{L}}$, можно написать $\dot{\mathbf{L}} = [\mathbf{\Omega L}]$. Поэтому уравнение (49.3) дает

$$[\mathbf{\Omega L}] = \mathbf{M}. \tag{50.2}$$

Из этого уравнения и можно найти угловую скорость прецессии $\mathbf{\Omega}$. В нашем примере вектор $\mathbf{\Omega}$ перпендикулярен к оси фигуры гироскопа, а потому

$$\Omega = \frac{M}{L} = \frac{M}{I_{\parallel}\,\omega}. \tag{50.3}$$

Легко найти вектор $\mathbf{\Omega}$ и в более общем случае, когда ось фигуры гироскопа наклонена к оси, вокруг которой совершается его прецессия. Для этого подставим в уравнение (50.2) выражение $\mathbf{M} = [\mathbf{aF}] = a[\mathbf{sF}]$, где $\mathbf{s}$ — единичный вектор вдоль оси фигуры гироскопа. Так как приближенная теория пренебрегает различием направлений вектора $\mathbf{L}$ и оси фигуры гироскопа, то $\mathbf{L} = L\mathbf{s}$. В результате уравнение (50.2) преобразуется к виду

$$L[\mathbf{\Omega s}] = a[\mathbf{sF}].$$

Отсюда

$$\mathbf{\Omega} = -\frac{a}{L}\,\mathbf{F} = -\frac{a}{I_{\parallel}\omega_{\parallel}}\,\mathbf{F}. \tag{50.4}$$

Приведенные рассуждения справедливы при условии $\Omega \ll \omega$, т. е. для быстро вращающегося гироскопа. *Вращение гироскопа считается быстрым, если угловая скорость вращения вокруг его оси фигуры $\omega_{\parallel}$ очень велика по сравнению с угловой скоростью вращения вокруг перпендикулярной оси $\omega_{\perp}$.* В частности, она должна быть очень большой и по сравнению с угловой скоростью прецессии Ω. Для быстро вращающихся гироскопов, применяющихся в технике, угловая скорость прецессии Ω бывает в миллионы раз меньше ω.

3. Для демонстрации вынужденной прецессии совсем не обязательно, чтобы у гироскопа было два маховичка. Можно обойтись и одним маховичком. На рис. 151 изображен небольшой гироскоп с одним маховичком, подвешенный на нити. Вращающийся момент

M создается собственным весом **P** маховичка. Он и вызывает прецессию вокруг вертикальной оси. На схематическом рис. 152 тот же опыт воспроизведен в более крупном масштабе. Маховиком служит массивное велосипедное колесо с наращенной осью, приведенное в быстрое вращение. Колесо подвешивается на длинном проволочном канате за наращенный конец оси. Оси колеса придается приблизительно горизонтальное положение. Колесо прецессирует вокруг вертикальной оси под действием собственного веса. Опыт производит сильное впечатление. Уж очень неожиданным кажется движение колеса, когда оно не опускается под действием собственного веса, а непрерывно «уходит в бок».

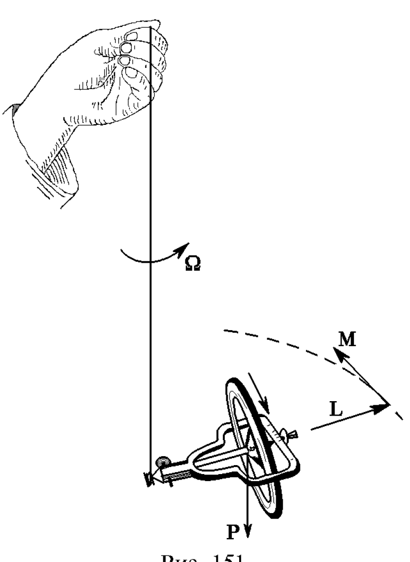


Рис. 151

4. Наконец, для наблюдения прецессии под действием собственного веса гироскопа нить также не обязательна. Можно взять симметричный гироскоп с неподвижной точкой опоры, расположенной на оси его фигуры. Точка опоры может находиться ниже центра масс (как в игрушечном волчке). Но она может находиться и выше центра масс. Тогда гироскоп называется *гироскопическим маятником*. В обоих случаях угловая скорость прецессии $\mathbf{\Omega}$ определяется формулой (50.4), в которой следует положить $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$. Для периода прецессии $T = 2\pi/\Omega$ получаем

$$T = 2\pi \frac{I_{\parallel}\omega}{amg}. \tag{50.5}$$

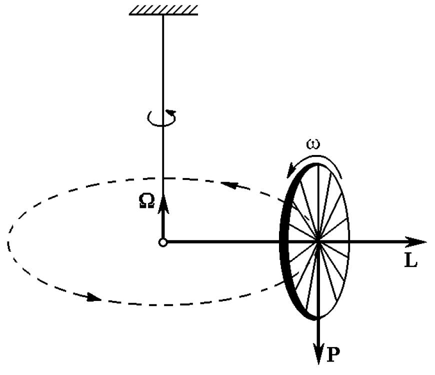


Рис. 152

В случае гироскопического маятника время T называется его *периодом*. Этому периоду можно привести в соответствие *приведенную длину* l гироскопического маятника по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{50.6}$$

Она равна

$$l = \frac{I_{\parallel}^2\omega^2}{m^2a^2g}. \qquad (50.7)$$

При больших скоростях вращения ω и малых a приведенная длина гироскопического маятника может быть сделана очень большой, а его период доведен до нескольких десятков минут. Направление оси фигуры такого гироскопического маятника очень мало подвержено влиянию кратковременных сил и толчков. Гироскопические маятники применяются на самолетах и судах для создания искусственного горизонта (см. § 52) и искусственной вертикали.

Пример. Гироскоп одного из авиагоризонтов характеризуется следующими параметрами: $m = 5\cdot 10^3$ г, $I_{\parallel} = 8\cdot 10^4$ г·см^2, $a = 0{,}25$ см. Гироскоп делает 20 000 об/мин и, следовательно, его угловая скорость $\omega = 2094$ рад/с. Подставляя эти данные в формулы (50.6) и (50.7), получим $l = 180$ км, $T = 860$ с $= 14$ мин 20 с. Угловая скорость вынужденной прецессии меньше угловой скорости вращения вокруг оси фигуры гироскопа примерно в $2{,}9\cdot 10^5$ раз.

5. Поведение гироскопа при вынужденной прецессии на первый взгляд противоречит закону сохранения энергии. Без грузика P ось фигуры гироскопа — неподвижна (см. рис. 150). Как только к гироскопу подвешивается грузик, сразу же возникает прецессионное движение. С этим движением связана дополнительная кинетическая энергия гироскопа. Откуда взялась эта энергия? Единственная сила, которая могла сообщить гироскопу эту кинетическую энергию, есть вес грузика P. Но эта сила направлена вниз, она перпендикулярна к направлению прецессионного движения и поэтому работы не производит. Детальный ответ на этот и аналогичные вопросы дает *точная теория гироскопа*, излагаемая в § 52. Здесь мы ограничимся предварительными, в основном качественными, соображениями.

6. Исследуем сначала, как возбуждается регулярная прецессия. Допустим, что гироскоп приведен во вращение вокруг оси фигуры с угловой скоростью $\omega_{\parallel}$. Пусть ось фигуры совершает дополнительное равномерное вращение с угловой скоростью Ω вокруг неподвижной оси, составляющей произвольный угол с осью фигуры (рис. 153). Выясним, при каких условиях возможно такое движение. К собственному вращению вокруг оси фигуры гироскопа с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ при рассматриваемом движении добавляется еще вращение вокруг той же оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}_{\parallel}$. Кроме того, гироскоп совершает дополнительное вращение вокруг перпендикулярной оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_{\perp} = \boldsymbol{\Omega}_{\perp}$. Поэтому его момент импульса будет $\mathbf{L} = I_{\parallel}(\boldsymbol{\omega}_{\parallel} + \boldsymbol{\Omega}_{\parallel}) + I_{\perp}\boldsymbol{\Omega}_{\perp}$. Найдем производную этого вектора по времени. Так как все три вектора $\boldsymbol{\omega}_{\parallel}$, $\boldsymbol{\Omega}_{\parallel}$ и $\boldsymbol{\Omega}_{\perp}$ равномерно вращаются с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$, то с той же угловой скоростью будет вращаться и вектор $\mathbf{L}$. Поэтому

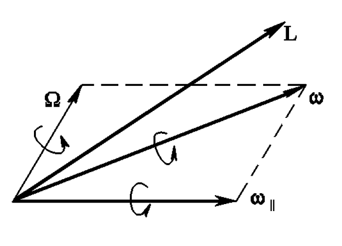


Рис. 153

его производная по времени будет $\dot{\mathbf{L}} = [\mathbf{\Omega L}]$. С другой стороны, уравнение моментов требует, чтобы $\dot{\mathbf{L}} = [\mathbf{\Omega}_{\text{прец}}\mathbf{L}]$, где $\mathbf{\Omega}_{\text{прец}}$ — угловая скорость регулярной прецессии под действием момента внешних сил $\mathbf{M} = [\mathbf{aF}]$. Она определяется уравнением (50.2). Отсюда следует, что рассматриваемое движение гироскопа возможно, т. е. совместимо с уравнениями механики, если $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_{\text{прец}}$. Приведенное рассуждение является вполне точным. Оно показывает, что *вынужденная регулярная прецессия под действием постоянной силы* **F** *является одним из возможных точных видов движения, которые может совершать гироскоп.* Однако такое движение может возникнуть только при вполне определенных начальных условиях. В начальный момент надо, очевидно, сообщить вершине гироскопа начальную скорость $\mathbf{v}_0 = [\mathbf{\Omega s}]$, т. е. привести ось фигуры гироскопа в равномерное вращение с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$. Энергия, требуемая для этого, сообщается внешним толчком, и никакого противоречия с законом сохранения не возникает. После прекращения действия толчка прецессионное движение гироскопа будет поддерживаться внешней силой **F**. *Внешняя сила*, таким образом, *не вызывает, а лишь поддерживает регулярную прецессию.*

Поведение гироскопа при вынужденной регулярной прецессии в известном смысле аналогично поведению шарика, привязанного на нити, при равномерном вращении по окружности. Сила натяжения нити тянет шарик к центру окружности, но шарик все время движется перпендикулярно к ней, непрерывно «уходит в бок». Сила натяжения нити не создает, а лишь поддерживает равномерное вращение по окружности. Для создания такого вращения шарику необходимо сообщить дополнительный толчок в боковом направлении. Сила натяжения меняет только направление, но не модуль скорости. Если иметь в виду эту аналогию, то явление «ухода вбок» оси фигуры гироскопа при вынужденной регулярной прецессии представится, быть может, не таким уж странным, каким кажется на первый взгляд.

7. Приведенное исследование, однако, не отвечает на поставленный выше вопрос, касающийся сохранения энергии. Когда, например, мы вешаем грузик (см. рис. 150), то никакого начального толчка гироскопу при этом не сообщается. А между тем гироскоп начинает прецессировать. Ответ заключается в том, что в этом случае возникающая прецессия вовсе *не является регулярной.* На прецессионное движение вершины гироскопа накладываются мелкие вращения и дрожания ее. Они называются *нутациями.* В результате наложения нутаций на прецессионное движение вершина гироскопа описывает траектории *петлеобразного, циклоидального* или *синусообразного* типа, схематически изображенные на рис. 169. Вопрос этот будет разобран в § 52. Вид траектории зависит от начальной скорости, сообщенной оси фигуры гироскопа. Крупномасштабные нутации легко демонстрируются на опыте. Повесим на один из концов оси не очень быстро вращающегося гироскопа грузик (см. рис. 150). Если грузик опустить без начального толчка, то траектория вершины будет циклоидального типа (см. рис. 169 *б*). Если же сообщить гироскопу боковой толчок против направления прецессии, вызываемой грузиком, то на траектории появятся петли (см. рис. 169 *а*). При сообщении бокового толчка в направлении прецессии траектория вершины становится синусообразной (см. рис. 169 *в*). В последнем случае при надлежащей силе толчка траектория может стать круговой, а сама прецессия — регулярной.

Когда мы вешаем грузик, то в первый момент он начинает опускаться под действием силы тяжести. Конец же вектора момента импульса **L** приобретает скорость в боковом направлении в соответствии с уравнением $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}$. В результате вектор **L** перестает быть направленным вдоль оси фигуры гироскопа. Траектория вершины при опускании начинает загибаться вбок. Это и ведет к появлению нутаций. Работа силы тяжести при опускании грузика идет на приращение кинетической энергии прецессионно-нутационного движения. Достигнув нижнего положения, грузик начинает подниматься, кинетическая энергия прецессионно-нутационного движения переходит в потенциальную энергию поднятого грузика. Таким образом, идет непрерывное превращение потенциальной энергии в кинетическую и обратно. Никакого нарушения закона сохранения энергии не получается.

Если нутации малы, то прецессия называется *псевдорегулярной*. Для быстровращающихся технических гироскопов псевдорегулярная прецессия практически не отличается от регулярной. Здесь нутации представляют собой чрезвычайно мелкое и частое дрожание оси фигуры гироскопа, не имеющее никакого значения при изучении основного прецессионного движения (см. пример в § 52, п. 8). Кроме того, мелкомасштабные нутации быстро затухают под действием сил трения, и псевдорегулярная прецессия переходит в регулярную.

8. Существованием нутации объясняется и другое поведение гироскопа, кажущееся парадоксальным. Согласно уравнению (49.3) момент импульса гироскопа **L** изменяется только тогда, когда на него действуют внешние силы. Если действие внешних сил прекращается, то мгновенно прекращается изменение вектора **L**, а с ним и прецессия гироскопа. Ось фигуры гироскопа становится неподвижной. Не противоречит ли закону инерции такая *безынерционность* оси фигуры гироскопа? Действительно, такое противоречие существовало бы, если бы указанная безынерционность относилась к движению самой оси фигуры гироскопа. На самом деле эта безынерционность относится не к оси фигуры, а к вектору **L**. К выводу о безынерционности движения оси фигуры приводит приближенная теория гироскопа, пренебрегающая нутациями. Мы видим, таким образом, что учет нутаций устраняет противоречия с законом инерции.

9. Согласно изложенному в п. 6 *вынужденная регулярная прецессия должна продолжаться неограниченно долго, если только момент внешних сил* **M**, *поддерживающих ее, остается постоянным*. Например, под действием груза P гироскоп на рис. 150 должен был бы как угодно долго совершать прецессионное вращение вокруг вертикальной оси Y. При этом груз P все время должен был бы находиться на одной и той же высоте. На самом деле груз P медленно и непрерывно опускается. Это объясняется действием *сил трения* и других *тормозящих сил*. Они создают *тормозящий вращающий момент* $\mathbf{M}_1$, направленный вниз — в отрицательную сторону оси Y. Теперь полный момент внешних сил, действующих на гироскоп, будет $\mathbf{M} + \mathbf{M}_1$. Согласно основному уравнению (49.3) производная $\dot{\mathbf{L}}$, т. е. линейная скорость вращения конца вектора **L**, направлена вдоль результирующего момента $\mathbf{M} + \mathbf{M}_1$. Она имеет вертикальную составляющую, направленную по $\mathbf{M}_1$. В результате этого конец вектора **L**, а с

ним и груз P будут опускаться. Можно сказать, что *тормозящий момент* $\mathbf{M}_1$ *вызывает дополнительную прецессию вокруг горизонтальной оси* X, *приводящую к опусканию груза* P.

Правильность такого объяснения легко подтвердить экспериментально. Будем подталкивать прецессирующий гироскоп, действуя против направления прецессионного вращения, вызванного грузом P. Груз начнет опускаться. Если, наоборот, подталкивать гироскоп в направлении прецессионного вращения, то груз начнет подниматься. В первом случае мы создаем вращательный момент $\mathbf{M}_1$, направленный вниз, во втором — вверх. Он вызывает прецессионное вращение вокруг горизонтальной оси X, опуская или поднимая груз. Таким образом, *если пытаться ускорить прецессию, то гироскоп отвечает на эту попытку поднятием груза. Если же тормозить прецессионное движение, то это ведет к опусканию груза.*

10. Интересно переформулировать полученное правило в свете общефизического *принципа Ле Шателье* (по имени французского ученого Ле Шателье (1850—1936)). Согласно этому принципу, установленному его автором в результате рассмотрения отдельных примеров, *на всякое внешнее воздействие система отвечает такими изменениями, которые стремятся ослабить это воздействие.* Когда мы подвешиваем грузик к оси фигуры вращающегося гироскопа, последний отвечает на это воздействие прецессией. Такая прецессия с точки зрения принципа Ле Шателье и должна рассматриваться как реакция гироскопа, ослабляющая внешнее воздействие, т. е. не позволяющая грузику опускаться. Ясно, что если такую реакцию усилить, т. е. вынудить гироскоп прецессировать быстрее, то этот эффект *только усилится.* Иными словами, грузик *должен подниматься.* Наоборот, искусственное замедление прецессионного вращения гироскопа эквивалентно *ослаблению реакции его на воздействие грузика.* В результате такого замедления грузик *должен опускаться.* Изложенная точка зрения оказывается полезной, например, при рассмотрении различного рода стабилизирующих гироскопических приборов, когда надо быстро получить ответ на вопрос, как надо воздействовать на гироскоп, чтобы усилить его стабилизирующее действие.

11. В свете изложенного становится ясным и поведение гироскопа с *двумя степенями свободы.* Для того чтобы свободный гироскоп обладал устойчивостью, а гироскоп под действием внешних сил мог совершать вынужденную прецессию в том виде, как она описана выше, необходимо, чтобы он обладал *тремя степенями свободы*, т. е. мог свободно вращаться вокруг всех трех осей, проходящих через точку опоры O. Одной из таких осей является ось фигуры гироскопа. Вращение вокруг такой оси должно быть возможно во всех случаях. Иначе ни о каких гироскопических эффектах говорить не приходится. Закрепим гироскоп так, чтобы вращение вокруг одной из остальных двух осей сделалось невозможным. Тогда гироскоп становится системой с двумя степенями свободы. Пусть, например,

уравновешенный гироскоп закреплен винтами так, что вращение вокруг вертикальной оси OY происходить не может (см. рис. 150). Если повесить грузик P, то гироскоп начнет вращаться вокруг горизонтальной оси OX как обычное твердое тело, а грузик P — опускается в направлении действия силы веса $\mathbf{F}$. Это радикальное изменение поведения гироскопа так же объясняется обычным правилом прецессии. Сила $\mathbf{F}$ создает момент $\mathbf{M}$, стремящийся вызвать прецессию гироскопа вокруг вертикальной оси OY. Так как гироскоп закреплен, то эта прецессия развиться не может. Она вызовет лишь деформацию кручения вертикальной оси. Со стороны подшипников на эту закрученную ось начнет действовать вращающийся момент, направленный вниз. Этот момент вызовет прецессию гироскопа — его вращение вокруг горизонтальной оси OX. Такому вращению ничто не препятствует. Поэтому указанная прецессия будет действительно происходить. В результате груз P начнет опускаться, что и наблюдается на опыте. Можно сказать, что закрученная ось тормозит прецессию, которая возникла бы под действием груза P, а такое торможение вызывает опускание груза.

Если, не вешая груза, толкнуть один из концов оси фигуры гироскопа вверх или вниз, то он будет продолжать по инерции вращаться в направлении сообщенного толчка вокруг горизонтальной оси OX. Дело опять в том, что во время действия толчка гироскоп стремится прецессировать вокруг вертикальной оси OY. Это приводит к деформации кручения вертикальной оси. Крутящий момент, действуя на гироскоп, будет поднимать или опускать его вершину, т. е. вызовет прецессионное вращение гироскопа вокруг оси OX в направлении сообщенного толчка. Пока происходит такое вращение, вертикальная ось продолжает оставаться деформированной (закрученной).

Таким же путем легко исследовать, как будет вести себя гироскоп, лишенный возможности вращаться вокруг горизонтальной оси OX. Рекомендуем читателю разобраться в этом вопросе.

12. Обычно у волчка центр масс располагается выше точки опоры. Чтобы такой волчок не упал, ему надо сообщить достаточно быстрое вращение вокруг оси фигуры. При медленном вращении вертикальное положение оси фигуры становится неустойчивым, и волчок падает. Если волчок запустить наклонно, то его центр масс начинает подниматься, и волчок принимает вертикальное положение. Причиной этого являются силы трения, действующие в точке опоры.

Посмотрим сначала, как двигался бы волчок, если бы трения не было. Пусть плоскость опоры горизонтальна и абсолютно гладкая. На волчок действуют две силы: сила веса $\mathbf{P}$ и сила нормального давления $\mathbf{F}$ со стороны плоскости опоры (рис. 154 *а*). Момент этих сил направлен горизонтально за плоскость рисунка. Этот момент вызовет прецессию волчка вокруг вертикальной оси. Для рассмотрения этой прецессии воспользуемся уравнением моментов относительно центра масс C. Оно имеет обычный вид (49.3). Пусть прецессия регулярна. Тогда центр масс будет оставаться неподвижным, а потому $\mathbf{F}+\mathbf{P}=0$ в силу теоремы о движении центра масс. Момент

силы нормального давления **F** заставит вершину волчка уходить за плоскость рисунка. Волчок будет прецессировать в том же направлении, в каком происходит его вращение вокруг оси фигуры. А так как центр масс C остается неподвижным, то точка опоры O будет описывать окружность в направлении, обозначенном стрелками.

Учтем теперь силы трения скольжения, возникающие при движении точки опоры по указанной окружности. Существенно, что результирующая этих

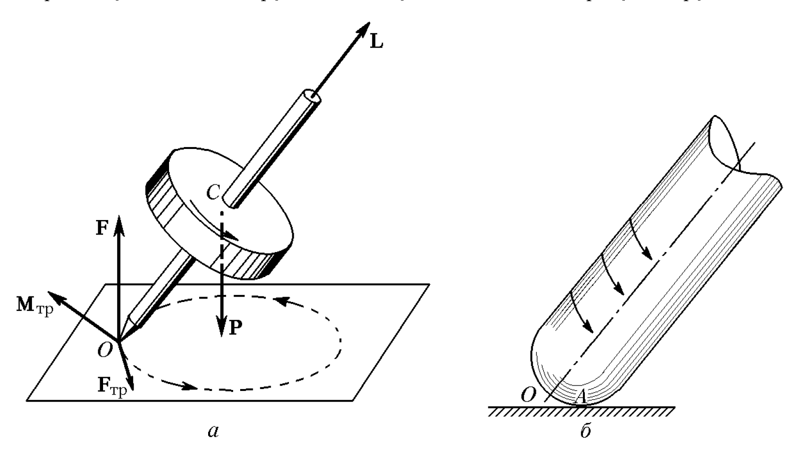


Рис. 154

сил $\mathbf{F}_{тр}$ направлена в ту же сторону, куда движется точка опоры волчка. Это станет ясно, если учесть, что конец ножки волчка, которым он опирается на плоскость опоры, не идеально острый, а закруглен. На рис. 154 *б* такой конец изображен в увеличенном масштабе. Если закрутить волчок вокруг оси фигуры, а затем поставить его на плоскость опоры, то в точке касания A возникнет скольжение. Ясно, что сила трения скольжения, действующая на ножку волчка, будет направлена против ее вращения, т. е. в ту же сторону, что и перемещение при прецессии точки опоры волчка. Заметим, что отмеченная особенность силы трения совершенно не зависит от того, как расположен центр масс относительно точки опоры. Сила трения скольжения $\mathbf{F}_{тр}$ всегда действует в направлении прецессии, вызванной весом волчка и давлением опоры, она стремится ускорить эту прецессию. Согласно общему правилу это должно привести к поднятию центра массы волчка. Если центр масс расположен выше точки опоры, то при таком поднятии ось фигуры волчка будет приближаться к вертикали.

Конечно, можно рассуждать и более детально. Предположим опять, что центр масс расположен выше точки опоры. Момент сил трения $\mathbf{F}_{тр}$ имеет вертикальную составляющую, направленную вверх. Он стремится вызвать прецессию вектора **L**, в результате которой вершина волчка должна подниматься. При неподвижности центра масс C такой подъем вызвал бы опускание точки опоры O. Но такому опусканию препятствует плоскость опоры, и оно происходить не может. Стремление к опусканию точки опоры проявится в возрастании силы нормального давления **F**. Последняя начнет превосходит силу веса **P**. Результирующая этих двух сил становится отличной от нуля.

Она направлена вверх и приводит к поднятию центра масс C, т. е. к выпрямлению оси волчка.

Сила трения $\mathbf{F}_{тр}$, действующая в точке опоры волчка, проявляется и в других явлениях. Она не только замедляет осевое вращение волчка, но и заставляет двигаться его центр масс. Волчок начинает «бегать» по плоскости опоры. Если бы не было других тормозящих сил (например, сопротивления воздуха и пр.), то такое движение непрерывно ускорялось бы. (Это лишний раз подтверждает, что направление силы $\mathbf{F}_{тр}$ совпадает с направлением движения волчка.) При этом скольжение постоянно уменьшается, и движение волчка в конце концов переходит в чистое качение. К этому моменту осевое вращение волчка обычно замедляется настолько сильно, что он теряет устойчивость и падает под действием силы тяжести.

13. Поднятие оси волчка можно объяснить и с помощью уравнения моментов относительно точки опоры O. Надо только принять во внимание, что точка опоры движется ускоренно, и брать уравнение моментов в виде (49.8). Короче говоря, надо учесть действие «сил инерции» (см. § 63 и 64), возникающих из-за ускоренного движения точки опоры. В разбираемом нами вопросе играет роль сила инерции, обусловленная касательным ускорением. Эта «сила» приложена к центру масс C и направлена противоположно касательному ускорению, т. е. на рис. 154 *а* — от читателя. Ее момент относительно точки опоры O имеет вертикальную составляющую, направленную вверх. Этот момент вызывает прецессию, в результате которой вершина волчка поднимается.

14. Случай, когда центр масс лежит ниже точки опоры, рассматривается совершенно аналогично. Силы трения скольжения, возникающие в точке опоры, и в этом случае приводят к поднятию центра масс. Однако здесь оно сопровождается опусканием вершины волчка. Волчок, запущенный наклонно, наклоняется еще больше.

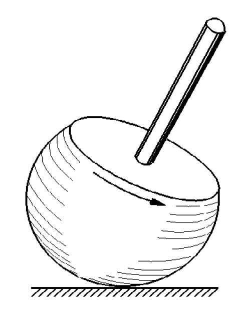


Рис. 155

15. Любопытным примером может служить *китайский волчок*, который имеет форму гриба (рис. 155). Из-за действия сил трения центр масс волчка непрерывно поднимается, а ось фигуры все более и более наклоняется. В конце концов это приводит к *опрокидыванию* волчка. Волчок становится на ножку. Ось фигуры все более и более приближается к вертикальному положению, если только волчок не потеряет устойчивость из-за замедления осевого вращения.

16. Для того чтобы повернуть ось фигуры гироскопа, к нему надо приложить силы, момент которых $\mathbf{M}$ определяется уравнением (50.2), в котором под $\mathbf{\Omega}$ следует понимать угловую скорость вынужденного вращения. Такие силы создаются, например, давлением подшипников на ось фигуры гироскопа. Ось фигуры гироскопа действует на подшипники с равными и противоположно направленными силами противодавления. Эти силы противодавления и создаваемые ими вращающие моменты называются *гироскопическими**). Гироскопические силы легко почувствовать, если взять за ось быстро вращающееся велосипедное колесо и попытаться повернуть эту ось. Колесо будет стремиться «вырваться из рук» в перпендикулярном

*) Термин «гироскопические силы» употребляется здесь в ином смысле, чем в § 24.

направлении. При быстром повороте требуется значительное усилие, чтобы удержать ось в руках.

В опыте со скамьей Жуковского (§ 34, п. 7) демонстратор, поворачивающий ось велосипедного колеса, испытывает с его стороны гироскопические силы. Момент этих сил направлен вертикально. Они и приводят во вращение скамью или изменяют ее угловую скорость. Гироскопические силы действуют на подшипники вала турбины корабля или винта самолета, когда при маневрах корабля и самолета направления их движения изменяются быстро. Они вызывают «рыскание по курсу». Для крупных судов это явление незаметно, оно наблюдается у мелких судов и самолетов.

17. Поднесем к оси гироскопа, изображенного на рис. 148, горизонтальный стержень. (Ось фигуры гироскопа изображена на рис. 156*а*. Сечение стержня плоскостью рисунка изображено заштрихованным кружком. Предполагается, что стержень перпендикулярен к плоскости рисунка.) Возникает сила трения скольжения $\mathbf{F}_{тр}$, параллельная стержню и, следовательно, перпендикулярная к плоскости рисунка. Она изображена штриховой стрелкой. Момент этой силы относительно точки опоры $\mathbf{M}_{тр} = [\mathbf{r}\,\mathbf{F}_{тр}]$ лежит в плоскости рисунка и направлен перпендикулярно к стержню и радиусу-вектору $\mathbf{r}$. Он будет стремится вызвать прецессию оси гироскопа в том же направлении. Но эта прецессия возникнуть не может, так как ей препятствует стержень. Она проявится только в том, что ось гироскопа будет прижиматься к стержню. В результате возникает сила давления $\mathbf{F}_{дав}$, действующая со стороны стержня на ось гироскопа. Действие этой силы проявится, во-первых, в увеличении силы $\mathbf{F}_{тр}$. Во-вторых, она вызовет прецессию оси фигуры гироскопа, заставляя эту ось перемещаться вдоль стержня в ту же сторону, куда направлена сила $\mathbf{F}_{тр}$, так как момент силы давления $\mathbf{M}_{дав} = [\mathbf{r}\,\mathbf{F}_{дав}]$ направлен в ту же сторону. Возрастание силы $\mathbf{F}_{тр}$, в свою очередь приведет к возрастанию силы $\mathbf{F}_{дав}$ и к ускорению прецессионного перемещения оси фигуры гироскопа вдоль стержня. Это ускорение прекратится, когда движение оси фигуры со скольжением перейдет в чистое качение. (В описываемом нами опыте для этого может не хватить времени из-за изменения наклона оси фигуры гироскопа при движении.) Начиная с этого момента сила $\mathbf{F}_{тр}$ практически обратится в нуль, сила $\mathbf{F}_{дав}$ станет постоянной, а прецессионное движение оси фигуры гироскопа вдоль стержня — равномерным.

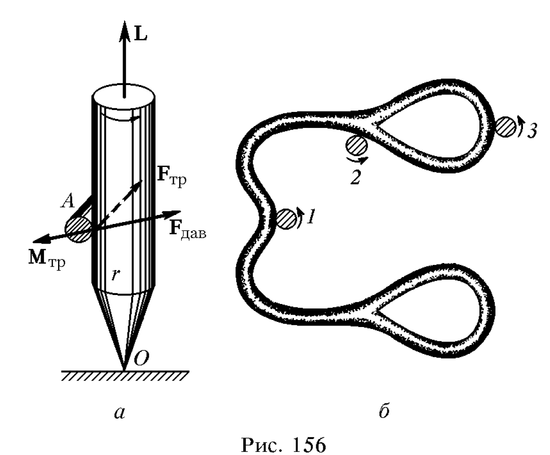


Рис. 156

Вместо стержня можно взять какой-либо замкнутый или незамкнутый контур произвольной формы из толстой проволоки. Для демонстрационных

опытов может служить контур, изображенный на рис. 156 *б*. Контур закрепляется на штативе в горизонтальном положении вблизи оси фигуры гироскопа. Если ось фигуры верхним концом привести в соприкосновение с контуром, то она начинает «бегать» по этому контуру, переходя последовательно из положения *1* в положение *2*, *3* и т. д. При этом ось фигуры гироскопа сильно прижимается к контуру. Это очень красивый демонстрационный опыт. Описанное явление называется *периметрическим движением* гироскопа.

ЗАДАЧИ

1. Герой романа Жюля Верна «Вверх дном» предлагал повернуть земную ось, выпустив с Земли тяжелый снаряд. Оценить, с какой минимальной скоростью v нужно выпустить на полюсе Земли снаряд массой $m = 1000$ т, чтобы повернуть в пространстве мгновенную ось вращения Земли на угол $\alpha = 1°$. Масса Земли $M = 6 \cdot 10^{21}$ т. Длина градуса земного меридиана $l = 111$ км. Землю считать однородным твердым шаром (см. задачи 23 и 24 к § 37).

Решение. Максимальный поворот получится, когда скорость снаряда v перпендикулярна к земной оси. Снаряд уносит момент импульса $\mathbf{L} = \frac{m[\mathbf{rv}]}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, перпендикулярный к скорости $\mathbf{v}$. Земля получает такой же момент в обратном направлении. При этом вектор угловой скорости вращения Земли $\boldsymbol{\omega}$ отклоняется вбок на угол $\alpha = L/I\omega$. Подставив сюда $I = {}^2\!/_5\, Mr^2$ и учтя, что разность $c - v$ очень мала, получим

$$\frac{c-v}{c} \approx \frac{25\, m^2c^2}{8M^2l^2\omega^2} \approx 1{,}3 \cdot 10^{-24}.$$

2. Симметричный волчок, ось фигуры которого наклонена под углом α к вертикали (см. рис. 154), совершает регулярную прецессию под действием силы тяжести. Точка опоры волчка O неподвижна. Определить, под каким углом β к вертикали направлена сила, с которой волчок действует на плоскость опоры.

Ответ. $\operatorname{tg}\beta = \frac{a^3m^2g\sin\alpha}{I^2\omega^2}$.

3. Гироскопический маятник, используемый в качестве авиагоризонта характеризуется параметрами, приведенными в п. 4 этого параграфа. Когда самолет двигался равномерно, ось фигуры маятника была вертикальна. Затем в течение времени $\tau = 10$ с самолет двигался с горизонтальным ускорением $\dot{v}_0 = 1$ м/с^2. Определить угол α, на который отклонится от вертикали ось фигуры гироскопического маятника за время ускорения.

Ответ. $\alpha \approx \frac{ma\dot{v}_0\tau}{I_{\parallel}\omega} \approx 0{,}43° \approx 25'$.

4. Однородный гладкий сплошной шар, находящийся на горизонтальном столе, быстро вертится вокруг своего вертикального диаметра с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0$ (рис. 157). В него ударяется второй, в точности такой же шар. Происходит абсолютно упругий удар без передачи вращения. Ударяемый шар начинает двигаться по столу со скольжением. Коэффициент трения скольжения k считается не зависящим от скорости. Найти угол α между мгновенной осью вращения ударяемого шара и вертикальной линией для

любого момента времени t, когда еще не прекратилось скольжение. Найти также значение этого угла в момент, когда движение переходит в чистое качение. Трением верчения и трением качения пренебречь.

Решение. После удара центр ударяемого шара начнет двигаться с начальной скоростью v_0. По теореме о движении центра масс его скорость в момент времени t будет $v = v_0 - kgt$. Пусть $\boldsymbol{\omega}$ — мгновенное значение вектора угловой скорости. Момент силы трения относительно центра шара будет $kmgr\mathbf{i}$, где $\mathbf{i}$ — единичный вектор, направленный за плоскость рисунка и перпендикулярный к ней.

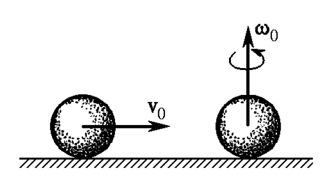


Рис. 157

Из уравнения моментов $I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = kmgr\mathbf{i}$ получаем $\frac{2}{5} r \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = kg\mathbf{i}$. Отсюда $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + 5kgt\mathbf{i}/2r$. Мгновенная ось вращения всегда лежит в плоскости, перпендикулярной к плоскости рисунка. Угол α определяется уравнением $\operatorname{tg} \alpha = 5kgt/(2r\omega_0)$. Определим теперь момент времени начала чистого качения. Скорость поступательного движения шара зависит только от горизонтальной составляющей вектора $\boldsymbol{\omega}$. Момент времени начала чистого качения найдется из условий $^5\!/_2\, kgt = v_0 - kgt$. С этого момента угол α становится и продолжает оставаться постоянным, причем $\operatorname{tg} \alpha = {}^5\!/_7\, v_0/r\omega_0$. Если $v_0 = \omega_0 r$, то $\operatorname{tg} \alpha = 5/7$, $\alpha = 35°32'$. Вращение шара вокруг фиксированного диаметра неустойчиво. Поэтому найденное решение определяет поворот оси вращения относительно *внешнего пространства*, а не внутри самого шара.

5. Гироскоп, изображенный на рис. 148, совершает установившееся параметрическое движение по круглому металлическому кольцу радиусом R, плоскость которого горизонтальна. Радиус стержня гироскопа r мал по сравнению с R $(r \ll R)$. Ось гироскопа наклонена к вертикали под углом α. (В рассматриваемом случае она движется по поверхности кругового конуса с вершиной в точке опоры O.) Найти силу $\mathbf{F}_{\text{дав}}$, с которой стержень гироскопа давит на металлическое кольцо.

Решение. В установившемся режиме периметрическое движение оси фигуры гироскопа есть чистое качение. Если $r \ll R$, то угловая скорость прецессии найдется из условия $\Omega R = \omega r$. Пользуясь этим, легко найти искомую силу:

$$F_{\text{дав}} = \frac{I_{\parallel}\omega^2 r}{R^2} \sin^2 \alpha.$$

Пусть $\omega = 100$ об/с $= 628$ рад/с, $I_{\parallel} = 2 \cdot 10^4$ г·см^2, $r = 0{,}5$ см, $R = 8$ см, $\alpha = 20°$. Тогда $F_{\text{дав}} \approx 70$ Н.

6. Гироскопические эффекты используются в дисковых мельницах. Массивный цилиндрический каток (бегун), могущий вращаться вокруг своей геометрической оси, приводится во вращение вокруг вертикальной оси (с угловой скоростью Ω) и катится по горизонтальной опорной плите (рис. 158). Такое вращение можно рассматривать как вынужденную прецессию гироскопа, каковым является бегун. При вынужденной прецессии возрастает сила давления на горизонтальную плиту, по которой он катится. Эта сила растирает и измельчает материал, подсыпаемый под каток на плиту. Вычислить полную силу давления катка на опорную плиту.

Ответ. $F_{\text{дав}} = P + I_{\|}\Omega^2/r = P + {}^1\!/\!_2\, m\Omega^2 r$, где P — вес бегуна, m — его масса, r — радиус. Пусть $r = 50$ см. Тогда при рабочей скорости 1 об/с и, следовательно, $\Omega = 2\pi$ рад/с получаем ${}^1\!/\!_2\, m\Omega^2 r \approx mg = P$. Следовательно, $F_{\text{дав}} \approx 2\,P$. Обратить внимание, что полный момент импульса L не направлен вдоль оси фигуры бегуна, так как имеется еще момент, возникающий из-за вращения вокруг вертикальной оси. Однако последний момент остается неизменным при вращении катка, а потому при решении задачи его можно не принимать во внимание.

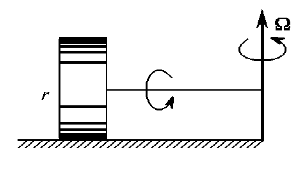


Рис. 158

7. Диск радиуса r, вращающийся вокруг собственной оси с угловой скоростью ω, катится без скольжения в наклонном положении по горизонтальной плоскости, описывая окружность за время T. Определить T и радиус окружности R, если $R \gg r$, а угол между горизонтальной плоскостью и плоскостью диска равен α.

Ответ. $T = \frac{3\pi\omega r}{g}\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $R = \frac{3}{2}\frac{\omega^2 r^2}{g}\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

§ 51. ПРИМЕНЕНИЯ ГИРОСКОПОВ

1. Научно-технические применения гироскопов весьма разнообразны. В курсе физики о них можно дать лишь общее представление. Рассмотрим принцип действия некоторых *гироскопических приборов*, совершенно отвлекаясь от деталей конструктивного или технического характера. Будем предполагать, что все приборы и условия, в которых они работают, являются *идеальными*. Так, будем считать, что сил трения и прочих вредных сил нет, что моменты инерции и моменты импульса кардановых колец пренебрежимо малы и т. д. В действительности все эти факторы оказывают существенное, иногда решающее, влияние на поведение реального гироскопа. Однако мы ограничиваем свою задачу выяснением лишь основных идей и принципов, на которых основано действие гироскопических приборов.

2. Начнем с *уравновешенного* (*астатического*) гироскопа с тремя степенями свободы. Пусть он быстро вращается вокруг своей оси фигуры. На направление оси фигуры гироскопа не оказывают влияния сила тяжести, вращение Земли, а также любые ускоренные движения точки опоры. В отсутствие сил, создающих вращающие моменты относительно точки опоры, ось фигуры уравновешенного гироскопа сохраняла бы неизменное направление относительно звезд. Если ось фигуры гироскопа направить на какую-либо звезду, то при перемещении последней по небесному своду она будет поворачиваться относительно Земли, оставаясь все время направленной на ту же звезду. Такой гироскоп позволяет обнаружить суточное вращение Земли, что и было впервые качественно продемонстрировано французским физиком Леоном Фуко (1819—1868). Трудности подобных опытов очень велики. Они связаны с тем, что невозможно полностью освободиться от неизбежного трения в подшипниках карданова подвеса и других вредных сил, создающих вращающие моменты относительно центра подвеса.

3. Свойство уравновешенного гироскопа сохранять неизменным направление оси своей фигуры используется для автоматического управления дви-

жением самодвижущихся мин (торпед), самолетов, судов, ракет и прочих аппаратов. Момент импульса гироскопа $\mathbf{L} = I_{\|}\boldsymbol{\omega}$ должен быть достаточно большим, чтобы уменьшить влияние трения в подшипниках карданова подвеса и прочих вредных сил. Ось фигуры вращающегося гироскопа задает курс движения аппарата. При всяком отклонении аппарата от курса (например, вследствие удара волн или действия порывов ветра) направление оси фигуры гироскопа в пространстве сохраняется. Значит, ось фигуры гироскопа вместе с рамами карданова подвеса поворачивается относительно движущегося аппарата. Поворот рам карданова подвеса с помощью тех или иных приспособлений включает двигатели, приводящие в действие *рули управления*. Последние и возвращают движение аппарата к заданному курсу. В случае торпеды, поскольку ее движение совершается в горизонтальной плоскости (по поверхности моря), достаточно одного гироскопа с осью фигуры, ориентированной в направлении движения. В случае самолета требуется два гироскопа. Один, с вертикальной осью, задает горизонтальную плоскость, в которой должен оставаться самолет. Другой, с горизонтальной осью, ориентированной вдоль оси самолета, задает его курс. Такими «*автопилотами*», освобождающими летчика от необходимости непрерывного управления самолетом, оборудованы почти все современные самолеты, предназначенные для длительных полетов.

4. Важным применением неуравновешенного гироскопа с тремя степенями свободы является создание *искусственных горизонта* и *вертикали*. Это необходимо в навигации в условиях отсутствия видимости линии горизонта. Направление вертикали в каждом месте земного шара можно просто определить с помощью обыкновенного маятника, применяемого в качестве отвеса. Однако такой способ не годится на корабле или самолете ввиду неизбежных ускорений, которые они получают при наборе скорости, поворотах, качке и пр. В этом случае вместо обыкновенного маятника используется *гироскопический маятник* (*гирогоризонт*) с очень большой приведенной длиной (см. § 50, п. 4). При отсутствии ускорения ось гироскопического маятника устанавливается вертикально. Если аппарат движется ускоренно, то появляется прецессия, уводящая ось маятника от вертикального положения. Однако если период прецессии T очень велик, а время ускорения мало по сравнению с T, то за это время прецессия, ввиду ее медленности, не успеет заметно отклонить ось гиромаятника от вертикали (см. задачу 3 к § 50). Эти условия соблюдаются, например, при поворотах движущегося аппарата. Время поворота всегда мало по сравнению с периодом T. Еще меньше чувствителен гиромаятник к качке корабля. Период качки всегда много меньше периода прецессии T, а главное, при качке ускорение за время T многократно и периодически меняет знак. Качка приводит лишь к малозаметным колебаниям оси гироскопического маятника около вертикального положения. Наиболее неблагоприятно на направление оси гиромаятника влияют увеличение и уменьшение скорости, которые могут длиться значительное время и вызывать хотя и не очень большие, но все же заметные отклонения оси фигуры гироскопа.

5. Важнейшим применением гироскопа является *гироскопический компас*, получивший широкое распространение на кораблях. Обычный магнитный компас подвержен действию разнообразных возмущений земного магнитного поля (магнитных бурь). На его показания влияют возмущения магнитного поля, вызываемые большими массами железа на корабле, а также

различные электродинамические воздействия со стороны сложного электротехнического оборудования корабля. В этих условиях использование магнитного компаса на корабле и становится практически невозможным. Гироскопический компас свободен от этих недостатков.

Идея гироскопического компаса впервые была высказана Фуко в 1852 г. Он предложил для этой цели использовать гироскоп с *двумя степенями свободы* в кардановом подвесе. Чтобы лучше уяснить идею гироскопического компаса, а также некоторых других гироскопических приборов, поставим вопрос шире и исследуем, как ведет себя гироскоп, закрепленный на вращающемся основании.

6. Закрепим неподвижно наружное кольцо карданова подвеса (см. рис 144). Гироскоп будет лишен той устойчивости, какая была свойственна ему, когда он обладал тремя степенями свободы. Причина этого, как было выяснено в предыдущем параграфе, заключается в том, что закрепление наружного кольца лишает гироскоп возможности совершать прецессию вокруг горизонтальной оси. Утраченную степень свободы можно, однако, в известной степени восстановить, если закрепить наружное карданово кольцо на основании, которое может свободно вращаться вокруг вертикальной оси. Такое закрепление просто эквивалентно увеличению момента инерции наружного кольца. Подвесим к оси гироскопа грузик. Он вызовет прецессионное вращение вокруг вертикальной оси. Это вращение передастся основанию, на котором закреплено карданово кольцо. Благодаря наличию у основания собственного момента инерции угловая скорость вращения его Ω будет меньше угловой скорости Ω_0, с которой прецессировал бы гироскоп, если бы он не был закреплен. Наличие основания, таким образом, ведет к торможению прецессии, вызванной грузиком. По этой причине грузик будет опускаться (см. § 50, пп. 9 и 10). Если, воздействуя на основание, увеличить угловую скорость его вращения, чтобы она сделалась равной Ω_0, то при прецессии грузик будет оставаться на постоянной высоте. Если же основание вращать со скоростью, большей Ω_0, то грузик начнет подниматься, пока ось фигуры гироскопа не примет вертикальное положение, причем положительный конец ее будет обращен вверх. При вращении со скоростью $\Omega < \Omega_0$ или в противоположном направлении ось фигуры установится также вертикально, но положительный конец ее будет обращен вниз.

Описанное поведение гироскопа объясняется тем, что гироскоп вместе с основанием вынужден вращаться вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω, отличной от скорости Ω_0, с которой он прецессировал бы только под действием веса грузика. Благодаря этому возникает деформация кручения вертикальной оси $D'D$ (см. рис. 144). Деформация кручения создает вращающийся момент $\mathbf{M}$, параллельный той же оси. Под действием этого момента возникает прецессионное вращение вокруг горизонтальной оси $B'B$, в результате которого ось гироскопа устанавливается вертикально в том или ином направлении, в зависимости от того, с какой скоростью и в какую сторону вращается основание. Такая ориентация оси фигуры гироскопа будет наблюдаться и в предельном случае, когда масса грузика равна нулю, т. е. когда грузика нет и $\Omega_0 = 0$. Легко сообразить, что в этом случае *ось фигуры гироскопа устанавливается параллельно оси вращения основания и притом так, что оба вращения совершаются в одинаковых направлениях* (правило Фуко). Про такие оси говорят, что они *одноименно параллельны.*

Все это легко демонстрировать с помощью небольшого гироскопа в кардановом подвесе. Для большей наглядности мы заменили на рис. 159 круглые кольца прямоугольными рамками. Раскрутив гироскоп вокруг оси фигуры, возьмемся руками за нижнюю рамку и будем медленно поворачивать ее вокруг вертикальной оси. Ось гироскопа примет вертикальное положение и притом такое, что оба вращения — вращение рамки и вращение гироскопа вокруг собственной оси — будут происходить в одну и ту же сторону. Если начать вращать рамку в противоположном направлении, то произойдет «опрокидывание» гироскопа, т. е. поворот оси его фигуры вокруг горизонтальной оси $A'A$ на 180°. В результате оба вращения будут снова совершаться в одном направлении. И такое опрокидывание гироскопа будет наблюдаться всякий раз, когда мы меняем направление вращения наружной рамки. Во время опрокидывания гироскопа демонстратор испытывает заметное воздействие гироскопических сил, стремящихся повернуть его вокруг горизонтальной оси, перпендикулярно к плоскости наружной рамки.

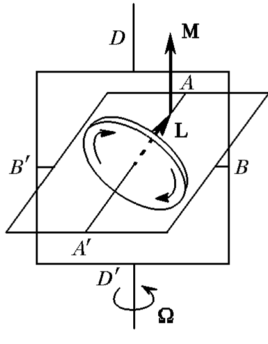


Рис. 159

В другой демонстрации уравновешенный гироскоп с двумя степенями свободы ставят на горизонтальный диск, который может вращаться вокруг вертикальной оси (рис. 160). При вращении диска ось гироскопа становится вертикально. При изменении направления на противоположное гироскоп опрокидывается.

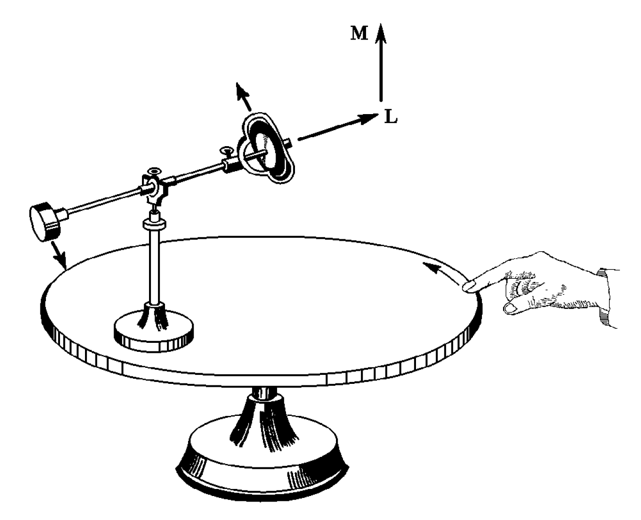


Рис. 160

7. Рассмотрим теперь идею гироскопического компаса, предложенную Фуко. Пусть наружное кольцо в кардановом подвесе гироскопа может свободно вращаться вокруг вертикальной оси $D'D$ (см. рис. 159). Внутреннее

кольцо жестко закреплено в наружном под прямым углом. При этих условиях ось фигуры гироскопа $A'A$ вынуждена оставаться в горизонтальной плоскости, совпадающей с плоскостью внутреннего кольца. Она может свободно вращаться в этой плоскости вокруг вертикальной оси $D'D$. Гироскоп ставится на горизонтальную подставку. Последняя, конечно, участвует в суточном вращении Земли. Пусть $\mathbf{\Omega}$ — угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси. Разложим вектор $\mathbf{\Omega}$ на вертикальную $\mathbf{\Omega}_в$ и горизонтальную $\mathbf{\Omega}_г$ составляющие. Вертикальная составляющая не влияет на поведение гироскопа, так как вокруг вертикальной оси он может вращаться совершенно свободно. Поэтому от наличия $\Omega_в$ можно отвлечься. Горизонтальная составляющая $\Omega_г$ лежит в плоскости меридиана, т. е. направлена вдоль *полуденной линии*. Таким образом, на поведение гироскопа сказывается вращение Земли лишь вокруг полуденной линии рассматриваемого места. Пусть плоскость рис. 161 совпадает с горизонтальной плоскостью. Разложим вектор $\Omega_г$ на составляющую вдоль оси фигуры гироскопа Ω_1 и составляющую Ω_2, к ней перпендикулярную. Первая составляющая на движение гироскопа не влияет, так как вращению вокруг его оси фигуры ничто не препятствует. Остается единственная составляющая $\mathbf{\Omega}_2$, изменение которой обусловливается вращением Земли. Гироскоп не может вращаться вокруг оси $\mathbf{\Omega}_2$, так как его ось фигуры вынуждена оставаться в горизонтальной плоскости (в плоскости рисунка). Но он может свободно вращаться вокруг своей оси фигуры и вокруг вертикальной оси, т. е. оси, перпендикулярной к плоскости рисунка. Тем самым рассматриваемый случай сведен к случаю, подробно разработанному в п. 6, причем роль вертикали играет направление вектора $\mathbf{\Omega}_2$. Поэтому ось фигуры гироскопа должна поворачиваться в плоскости рисунка в направлении к полуденной линии, стремясь стать одноименно параллельной оси вектора $\mathbf{\Omega}_2$. Однако при таком вращении длина составляющей $\mathbf{\Omega}_2$ уменьшается, а составляющей $\mathbf{\Omega}_1$ — увеличивается. Когда ось фигуры гироскопа установится параллельно полуденной линии, $\mathbf{\Omega}_2$ обратится в нуль. В этом положении поворот оси фигуры гироскопа, обусловленный вращением Земли, прекратится. При этом, в соответствии с правилом Фуко, собственное вращение гироскопа и вращение Земли вокруг полуденной линии будут происходить в одинаковых направлениях.

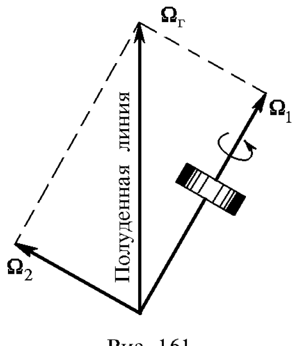


Рис. 161

Идею гирокомпаса Фуко можно уяснить и иначе. Вращение Земли стремится вызвать поворот оси фигуры гироскопа вокруг направления вектора $\mathbf{\Omega}_2$. Но такой поворот невозможен, поскольку он выводил бы ось фигуры гироскопа из плоскости рисунка, в которой она вынуждена находиться. Он проявляется лишь в деформациях и в появлении вследствие этого вращающегося момента $\mathbf{M}$, параллельного вектору $\mathbf{\Omega}_2$. Этот вращающийся момент передается гироскопу и вызывает прецессию вокруг вертикали, в результате которой ось фигуры гироскопа поворачивается к полуденной линии, стремясь стать одноименно параллельной ей.

8. Фуко указал также, что гироскоп с двумя степенями свободы может быть использован в качестве *инклинометра*, т. е. прибора для определения географической широты места. Закрепим неподвижно наружное кольцо карданова подвеса гироскопа так, чтобы его плоскость совпала с плоскостью географического меридиана. У гироскопа останутся две степени свободы. Он может вращаться вокруг оси своей фигуры и (вместе с внутренним кольцом) вокруг горизонтальной оси $B'B$, перпендикулярной к плоскости меридиана. Пусть плоскость рис. 162 совпадает с плоскостью географического меридиана. Ось фигуры гироскопа может вращаться только в плоскости рисунка вокруг горизонтальной оси $B'B$, перпендикулярной к этой плоскости. Из плоскости рисунка она выходить не может. Разложим угловую скорость осевого вращения Земли $\mathbf{\Omega}$ на составляющую $\mathbf{\Omega}_1$ вдоль оси фигуры гироскопа и составляющую $\mathbf{\Omega}_2$, к ней перпендикулярную. Первая составляющая роли не играет. Существенно только вращение вокруг оси вектора $\mathbf{\Omega}_2$. Мы пришли к той же ситуации, что и в предыдущем пункте при разборе гирокомпаса Фуко. Повторив приведенные там рассуждения, видим, что ось фигуры гироскопа будет поворачиваться по направлению к *оси мира* (т. е. к оси собственного вращения Земли). Этот поворот будет сопровождаться уменьшением длины вектора $\mathbf{\Omega}_2$. Когда ось фигуры гироскопа станет одноименно параллельной оси мира, вектор $\mathbf{\Omega}_2$ обратится в нуль, и дальнейший поворот гироскопа, вызванный осевым вращением Земли, прекратится. Таким образом, ось фигуры гироскопа устанавливается одноименно параллельно с осью мира. Угол между этим направлением и горизонтальной плоскостью и есть географическая широта рассматриваемого места.

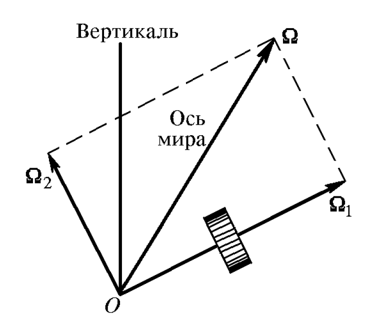


Рис. 162

9. Гирокомпас и гироинклинометр Фуко не получили практического применения. Они лишь теоретически решают поставленные перед нами задачи. Благодаря медленности вращения Земли силы, воздействующие на гироскоп из-за такого вращения, ничтожны и не в состоянии преодолеть (или способны преодолеть с трудом) трение в подшипниках этих приборов. Кроме того, такие приборы в принципе могли бы быть использованы только тогда, когда они установлены на неподвижном (относительно Земли) основании. Они не годятся на самолетах и судах, так как при движении последних развиваются угловые скорости вращения, а также ускорения, во много раз превосходящие соответствующие величины при суточном вращении земного шара.

Задача создания гирокомпаса была поставлена на практическую основу только после того, как стали использовать гироскоп не с двумя, а с *тремя степенями свободы*. Гироскоп должен быть *астатическим*. Но астатический гироскоп с тремя степенями свободы не подвержен влиянию вращения Земли. Эту трудность можно преодолеть, если взять гироскоп с каким-либо приспособлением, которое подвергалось бы воздействию указанного вращения и в свою очередь воздействовало бы на гироскоп. Поясним эту идею на примере одной из старых моделей гирокомпаса, по-

строенного известным американским строителем гироскопических приборов Сперри в 1911 г. и оказавшегося вполне пригодным навигационным прибором. Приспособлением, о котором говорилось выше, здесь является *маятник*, жестко связанный с внутренним кольцом карданова подвеса. Маятником служит тяжелая дуга Q, плоскость которой перпендикулярна к плоскости внутреннего кольца, а значит, параллельна плоскости маховичка гироскопа (рис. 163). Принцип действия прибора чрезвычайно прост. Допустим, что ось наружного кольца $D'D$ установлена вертикально, а плоскость внутреннего кольца вместе с осью гироскопа $A'A$ — горизонтально. В этом положении на гироскоп не действуют никакие моменты сил. Ось фигуры гироскопа $A'A$, если ее направить на какую-либо звезду, начнет двигаться вместе с ней. Допустим, что ось фигуры гироскопа отклонена от полуденной линии, например, к востоку (рис. 164). Звезда, на которую направлена эта ось, будет подниматься. Вместе с ней начнет подниматься и положительный конец оси фигуры гироскопа A. Но тогда начнет поворачиваться вокруг оси $B'B$ и дуга Q. Момент силы тяжести кольца $\mathbf{M}$ относительно точки O будет стремиться опустить точку A и вызовет прецессию гироскопа вокруг вертикальной оси $D'D$, в результате которой ось фигуры гироскопа будет поворачиваться к полуденной линии, стремясь установиться одноименно параллельно ей. То же самое произойдет, если первоначально положительный конец оси фигуры A был отклонен от полуденной линии к западу.

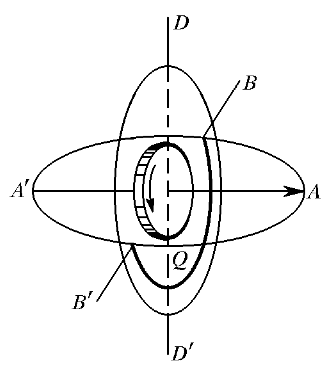


Рис. 163

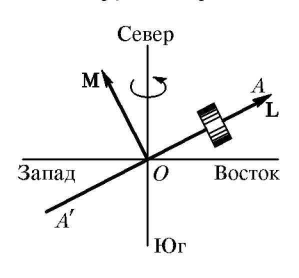
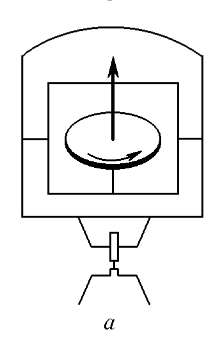
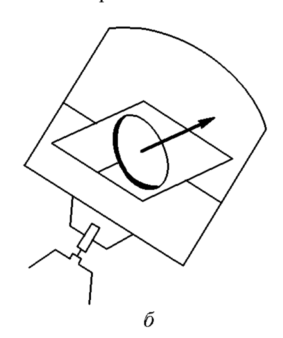


Рис. 164

10. В заключение рассмотрим идею однорельсовой железной дороги. Вагон, катящийся по одному рельсу, неустойчив. Для стабилизации его движения можно применить массивный гироскоп с тремя степенями свободы, установленный внутри вагона, как указано на рис. 165 *а*. Роль наружного



а



б

Рис. 165

кольца карданова подвеса выполняют стенки вагона. Допустим, что вагон накренился вправо. Сила тяжести еще больше будет стремиться опрокинуть вагон в ту же сторону. Она создает вращающийся момент, направленный за плоскость рисунка параллельно продольной оси вагона. Через подшипники этот момент передастся гироскопу. Гироскоп начнет прецессировать, что вызовет наклон внутренней рамы (рис. 165 *б*). Если каким-либо способом ускорить эту прецессию, то возрастает вращающийся момент сил противодействия со стороны гироскопа (см. § 50, пп. 9 и 10). Центр тяжести вагона начнет подниматься, и вагон вернется в вертикальное положение. Такое вынужденное ускорение прецессионного движения рамы должно выполняться автоматически. В устройстве соответствующего автомата и заключается вся трудность практического осуществления идеи однорельсовой дороги.

§ 52. ОСНОВЫ ТОЧНОЙ ТЕОРИИ СИММЕТРИЧНОГО ГИРОСКОПА

1. Точная теория симметричного гироскопа учитывает различие направлений мгновенной оси вращения, оси фигуры и момента импульса гироскопа относительно его точки опоры. Она справедлива при любых соотношениях между любыми угловыми скоростями $\omega_\parallel$ и $\omega_\perp$, с которыми гироскоп вращается вокруг своей оси фигуры и перпендикулярной к ней оси. Однако наиболее важные гироскопические эффекты, которым гироскоп обязан своими научными и техническими применениями, проявляются лишь при соблюдении условия $\omega_\parallel \gg \omega_\perp$.

Рис. 166

Отложим от точки опоры O в положительном направлении оси фигуры гироскопа единичный вектор $\mathbf{s}$ (рис. 166). Конечная точка этого вектора называется *вершиной гироскопа*. Производная $\dot{\mathbf{s}}$ имеет смысл линейной скорости движения вершины гироскопа, а потому может быть представлена в виде $\dot{\mathbf{s}} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{s}] = [\boldsymbol{\omega}_\perp\mathbf{s}]$. Три вектора $\dot{\mathbf{s}}$, $\boldsymbol{\omega}_\perp$ и $\mathbf{s}$ взаимно перпендикулярны и образуют правовинтовую систему, как указано на рис. 167. Из этого рисунка видно, что $\boldsymbol{\omega}_\perp = [\mathbf{s}\dot{\mathbf{s}}]$. Поэтому

$$\mathbf{L} = I_\parallel\boldsymbol{\omega}_\parallel + I_\perp\boldsymbol{\omega}_\perp = I_\parallel\omega_\parallel\mathbf{s} + I_\perp[\mathbf{s}\dot{\mathbf{s}}]. \quad (52.1)$$

Подставив это выражение в уравнение (49.3), получим

$$I_\parallel\dot{\omega}_\parallel\mathbf{s} + I_\parallel\omega_\parallel\dot{\mathbf{s}} + I_\perp[\mathbf{s}\ddot{\mathbf{s}}] = \mathbf{M}. \quad (52.2)$$

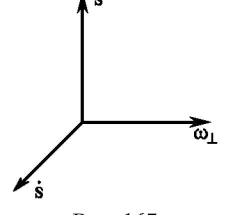


Рис. 167

Это основное уравнение точной теории симметричного гироскопа. Его удобно разделить на два уравнения. Первое уравнение получается из (52.2) скалярным умножением на $\dot{\mathbf{s}}$. С учетом соотношения $(\mathbf{s}\dot{\mathbf{s}}) = 0$ такое умножение дает

$$I_\parallel\dot{\omega}_\parallel = M_\parallel, \quad (52.3)$$

где $\mathbf{M}_{\parallel} \equiv (\mathbf{Ms})$ — проекция вектора $\mathbf{M}$ на ось фигуры гироскопа. Второе уравнение найдем также из (52.2), но векторным умножением на $\mathbf{s}$. Учитывая при этом тождество $[\mathbf{s}[\mathbf{s}\ddot{\mathbf{s}}]] = -\mathbf{s}^2\,\ddot{\mathbf{s}} + (\mathbf{s}\ddot{\mathbf{s}})\mathbf{s} = -\ddot{\mathbf{s}} + (\mathbf{s}\ddot{\mathbf{s}})\mathbf{s}$, получим

$$I_{\parallel}\omega_{\parallel}[\mathbf{s}\dot{\mathbf{s}}] - I_{\perp}\ddot{\mathbf{s}} + I_{\perp}(\mathbf{s}\ddot{\mathbf{s}})\,\mathbf{s} = [\mathbf{sM}].$$

Дифференцируя соотношение $(\mathbf{s}\dot{\mathbf{s}}) = 0$, найдем $(\mathbf{s}\ddot{\mathbf{s}}) + \dot{\mathbf{s}}^2 = 0$. С учетом этого преобразуем последнее уравнение к виду

$$I_{\perp}\ddot{\mathbf{s}} = [\mathbf{Ms}] + I_{\parallel}\omega_{\parallel}[\mathbf{s}\dot{\mathbf{s}}] - I_{\perp}\dot{\mathbf{s}}^2\mathbf{s}. \tag{52.4}$$

2. Уравнение (52.3) определяет изменение во времени угловой скорости вращения гироскопа $\omega_{\parallel}$ вокруг оси фигуры. Оно совпадает с соответствующим уравнением вращения твердого тела вокруг закрепленной оси.

Уравнение (52.4) определяет ускорение $\ddot{\mathbf{s}}$, с которым движется вершина гироскопа. Запишем его в виде

$$\mathbf{I}_{\perp}\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{f}, \tag{52.5}$$

где введено обозначение

$$\mathbf{f} = [\mathbf{Ms}] + I_{\parallel}\omega_{\parallel}[\mathbf{s}\dot{\mathbf{s}}] - I_{\perp}\dot{\mathbf{s}}^2\mathbf{s}. \tag{52.6}$$

В этом виде уравнение (52.5) формально совпадает с уравнением Ньютона. Роль массы играет величина $I_{\perp}$, роль силы — вектор $\mathbf{f}$. Вершина гироскопа движется по поверхности неподвижной сферы единичного радиуса $\mathbf{s}^2 = 1$. Ее ускорение слагается из ускорения $(\ddot{\mathbf{s}})_{\perp}$, направленного по касательной к этой сфере, и радиального, или центростремительного, ускорения $(\ddot{\mathbf{s}})_{\parallel} = -\dfrac{\dot{\mathbf{s}}^2}{s}\mathbf{s} = -\dot{\mathbf{s}}^2\mathbf{s}$, т. е. $\ddot{\mathbf{s}} = (\ddot{\mathbf{s}})_{\perp} - \dot{\mathbf{s}}^2\mathbf{s}$. Подставив это выражение в уравнение (52.5), видим, что центростремительное ускорение из него выпадает. Уравнение принимает вид

$$I_{\perp}(\ddot{\mathbf{s}})_{\perp} = [\mathbf{Ms}] + I_{\parallel}\omega_{\parallel}[\mathbf{s}\dot{\mathbf{s}}]. \tag{52.7}$$

Следовательно, уравнение (52.5) или эквивалентное ему уравнение (52.7) определяют не полное ускорение вершины гироскопа $\ddot{\mathbf{s}}$, а только его составляющую $(\ddot{\mathbf{s}})_{\perp}$, касательную к поверхности единичной сферы $\mathbf{s}^2 = 1$. Этого достаточно для нахождения движения вершины по начальным условиям (например, по начальному положению и начальной скорости вершины гироскопа). Действительно, движение вершины гироскопа аналогично движению не свободной, а связанной материальной точки, вынужденной находиться на заданной поверхности.

Воображаемую материальную точку, масса которой равна $I_{\perp}$, помещенную в вершине гироскопа, мы иногда будем называть *изображающей точкой*. На правую часть в уравнении (52.7) можно смотреть как на некоторую «силу», сообщающую ускорение изображающей точке. Первое слагаемое в этой «силе» связано с действием реальных сил, возникающих при взаимодействии гироскопа с окружающими телами. Его мы будем называть *реальной силой*

$$\mathbf{f}_{\text{реал}} = [\mathbf{Ms}].$$

Второе слагаемое $I_{\|}\omega_{\|}[\mathbf{s}\dot{\mathbf{s}}]$ к взаимодействию тел не имеет отношения. Это есть фиктивная «сила», возникающая при вращении гироскопа вокруг оси фигуры. Она называется *отклоняющей силой*:

$$\mathbf{f}_{\text{откл}} = I_{\|}\omega_{\|}[\mathbf{s}\dot{\mathbf{s}}]. \tag{52.9}$$

Отклоняющая сила отлична от нуля только тогда, когда изображающая точка движется. Она перпендикулярна как к оси фигуры гироскопа, так и к скорости движения изображающей точки. Эта сила стремится отклонить вершину гироскопа вбок от направления ее движения. Действием отклоняющей силы объясняются все характерные гироскопические эффекты.

Таким образом, основное уравнение движения симметричного гироскопа может быть записано в виде

$$I_{\perp}(\ddot{\mathbf{s}})_{\perp} = \mathbf{f}_{\text{реал}} + \mathbf{f}_{\text{откл}}. \tag{52.10}$$

3. Приближенная теория гироскопа рассматривает такие движения его, при которых ускорением $(\ddot{\mathbf{s}})_{\perp}$ в уравнении (52.10) можно пренебречь. Действительно, в этом случае $\mathbf{f}_{\text{реал}} + \mathbf{f}_{\text{откл}} = 0$ или

$$I_{\|}\omega_{\|}[\mathbf{s}\dot{\mathbf{s}}] + [\mathbf{M}\mathbf{s}] = 0.$$

Так как оба вектора $\mathbf{s}$ и $\mathbf{M}$ не имеют составляющих вдоль оси фигуры, то отсюда получаем

$$I_{\|}\omega_{\|}\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{M},$$

а это и есть основное уравнение приближенной теории гироскопа.

4. К движению изображающей точки, поскольку оно описывается уравнением (52.10), формально можно применять все теоремы механики точки, например уравнение сохранения энергии. При этом надо только иметь в виду, что отклоняющая сила, как перпендикулярная к скорости $\dot{\mathbf{s}}$, работы не производит. Работа производится только реальной силой $\mathbf{f}_{\text{реал}}$.

5. На основе точного уравнения движения симметричного гироскопа можно, конечно, исследовать движение свободного гироскопа. Поскольку, однако, относящиеся сюда результаты уже были получены в § 49, мы не будем заниматься этим исследованием, а рассмотрим на основе точной теории вынужденную прецессию и нутации симметричного гироскопа.

Допустим, что действующая сила $\mathbf{F}$ постоянна и приложена в одной из точек оси фигуры гироскопа (рис. 168). Радиус-вектор этой точки, проведенной из точки опоры, обозначим через $\mathbf{a}$. Если точка опоры O не совпадает с центром масс гироскопа, то роль силы $\mathbf{F}$ может выполнять вес самого гироскопа. Момент силы $\mathbf{F}$ равен $\mathbf{M} = [\mathbf{aF}] = [\mathbf{aF}_{\perp}]$, где $\mathbf{F}_{\perp}$ — слагающая этой силы, перпендикулярна к оси фигуры гироскопа. Следовательно, $f_{\text{реал}} = [\mathbf{M}\mathbf{s}] = [[\mathbf{aF}_{\perp}]\mathbf{s}] = a\mathbf{F}_{\perp}$, так как векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{s}$ коллинеарны. Таким образом, уравнение (52.10) примет вид

$$I_{\perp}(\ddot{\mathbf{s}})_{\perp} = a\mathbf{F}_{\perp} + I_{\|}\omega_{\|}[\mathbf{s}\dot{\mathbf{s}}]. \tag{52.11}$$

Теперь поставим вопрос, можно ли вершине гироскопа сообщить такую начальную скорость, чтобы она совершала регулярную прецессию, т. е. равномерно вращалась вокруг оси, параллельной направлению действующей силы $\mathbf{F}$ и проходящей через точку гироскопа O. Угловую скорость такого вращения обозначим через $\mathbf{\Omega}$. Конкретно под силой $\mathbf{F}$ будем понимать вес

самого гироскопа: $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$. За положительное направление вектора $\mathbf{\Omega}$ примем направление вверх, т. е. направление, противоположное силе $\mathbf{F}$ (см. рис. 168). Ответ на поставленный вопрос легко получить из уравнения (52.11). Для этого спроецируем уравнение (52.11) на направление вектора $\mathbf{F}_\perp$. Вершина гироскопа при регулярной прецессии движется со скоростью $\dot{\mathbf{s}} = [\mathbf{\Omega s}]$ и ускорением $\ddot{\mathbf{s}} = -\Omega^2\mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный от оси прецессионного вращения к вершине гироскопа ($r = s \sin\alpha = \sin\alpha$, причем α означает угол между осью фигуры гироскопа и вертикальным направлением). Взяв от ускорения $\ddot{\mathbf{s}}$ его составляющую, перпендикулярную к оси фигуры, и выполнив указанное проецирование, получим после сокращения на $\sin\alpha$

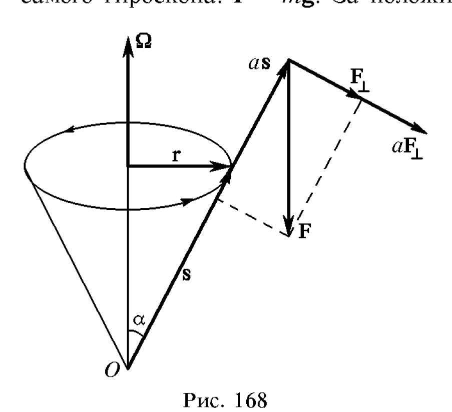


Рис. 168

$$I_\perp\Omega^2 \cos\alpha - I_\parallel\omega_\parallel\Omega + aF = 0, \qquad (52.12)$$

откуда

$$\Omega = \frac{1}{2I_\perp \cos\alpha}\left(I_\parallel\omega_\parallel \pm \sqrt{I_\parallel^2\omega_\parallel^2 - 4aFI_\perp \cos\alpha}\right).$$

Если центр масс гироскопа лежит выше точки опоры, то угол α — острый (см. рис. 168). В этом случае при недостаточно быстром собственном вращении гироскопа подкоренное выражение в формуле (52.13) может оказаться отрицательным. Тогда рассматриваемая регулярная прецессия становится невозможной, а положение гироскопа — неустойчивым. Вообще, для устойчивости гироскопа необходимо выполнение условия

$$I_\parallel^2\omega_\parallel^2 - 4aFI_\perp \cos\alpha > 0. \qquad (52.14)$$

Это условие выполняется всегда, когда центр масс гироскопа лежит ниже точки опоры. Если же центр масс расположен выше точки опоры, то гироскоп должен вращаться достаточно быстро.

Допустим, что условие (52.14) выполнено. Тогда квадратное уравнение (52.12) имеет два вещественных корня. В этом случае регулярная прецессия возможна, и притом не одна, а две. Прецессия, которой соответствует меньший по абсолютной величине корень уравнения (52.12), называется *медленной*. Прецессия, соответствующая другому корню, называется *быстрой*.

6. Допустим, что выполнено условие $I_\parallel^2\omega_\parallel^2 \gg |4aFI_\perp \cos\alpha|$. Тогда для квадратного корня в формуле (52.13) можно написать приближенно

$$I_\parallel\omega_\parallel\left(1 - \frac{4aFI_\perp \cos\alpha}{I_\parallel^2\omega_\parallel^2}\right)^{1/2} \approx I_\parallel\omega_\parallel - \frac{2aFI_\perp \cos\alpha}{I_\parallel\omega_\parallel}.$$

В результате получится

$$\Omega_{\text{медл}} \approx \frac{aF}{I_\parallel\omega_\parallel}, \qquad (52.15)$$

$$\Omega_{\text{быстр}} \approx \frac{I_\parallel}{I_\perp \cos\alpha}\,\omega_\parallel. \qquad (52.16)$$

Формула (52.15) совпадает с формулой (50.4), к которой приводит приближенная теорема гироскопа. Таким образом, регулярная прецессия, о которой говорится в приближенной теории, есть *медленная прецессия*. Угловая скорость быстрой прецессии, как видно из формулы (52.16), по порядку величины совпадает с $\omega_\parallel$. Здесь не выполнено основное условие применимости приближенной теории $\omega_\perp \ll \omega_\parallel$. Поэтому быструю прецессию нельзя рассматривать в рамках приближенной теории. Регулярная прецессия свободного гироскопа, рассмотренная в § 49, есть частный случай быстрой прецессии, при котором $F = 0$.

7. Для того чтобы у читателя не сложилось впечатления, что быстрая прецессия является каким-то чисто умозрительным явлением, рассмотрим тривиальный пример конического маятника, когда $\omega_\parallel = 0$ и ни о каких гироскопических эффектах говорить не приходится. Разумеется, в этом случае центр масс должен лежать ниже точки подвеса. Поэтому угол α целесообразно заменить дополнительным углом $\beta = \pi - \alpha$, который ось маятника образует с вертикалью, направленной вниз. Формула (52.13) переходит в

$$\Omega = \pm\sqrt{\frac{aF}{I\cos\beta}},$$

т. е. в известную формулу круговой частоты конического маятника.

8. Регулярная прецессия, как медленная, так и быстрая, является весьма специальным частным случаем движения вершины гироскопа, реализующимся при вполне определенных начальных условиях. Для исследования общего случая в уравнении (52.7) сделаем замену $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{v}_\text{п} + \mathbf{v}_\text{н}$. Вектор $\mathbf{v}_\text{п}$ определим из условия $[\mathbf{Ms}] + I_\parallel\omega_\parallel[\mathbf{sv}_\text{п}] = 0$. Тогда $I_\perp(\ddot{\mathbf{s}})_\perp = I_\parallel\omega_\parallel[\mathbf{sv}_\text{н}]$. Величина $\mathbf{v}_\text{п}$ есть скорость вершины гироскопа, с которой она двигалась бы, если бы совершала медленную регулярную прецессию. (Вторая слагающая скорости $v_\text{н}$ будет описывать нутацию.) Если пренебречь ускорением при такой прецессии, то $\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{v}_\text{н}$, а потому

$$I_\perp\dot{\mathbf{v}}_\text{н} = I_\parallel\omega_\parallel[\mathbf{sv}_\text{н}], \tag{52.17}$$

причем мы опустили у $\mathbf{v}_\text{н}$ значок $\perp$, так как слагающая ускорения вдоль оси фигуры гироскопа сейчас не представляет интереса, и от нее можно отвлечься. Если на правую часть уравнения (52.17) смотреть как на аналог силы, то эта сила будет перпендикулярна к скорости $\mathbf{v}_\text{н}$, а потому она не может производить работы. Поэтому модуль скорости $\mathbf{v}_\text{н}$ меняться не может, и уравнение (52.17) описывает равномерное движение по окружности. Если r — радиус такой окружности, а $\Omega_\text{н}$ — угловая скорость вращения, то $v_\text{н} = \Omega_\text{н}r$, $|\dot{\mathbf{v}}_\text{н}| = \mathbf{\Omega}_\text{н}^2 r$. При этом ввиду перпендикулярности между $\mathbf{s}$ и $\mathbf{v}_\text{н}$ из уравнения (52.17) получается

$$I_\perp\Omega_\text{н}^2 r = I_\parallel\omega_\parallel\Omega_\text{н}r,$$

откуда

$$\Omega_\text{н} = \frac{I_\parallel}{I_\perp}\,\omega_\parallel. \tag{52.18}$$

Таким образом, в общем случае на медленное прецессионное движение вершин гироскопа накладывается равномерное круговое движение с круговой частотой $\Omega_\text{н}$, определяемой уравнением (52.18). Радиус кругового движения равен $r = \frac{v_\text{н}}{\Omega_\text{н}} = \frac{v_\text{н}}{\omega_\parallel}\frac{I_\perp}{I_\parallel}$. В результате такого наложения траектория вершины

гироскопа может быть либо циклоидального типа (рис. 169 *б*), либо петлеобразного (рис. 169 *а*), либо она будет напоминать синусоиду (рис. 169 *в*). Какой из этих вариантов осуществляется в каждом конкретном случае, зависит от начальных условий, т. е. от положения вершины гироскопа в начальный момент времени и скорости, которая ей была сообщена в тот же момент. Наложением кругового движения на медленную прецессию и объ-

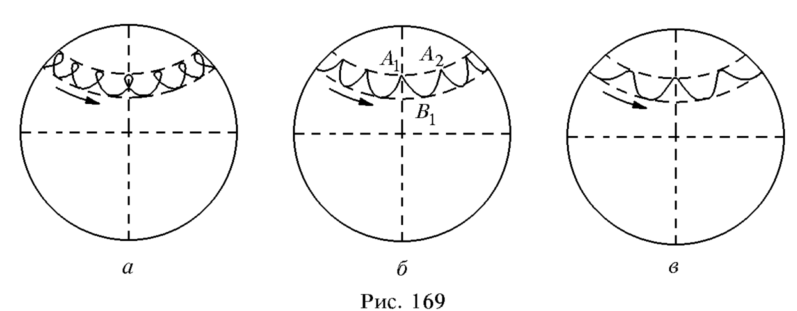


Рис. 169

ясняются *нутации*, о которых говорилось в § 50. Радиус кругового движения r есть не что иное, как амплитуда нутационных колебаний. При $r = 0$ нутаций не будет, и движение вершины перейдет в регулярную прецессию.

Пример. В авиагоризонте, рассмотренном в примере § 50, $I_\perp = {}^3/_5 I_\parallel$. Число нутаций на один прецессионный оборот равно

$$N = \frac{\Omega_н}{\Omega_п} = \frac{I_\parallel}{I_\perp}\frac{\omega_\parallel}{\Omega_п} = 4{,}77 \cdot 10^5.$$

Если начальная скорость вершины гироскопа равна нулю, то $\mathbf{v}_п + \mathbf{v}_н = 0$, а потому $r = v_п/\Omega_н$. Но $v_п = R\Omega_п$, где R — радиус прецессии. Таким образом,

$$\frac{r}{R} = \frac{\Omega_п}{\Omega_н} = \frac{1}{N} = \frac{1}{4{,}77 \cdot 10^5}.$$

Этот пример наглядно показывает, насколько мелким и частым дрожанием являются нутации в быстровращающихся технических гироскопах.

9. В заключение рассмотрим, как можно качественно объяснить характер траектории вершины гироскопа при наличии нутаций. Мы исходим непосредственно из уравнения движения вершины (52.11). Пусть на рис. 169 ось фигуры гироскопа своим положительным концом направлена в сторону читателя. Пусть в начальный момент времени вершина неподвижна и занимает положение A_1 (см. рис. 169 *б*). В этот момент скорость $\dot{\mathbf{s}}$, а потому и отклоняющая сила $I_\parallel\omega_\parallel[\mathbf{s}\dot{\mathbf{s}}]$ равны нулю. Под действием силы тяжести вершина получает скорость, направленную вниз. Но тогда появляется и боковая отклоняющая сила. Она начинает загибать траекторию вершины влево (если, встав на плоскость рисунка, идти в сторону движения). В положении B_1 скорость вершины становится горизонтальной, а отклоняющая сила — вертикальной. По величине отклоняющая сила превосходит силу веса, а вершина гироскопа начинает подниматься. В верхнем положении A_2 скорость вершины обращается в нуль. Это непосредственно следует из уравнения энергии, которому формально подчиняется движение вершины. Затем дви-

жение неограничено повторяется. Получается траектория циклоидального типа. Траектория с петлями рис. 169 *а* получится, если в начальный момент сообщить вершине скорость в направлении против прецессии. Если же начальная скорость сообщена в направлении прецессии, то получится траектория типа рис. 169 *в*. В последнем случае скорость можно подобрать такой, что возникает регулярная прецессия без нутаций.

§ 53. ТЕНЗОР И ЭЛЛИПСОИД ИНЕРЦИИ

1. Вычислим момент инерции I твердого тела относительно производной оси OA (рис. 170). Без ущерба для общности можно принять, что ось проходит через начало координат O. Координаты будем обозначить либо через x, y, z, либо через x_1, x_2, x_3. Таким образом, $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$. Разложим радиус-вектор $\mathbf{r}$ элемента массы тела dm на составляющие вдоль оси OA и перпендикулярную к ней: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\parallel + \mathbf{r}_\perp$. По определению момента инерции

$$I = \int \mathbf{r}_\perp^2 dm = \int (r^2 - r_\parallel^2)\, dm.$$

Рис. 170

Если $\mathbf{s}$ — единичный вектор вдоль оси OA, то $r_\parallel = (\mathbf{rs}) = xs_x + ys_y + zs_z$. Кроме того, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Учтя эти соотношения, а также соотношение $s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1$, получим

$$I = I_{xx}s_x^2 + I_{yy}s_y^2 + I_{zz}s_z^2 + 2I_{xy}s_xs_y + 2I_{yz}s_ys_z + 2I_{zx}s_zs_x, \qquad (53.1)$$

где I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, $I_{xy} \equiv I_{yx}$, $I_{yz} \equiv I_{zy}$, $I_{zx} \equiv I_{xz}$ — постоянные, определяемые выражениями

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int (y^2 + z^2)\, dm, & I_{xy} &\equiv I_{yx} = -\int xy\, dm, \\ I_{yy} &= \int (z^2 + x^2)\, dm, & I_{yz} &\equiv I_{zy} = -\int yz\, dm, \\ I_{zz} &= \int (x^2 + y^2)\, dm, & I_{zx} &\equiv I_{xz} = -\int zx\, dm. \end{aligned} \qquad (53.2)$$

Для этих постоянных будем пользоваться обозначениями I_{11}, I_{22}, ..., I_{13}. Величины I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, очевидно, имеют смысл моментов инерции тела относительно координатных осей X, Y, Z соответственно. Совокупность девяти величин

$$\begin{matrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{matrix} \qquad (53.3)$$

называются *тензором инерции тела относительно точки* O, а сами эти величины — *компонентами этого тензора**). *Тензор инерции симметри-*

*) Тензором называют упорядоченную совокупность девяти величин, заданную в каждой системе координат, причем при повороте координатных осей эти величины преобразуются как произведения компонентов двух векторов.

чен, т. е. $I_{ij} = I_{ji}$. Поэтому он полностью определяется заданием *шести* компонентов. Формулу (53.1) можно записать в более краткой и симметричной форме:

$$I = \sum_{i,j=1}^{3} I_{ij}\, s_i s_j. \tag{53.4}$$

Если известны для какой-либо координатной системы все шесть компонентов тензора инерции, то по формуле (53.1) или (53.4) можно вычислить момент инерции тела относительно произвольной оси, проходящей через начало координат O. Момент инерции относительно другой оси, не проходящей через начало координат, можно вычислить с помощью теоремы Гюйгенса — Штейнера.

2. Формула (53.4) допускает наглядную геометрическую интерпретацию. Через начало координат O будем проводить прямые во всевозможных направлениях и на них откладывать отрезки длиной $\mathbf{r} = 1/\sqrt{I}$. Геометрическим местом концов таких отрезков будет некоторая поверхность. Найдем ее уравнение. Согласно построению радиус-вектор точки, лежащей на этой поверхности, определяется выражением $\mathbf{r} = \mathbf{s}/\sqrt{I}$, а координаты той же точки — выражением $x_i = s_i/\sqrt{I}$. Исключая с помощью этих соотношений величины s_i из (53.4), получим уравнение искомой поверхности

$$\sum_{i,j} I_{ij} x_i x_j = 1. \tag{53.5}$$

Эта поверхность второго порядка, очевидно, является эллипсоидом, так как момент инерции I, а с ним и длина радиуса-вектора $\mathbf{r}$ имеют конечные значения, каково бы ни было направление оси $\mathbf{s}$. Она называется *эллипсоидом инерции* тела относительно точки O, являющейся его центром. При перемещении начала координат O относительно тела будет меняться и эллипсоид инерции тела. Если в качестве O взят центр масс тела, то и соответствующий эллипсоид называется *центральным*.

3. Как и всякий тензор, тензор инерции зависит от выбора начала координат и направления координатных осей. При изменении координатной системы меняются и значения компонентов тензора инерции тела. Существенно, однако, что какова бы ни была координатная система, всегда могут быть найдены все шесть компонентов тензора инерции, хотя бы по формулам (53.2). В частности, координатные оси можно направить вдоль главных осей эллипсоида инерции. В этой координатной системе в уравнении (53.5) пропадают члены, содержащие произведения координат, и это уравнение примет вид

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1, \tag{53.6}$$

или

$$\sum_i I_i x_i^2 = 1. \tag{53.7}$$

Тензор инерции приводится к *диагональному* виду

$$\begin{matrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & I_z & 0, \end{matrix} \tag{53.8}$$

причем *диагональные элементы* тензора мы обозначили с помощью одного индекса. Второй индекс в системе главных осей эллипсоида инерции опущен как излишний.

Таким образом, *для всякого твердого тела, где бы ни было выбрано начало координат O, существуют три взаимно перпендикулярные оси, совпадающие с главными осями эллипсоида инерции тела относительно точки O, для которых недиагональные элементы тензора инерции обращаются в нуль.* Эти оси называются также *главными осями тензора инерции.* Они, очевидно, жестко связаны с телом. Точно так же жестко связан с твердым телом и эллипсоид инерции. Если известно положение эллипсоида инерции, то в тот же момент будет известно и положение всего тела. Поэтому задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки сводится к задаче о вращении его эллипсоида инерции вокруг той же точки. Этим воспользовался французский математик и механик Луи Пуансо (1777—1859) для наглядной геометрической интерпретации вращения твердого тела вокруг неподвижной точки. Она будет рассмотрена в следующем параграфе. Главные оси центрального эллипсоида инерции называют также *главными осями самого тела.*

Направление главных осей тела часто можно определить, пользуясь соображениями симметрии. Так, например, главные оси однородного прямоугольного параллелепипеда параллельны его ребрам. Если тело обладает симметрией вращения вокруг некоторой оси, то его эллипсоид инерции обладает такой же симметрией. К телам такого родя относится, например, цилиндр. В этом случае моменты инерции тела относительно всех осей, перпендикулярных к оси симметрии, одинаковы. Одной из главных осей тела является ось его симметрии. Всякая прямая, к ней перпендикулярная, также будет главной осью тела. Таким образом, существует бесконечное множество троек взаимно перпендикулярных главных осей тела, у которых одна ось, а именно ось симметрии, будет общей. Для шара эллипсоиды инерции относительно всех осей, проходящих через центр шара, одинаковы. В этом случае любая ось будет главной осью тела.

Для динамики вращательного движения твердого тела существенна симметрия не самого тела, а симметрия соответствующего ему эллипсоида инерции. Все тела с одинаковыми эллипсоидами инерции динамически эквивалентны. Чтобы эллипсоид инерции обладал симметрией вращения, не обязательно, чтобы само тело обладало той же симметрией. Возьмем, например, однородный параллелепипед с квадратным основанием. Поместим начало координат O в любой точке геометрической оси параллелепипеда. Тогда нетрудно показать, что эллипсоид инерции будет эллипсоидом вращения, ось симметрии которого совпадает с геометрической осью параллелепипеда. В динамическом отношении движение такого параллелепипеда описывается такими же уравнениями, что и движение однородного цилиндра. Если параллелепипед вырождается в куб, а начало координат помещено в его центре, то эллипсоид инерции вырождается в сферу. В динамическом отношении однородный куб ведет себя так же, как однородный шар.

4. Допустим теперь, что твердое тело равномерно вращается вокруг закрепленной оси, например оси, проходящей через неподвижные подшипники. Со стороны подшипников тело подвергается действию сил. Пусть это единственные внешние силы, действующие на тело. Их равнодействующая $\mathbf{F}$ найдется по теореме о движении центра масс. Она равна

$$\mathbf{F} = -m\omega^2\mathbf{r}_C,$$

где $\mathbf{r}_C$ — радиус-вектор центра масс тела, проведенный от оси вращения перпендикулярно к ней. Момент внешних сил относительно начала координат равен

$$\mathbf{M} = -\int [\mathbf{r}\omega^2\mathbf{r}_\perp]\,dm = \omega^2\int [\mathbf{r}_\perp\mathbf{r}_\parallel]\,dm.$$

Примем ось вращения за координатную ось X, тогда $\mathbf{r}_\parallel = x\mathbf{i}$, $\mathbf{r}_\perp = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Учтя соотношения $[\mathbf{ij}] = \mathbf{k}$, $[\mathbf{ik}] = -\mathbf{j}$, получим

$$\mathbf{M} = \omega^2\mathbf{j}\int zx\,dm - \omega^2\mathbf{k}\int xy\,dm,$$

или

$$\mathbf{M} = \omega^2(I_{xy}\mathbf{k} - I_{zx}\mathbf{j}).$$

Уберем подшипники и спросим себя, при каких условиях движение тела не изменится, т. е. останется вращением вокруг прежней оси X. Для этого необходимо, чтобы $\mathbf{F} = \mathbf{M} = 0$. Следовательно, ось вращения должна проходить через центр масс и, кроме того, должно быть $I_{zx} = I_{xy} = 0$. Последнее условие означает, что ось вращения должна быть одной из главных осей тела. Найденные условия являются и достаточными. Это следует из того, что при их выполнении удаление подшипников не меняет уравнения движения центра масс и уравнения моментов относительно центра масс. Эти же уравнения (при заданных начальных условиях) однозначно определяют движение твердого тела.

5. Итак, *во всяком твердом теле существуют три взаимно перпендикулярные оси, совпадающие с главными осями центрального эллипсоида инерции тела, вокруг которых тело может вращаться без воздействия внешних сил.* Такие оси называются поэтому *свободными* или *перманентными осями вращения*. Последним термином хотят подчеркнуть, что вращение твердого тела по инерции в отсутствие возмущений может продолжаться сколь угодно долго. Иное дело, будет ли это вращение устойчивым по отношению к малым возмущениям, с которыми в реальных условиях всегда надо считаться. Если при наличии таковых характер движения тела меняется мало, т. е. мгновенная ось вращения хотя и непрерывно изменяет свое положение в теле и пространстве, но все время проходит очень близко от соответствующей свободной оси, то вращение вокруг последней будет *устойчивым*. Если же сколь угодно малое возмущение существенно меняет характер движения тела, т. е. далеко уводит мгновенную ось от исходного направления, вокруг которого первоначально вращалось тело, то это вращение называется *неустойчивым*. В следующем параграфе будет показано, что *вращение вокруг оси с наибольшим или наименьшим моментом инерции является устойчивым, а вращение вокруг оси с промежуточным значением момента инерции — неустойчивым*. Для демонстрации можно взять картонную коробку прямоугольной формы, у которой длины всех ребер различны. Ось с наибольшим моментом инерции будет, очевидно, параллельна наиболее короткому ребру, с наименьшим моментом инерции — наиболее длинному ребру, с промежуточным — ребру промежуточной длины. Коробку подбрасывают вверх, сообщая ей быстрое вращение вокруг одной из этих осей. Во время полета ось вращения сохраняется, если она является осью с наибольшим или наименьшим моментом инерции. Если же первоначальное вращение было сообщено вокруг оси с промежуточным значением момента инер-

ции, то мгновенная ось вращения во время полета коробки непрерывно качается, далеко уходя от первоначального направления в теле. Движение коробки приобретает сложный и запутанный характер.

6. Допустим теперь, что твердое тело вращается вокруг какой-то закрепленной или мгновенной оси OA с постоянной или непостоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Найдем его момент импульса $\mathbf{L}$ относительно начала координат O, а также кинетическую энергию $\mathbf{K}$. По определению

$$\mathbf{L} = \int [\mathbf{rv}]\, dm.$$

Подставим сюда $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$ и воспользуемся формулой $[\mathbf{r}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]] = \mathbf{r}^2\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})\mathbf{r}$. Тогда получим

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\omega} \int \mathbf{r}^2\, dm - \int (\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})\mathbf{r}\, dm.$$

В проекциях на координатные оси это соотношение записывается так:

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z, \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z, \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z, \end{aligned} \tag{53.9}$$

или короче

$$L_i = \sum_{j=1}^{3} I_{ij}\omega_j \quad (i = 1, 2, 3). \tag{53.10}$$

Таким образом, *компоненты вектора момента импульса тела являются линейными однородными функциями компонентов вектора угловой скорости.* В системе главных осей формулы (53.9) упрощаются и принимают вид

$$L_x = I_x\omega_x, \quad L_y = I_y\omega_y, \quad L_z = I_z\omega_z. \tag{53.11}$$

Формулы ясно показывают, что в общем случае направления векторов $\mathbf{L}$ и $\boldsymbol{\omega}$ не совпадают. Кинетическую энергию вращающегося твердого тела легко найти по формуле (47.2). Она равна

$$K = \frac{1}{2}(\mathbf{L}\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}\sum_{ij} I_{ij}\omega_i\omega_j. \tag{53.12}$$

§ 54. ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПО ИНЕРЦИИ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

1. Пуансо дал простую и наглядную интерпретацию движения твердого тела по инерции вокруг неподвижной точки опоры O. С твердым телом связывается его эллипсоид инерции с центром в точке опоры O. Движение тела заменяется движением этого эллипсоида (см. § 53, п. 3). В основе интерпретации Пуансо лежат три теоремы, которые мы и докажем. Для краткости будем называть *полюсом* точку пересечения P мгновенной оси с поверхностью эллипсоида инерции.

Теорема 1. *Радиус-вектор, соединяющий точку опоры O с полюсом P, пропорционален мгновенной угловой скорости вращения тела.*

При доказательстве исходим из уравнения энергии $\sum_{i,j} I_{ij}\omega_i\omega_j = 2K = \text{const}$. Возьмем на мгновенной оси точку Q с радиусом-вектором $\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega}/\sqrt{2K}$. Тогда из уравнения энергии найдем, что координаты точки Q должны удовлетворять уравнению $\sum_{ij} I_{ij}x_ix_j = 1$. Это значит, что точка Q лежит на поверхности эллипсоида инерции. Так как она лежит на мгновенной оси, то она совпадает с полюсом P. Итак, радиус-вектор полюса P связан с вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ соотношением $\boldsymbol{\omega} = \sqrt{2K}\,\mathbf{r}$. Отсюда и следует доказываемая теорема.

Теореа 2. *Касательная плоскость к эллипсоиду инерции в точке нахождения полюса P перпендикулярна вектору $\mathbf{L}$ момента импульса тела относительно точки опоры O.*

При доказательстве можно воспользоваться уравнением эллипсоида инерции в любой системе координат. Но проще взять уравнение этой поверхности в системе главных осей эллипсоида, т. е. $I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1$. Левую часть этого уравнения обозначим через $F(x, y, z)$, т. е. запишем само уравнение в виде $F(x, y, z) = 1$. Как было показано в § 29 (п. 3), вектор

$$\mathbf{N} = \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\,\mathbf{k} \equiv \operatorname{grad} F$$

направлен по нормали к поверхности эллипсоида. Иными словами, вектор $\mathbf{N}$ перпендикулярен к касательной плоскости, о которой говорится в теореме. Он равен

$$\mathbf{N} = 2(I_x x\mathbf{i} + I_y y\mathbf{j} + I_z z\mathbf{k}).$$

На основании предыдущей теоремы его можно представить в виде

$$\mathbf{N} = \mu(I_x\omega_x\mathbf{i} + I_y\omega_y\mathbf{j} + I_z\omega_z\mathbf{k}),$$

т. е.

$$\mathbf{N} = \mu\mathbf{L},$$

где μ — некоторый скаляр. Это соотношение доказывает теорему.

Ввиду отсутствия внешних сил относительно точки опоры O вектор $\mathbf{L}$ не меняется по времени. Поэтому не будет менять свое направление и касательная плоскость к эллипсоиду инерции, о которой говорится в теореме.

Теорема 3. *Длина перпендикуляра, опущенного из точки опоры O на плоскость, касательную к эллипсоиду инерции в точке нахождения полюса P, не меняется с течением времени.*

Применим для доказательства уравнение энергии в виде $(\mathbf{L}\boldsymbol{\omega}) = 2K = \text{const}$, или $L\omega_L = 2K = \text{const}$, где ω_L — проекция вектора $\boldsymbol{\omega}$ на неизменное направление вектора $\mathbf{L}$. Так как величины L и K постоянны, то отсюда следует, что постоянна и проекция ω_L. Но, как было показано при доказательстве теоремы 1, эта проекция связана с длиной перпендикуляра r_L соотношением $\omega_L = \sqrt{2K}r_L$, что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы следует, что *касательная плоскость к эллипсоиду инерции в точке нахождения полюса неизменна не только по направлению, но и по своему положению в пространстве.* Поэтому эту плоскость часто называют *неизменяемой плоскостью.*

2. Теперь интерпретация Пуансо напрашивается сама собой. Связав с движущимся телом его эллипсоид инерции с центром в точке опоры O, проведем в какой-нибудь момент времени касательную плоскость в точке нахождения полюса в этот момент. Это будет неизменяемая плоскость в соответствии с теоремами 2 и 3. При этом в полюсе P не может быть скольжения между эллипсоидом инерции и неизменяемой плоскостью, так как через эту точку проходит мгновенная ось вращения тела. Если катить без скольжения эллипсоид инерции тела по неизменяемой плоскости с угловой скоростью, пропорциональной радиусу-вектору точки касания (т. е. полюса), то в соответствии с теоремой 1 при таком качении будет воспроизведено (в ускоренном или замедленном темпе) вращение твердого тела, связанного с эллипсоидом инерции.

3. Полюс P одновременно находится и на поверхности эллипсоида инерции, и на неизменяемой плоскости. Допустим для наглядности, что неизменяемая плоскость закрашена, например, покрыта сажей. При качении эллипсоида инерции на его поверхности и на неизменяемой плоскости остаются следы, показывающие, через какие точки проходил полюс. Кривая, которую описывает полюс на поверхности эллипсоида инерции, называется *полодией*. Плоская же кривая, описываемая тем же полюсом на неизменяемой плоскости, называется *герполодией*. Если эллипсоид инерции касается неизменяемой плоскости некоторой точкой, то спустя некоторое время он будет касаться той же плоскости той же точкой, но, вообще говоря, уже в другом месте. Иными словами, полюс на поверхности эллипсоида инерции вернется в свое исходное положение. Это показывает, что *полодия является замкнутой кривой*. Что касается герполодии, то она, вообще говоря, *не замкнута*.

Соединив прямыми точки полодии и точки герполодии с точкой опоры O, получим две конические поверхности. Одна коническая поверхность жестко связана с вращающимся телом. Она называется *конусом полодии*. Другая неподвижна в пространстве и называется *конусом герполодии*. Обе поверхности касаются друг друга вдоль прямой, совпадающей с мгновенной осью вращения. Поэтому между ними нет скольжения. *Движение тела можно рассматривать как качение без скольжения конуса полодии по неподвижному конусу герполодии с угловой скоростью, пропорциональной радиусу-вектору, проведенному из точки опоры к полюсу*. Эта интерпретация, также предложенная Пуансо, только словесно отличается от предыдущей интерпретации.

4. Допустим, что свободное тело вращается вокруг одной из главных осей центрального эллипсоида инерции. Тогда в интерпретации Пуансо эллипсоид инерции будет опираться на неизменную плоскость одной из своих вершин, причем соответствующая главная ось будет перпендикулярна к этой плоскости. Полодия и герполодия выродятся в точки, совпадающие с полюсом P. Отсюда видно, что вращение вокруг главной оси центрального эллипсоида инерции может продолжаться вечно. Это совпадает с доказанным выше утверждением, что главные оси центрального эллипсоида инерции являются также свободными осями вращения.

5. С помощью такой интерпретации Пуансо легко также исследовать вопрос, вращение вокруг каких свободных осей является устойчивым, а вокруг каких — неустойчивым. Вопрос этот сводится к отысканию уравнения конуса полодии относительно координатной системы, связанной с телом. Выберем в качестве таковой систему главных осей. Пусть ось X является осью наибольшего, а ось Z — наименьшего моментов инерции. Таким образом, мы полагаем

$$I_x > I_y > I_z. \tag{54.1}$$

В каждый момент времени движение тела есть вращение вокруг мгновенной оси. При вращении сохраняется кинетическая энергия тела:

$$I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 = 2K = \text{const}. \tag{54.2}$$

Кроме того, сохраняется момент импульса тела:

$$\mathbf{L} = I_x\omega_x\mathbf{i} + I_y\omega_y\mathbf{j} + I_z\omega_z\mathbf{k}.$$

Возведя это соотношение в квадрат, получим

$$I_x^2\omega_x^2 + I_y^2\omega_y^2 + I_z^2\omega_z^2 = L^2 = \text{const}. \tag{54.3}$$

Умножив уравнение (54.2) на $h^2 \equiv L^2/(2K)$ и вычтя из уравнения (54.3), получим однородное уравнение

$$I_x(I_x - h^2)\,\omega_x^2 + I_y(I_y - h^2)\,\omega_y^2 + I_z(I_z - h^2)\,\omega_z^2 = 0, \tag{54.4}$$

которому должны удовлетворять компоненты вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Уравнение мгновенной оси можно записать в виде $\mathbf{r} = \rho\boldsymbol{\omega}$, где ρ — переменный параметр, который может принимать любые значения. Найдя отсюда ω_x, ω_y, ω_z и подставив полученные значения в предыдущее уравнение, видим, что координаты точек мгновенной оси должны удовлетворять однородному уравнению второго порядка

$$I_x(I_x - h^2)\,x^2 + I_y(I_y - h^2)\,y^2 + I_z(I_z - h^2)\,z^2 = 0. \tag{54.5}$$

Это значит, что мгновенная ось вращения лежит на поверхности (54.5), т. е. на поверхности конуса второго порядка. Этот конус и будет конусом полодии, так как по самому определению конус полодии есть линейная поверхность, образованная последовательными положениями в теле мгновенной оси вращения.

6. Вид конуса полодии (54.5) зависит от значения параметра $h^2 \equiv L^2/(2K)$. Очевидно, все коэффициенты уравнения (54.5) не могут иметь одинаковые знаки, так как в этом случае уравнение не может удовлетворяться вещественными значениями x, y, z. Отсюда следует, что $I_x - h^2 > 0$. Действительно, если бы $I_x - h^2$ было меньше нуля, то в силу условия (54.1) величины $I_y - h^2$ и $I_z - h^2$ тем более были бы меньше нуля, т. е. все три коэффициента в уравнении (54.5) были бы отрицательны. А это, как мы показали, невозможно. Заметив это, видим, что могут представляться только два случая:

1) $(I_y - h^2) > 0$, $(I_z - h^2) < 0$;
2) $(I_y - h^2) < 0$, $(I_z - h^2) < 0$.

В первом случае уравнение (54.5) имеет вид $Ax^2 + By^2 - Cz^2 = 0$, где A, B, C — положительные постоянные, причем $A > B > C$. Сечение конуса полодии плоскостью $z = a = \text{const}$ есть эллипс $Ax^2 + By^2 = Ca^2$, а потому конус полодии окружает ось наименьшего момента инерции Z. Напротив, сечения его плоскостями $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ имеют гиперболическую форму.

Во втором случае уравнение конуса полодии имеет вид $Ax^2 - By^2 - Cz^2 = 0$ с положительными постоянными A, B, C. В этом случае в сечении получается эллипс, если оно производится плоскостью $x = \text{const}$. При сечении же плоскостями $y = \text{const}$ и $z = \text{const}$ образуются гиперболы.

Таким образом, в зависимости от значения параметра h *конус полодии окружает либо ось наибольшего, либо ось наименьшего моментов инерции тела. Но он никогда не окружает ось промежуточного момента инерции.*

7. Теперь вопрос об устойчивости вращения относительно свободных осей тела решается тривиально. Если тело вращается по инерции вокруг одной из свободных осей, то при наличии возмущения это вращение будет искажено. После прекращения возмущения мгновенная ось начнет описывать в теле конус полодии. Если вращение происходило вокруг оси с наибольшим или наименьшим моментами инерции, а возмущение было мало, то после прекращения последнего возникает конус полодии малого раствора, окружающий эту ось. Двигаясь по нему, мгновенная ось все время будет проходить вблизи свободной оси, вокруг которой было возбуждено первоначальное вращение тела. Это значит, что вращение вокруг такой оси является устойчивым. Напротив, если тело первоначально вращалось вокруг оси промежуточного момента инерции, то после воздействия малого возмущения возникает конус полодии широкого раствора, окружающий либо ось наибольшего, либо ось наименьшего моментов инерции. Двигаясь по такому конусу, мгновенная ось вращения далеко уйдет от своего исходного направления. Следовательно, вращение вокруг свободной оси с промежуточным моментом инерции является неустойчивым.

8. Если момент инерции относительно каких-либо главных осей, например X и Y, совпадают между собой ($I_x = I_y$), то эллипсоид инерции и конус полодии будут обладать симметрией вращения относительно оси Z. Конус полодии имеет вид $A(x^2 + y^2) - Cz^2 = 0$, где A и C — положительные постоянные. Его сечение плоскостью, перпендикулярной к оси Z, будет круговым. Сечения же плоскостями, параллельными этой оси, будут гиперболическими. Конус полодии, таким образом, окружает ось Z. Вращение вокруг этой оси будет устойчивым, а вращение вокруг перпендикулярной к ней оси — неустойчивым. Действительно, если вращение совершалось, например, вокруг оси X и подверглось возмущению, то после прекращения такового мгновенная ось начнет описывать круговой конус полодии с осью симметрии Z. Если возмущение мало, то это будет конус очень большого раствора. Его образующие будут наклонены к оси симметрии Z под углом, близким к 90°. Двигаясь по такому конусу, мгновенная ось вращения далеко уйдет от своего исходного положения в теле. Однако она все время будет оставаться почти перпендикулярной к оси Z. Всякая прямая, перпендикулярная к оси и проходящая через центр масс тела, может служить перманентной осью вращения.

Когда моменты инерции I_x, I_y и I_z совпадают между собой, то коэффициенты уравнения (54.5) тождественно обращаются в нуль. Это означает, что любая ось, проходящая через центр масс тела, может быть свободной осью вращения.

9. Аналитическое исследование вращения твердого тела вокруг неподвижной точки можно производить также на основе *уравнений Эйлера*. Последние являются следствием уравнения момента импульса твердого тела относительно точки. Они определяют производную по времени угловой скорости вращения твердого тела $\boldsymbol{\omega}$. Вводится вращающаяся система прямоугольных координат, начало которой совпадает с центром масс тела, а координатные оси направ-

лены вдоль его главных осей X, Y, Z. Обозначим через **i**, **j**, **k** единичные векторы (орты) вдоль осей X, Y, Z. Уравнение моментов относительно начала координат запишется в виде

$$\frac{d}{dt}(I_x\omega_x\mathbf{i} + I_y\omega_y\mathbf{j} + I_z\omega_z\mathbf{k}) = \mathbf{M}.$$

Здесь подлежат дифференцированию не только компоненты угловой скорости, но и векторы **i**, **j**, **k**. Моменты же инерции I_x, I_y, I_z как величины постоянные дифференцировать не надо. Векторы **i**, **j**, **k** жестко связаны с телом, а потому вращаются вместе с ним. Производная $d\mathbf{i}/dt$ означает скорость точки тела, радиус-вектор которой равен **i**. Поэтому на основании формулы (46.11) можно написать

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{i}] = \omega_y[\mathbf{ji}] + \omega_z[\mathbf{ki}] = \omega_z\mathbf{j} - \omega_y\mathbf{k}.$$

Аналогично

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \omega_x\mathbf{k} - \omega_z\mathbf{i}, \qquad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \omega_y\mathbf{i} - \omega_x\mathbf{j}.$$

С использованием этих соотношений получаем

$$I_x\dot\omega_x\mathbf{i} + I_x\omega_x(\omega_z\mathbf{j} - \omega_y\mathbf{k}) + I_y\dot\omega_y\mathbf{j} + \\ + I_y\omega_y(\omega_x\mathbf{k} - \omega_z\mathbf{i}) + I_z\dot\omega_z\mathbf{k} + I_z\omega_z(\omega_y\mathbf{i} - \omega_x\mathbf{j}) = \\ = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} I_x\dot\omega_x + \omega_y\omega_z(I_z - I_y) &= M_x, \\ I_y\dot\omega_y + \omega_z\omega_x(I_x - I_z) &= M_y, \\ I_z\dot\omega_z + \omega_x\omega_y(I_y - I_x) &= M_z. \end{aligned} \qquad (54.6)$$

Это и есть уравнения Эйлера.

ГЛАВА VIII

ТЯГОТЕНИЕ

§ 55. ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА И ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

1. В результате длительной обработки многолетних наблюдений датского астронома Тихо Браге (1546—1601) немецкий ученый Кеплер эмпирически установил три закона движений планет. Эти законы формулируются следующие образом:

1) *каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце*;

2) *радиус-вектор планеты в равные времена описывает равные площади*;

3) *квадраты времен обращений планет относятся как кубы больших осей эллиптических орбит, по которым они движутся вокруг Солнца.*

Первые два закона были опубликованы Кеплером в 1609 г., последний — в 1619 г. *Законы Кеплера* естественным путем привели Ньютона к открытию *закона всемирного тяготения.* Рассмотрим этот вопрос.

Из первого закона Кеплера следует, что траектория планеты — плоская кривая. С учетом этого обстоятельства, как было показано в § 31, из второго закона Кеплера следует, что сила, заставляющая планету двигаться по замкнутым орбитам, направлена к Солнцу. Определим теперь, как эта сила изменяется с изменением расстояния от Солнца и как она зависит от массы планеты. Для упрощения расчетов допустим сначала, что планета движется не по эллипсу, а по кругу, в центре которого находится Солнце. Для планет Солнечной системы такое допущение не является особенно грубым. Эллипсы, по которым на самом деле движутся планеты, весьма мало отличаются от кругов. Ускорение планеты при равномерном движении по круговой орбите радиуса r выражается формулой

$$\mathbf{a}_r = -\omega^2 \mathbf{r} = -\frac{4\pi^2}{T^2}\mathbf{r}.$$

Для планет, движущихся по круговым траекториям, третий закон Кеплера записывается в виде

$$T_1^2 : T_2^2 : T_3^2 : \ldots = r_1^3 : r_2^3 : r_3^3 : \ldots,$$

или

$$\frac{r^3}{T^2} = \mathcal{K},$$

где $\mathcal{K}$ — постоянная для всех планет Солнечной системы. Она называется *постоянной Кеплера*. Через параметры эллиптической орбиты постоянная Кеплера выражается формулой

$$\mathcal{K} = \frac{a^3}{T^2}, \tag{55.1}$$

где a — длина большой полуоси орбиты.

Выразив T через $\mathcal{K}$ и r, для ускорения планеты при движении по круговой орбите получим

$$a_r = -\frac{4\pi^2\mathcal{K}}{r^2}. \tag{55.2}$$

Сила, действующая на планету, равна

$$F = -\frac{4\pi^2\mathcal{K}m}{r^2}, \tag{55.3}$$

где m — масса планеты.

Мы доказали, что ускорения двух разных планет, обращающихся вокруг Солнца по круговым орбитам, обратно пропорциональны квадратам расстояний их от Солнца. Но мы еще не доказали, что такая закономерность справедлива и для одной и той же планеты, обращающейся вокруг Солнца по эллиптической орбите. Чтобы доказать это, надо от рассмотрения круговых движений перейти к исследованию движений по эллипсу. Это будет сделано в следующем параграфе. Но можно обойтись и круговыми движениями, если использовать добавочное предположение, что сила взаимодействия между Солнцем и планетой зависит только от мгновенного расстояния между ними, но не зависит от формы траектории, по которой движется планета. Тогда формулы (55.2) и (55.3) можно применять не только к разным планетам, обращающимся по круговым орбитам на разных расстояниях от Солнца, но и к различным положениям одной и той же планеты, движущейся по эллиптической траектории.

2. Коэффициент пропорциональности $4\pi^2\mathcal{K}$, входящий в формулы (55.2) и (55.3), — один и тот же для всех планет, а потому он не может зависеть от массы планеты. Он может, однако, зависеть от параметров, характеризующих Солнце, поскольку последнее является источником сил, заставляющих планеты двигаться по замкнутым орбитам. Но Солнце и планета в их взаимодействии выступают как *равноправные тела*. Различие между ними только *количественное*. Они отличаются друг от друга массами. И если сила взаимодействия F пропорциональна массе планеты m, то она должна быть пропорциональна также и массе Солнца M. Для этой силы можно поэтому написать

$$F = G\frac{Mm}{r^2}, \tag{55.4}$$

где G — новая постоянная, уже не зависящая ни от массы Солнца, ни от массы планеты. Сравнивая эту формулу с (55.3), получаем следующее выражение для постоянной Кеплера:

$$\mathcal{K} \equiv \frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}. \tag{55.5}$$

3. Далее, Солнце и планеты отличаются друг от друга и от других тел только *количественно* — значениями масс. Поэтому естественно предположить, что притяжение существует не только между Солнцем и планетой, но и между планетами, а также между любыми другими телами, и что сила притяжения определяется формулой (55.4), в которой под M и m следует понимать массы взаимодействующих тел. Это предположение было введено Ньютоном и подтвердилось на опыте. Он сформулировал закон всемирного тяготения, согласно которому *любые два тела (материальные точки) притягиваются друг к другу с силами, пропорциональными произведению их масс и обратно пропорциональными квадрату расстояния между ними.* Такие силы называются *гравитационными* или *силами всемирного тяготения.* Коэффициент пропорциональности G, входящий в формулу (55.4), один и тот же для всех тел. В этом смысле он является универсальной постоянной. Это одна из важнейших мировых постоянных, называемая *гравитационной постоянной.*

В приведенной формулировке закона всемирного тяготения предполагается, что взаимодействующие тела являются *точечными.* Физически это означает, что размеры тел очень малы по сравнению с расстоянием между ними. Здесь, как и всегда в физике, слова «велик» и «мал» употребляются в относительном смысле — велик или мал *по сравнению с чем-то.* Указанное условие хорошо выполняется для взаимодействий Солнца с планетами, планет между собой и со спутниками. Но если речь идет о гравитационном притяжении двух тел с размерами 10 см, когда расстояние между их центрами масс составляет, например, 20 см, то такие тела не могут рассматриваться как точечные. Чтобы рассчитать их гравитационное взаимодействие, надо мысленно разбить каждое тело на очень малые части, подсчитать по формуле (55.4) силы притяжения между такими частями, а затем и эти силы геометрически сложить (проинтегрировать). В основе этого вычисления лежит *принцип суперпозиции гравитационных полей.* Согласно этому принципу *гравитационное поле, возбуждаемое какой-либо массой, совершенно не зависит от наличия других масс.* Кроме того, *гравитационное поле, создаваемое несколькими телами, равно геометрической сумме гравитационных полей, возбуждаемых этими телами в отдельности.* Принцип этот является обобщением опыта.

Пользуясь принципом суперпозиции легко доказать, что *два однородных шара притягиваются между собой так, как если бы их*

массы были сконцентрированы в их центрах (см. задачи 2, 3, 4 к этому параграфу.

Заметим еще, что каждая планета подвергается гравитационному притяжению не только Солнца, но и других тел Солнечной системы. Однако масса Солнца является преобладающей. Она более чем в 700 раз превосходит общую массу планет и всех остальных тел Солнечной системы. Благодаря этому Солнце является основным телом, управляющим движением планет. Законы Кеплера можно вывести из закона всемирного тяготения Ньютона (см. § 62). При таком выводе предполагается, что единственной силой, действующей на планету, является гравитационное притяжение Солнца. Поэтому *законы Кеплера являются приближенными законами*, не учитывающими гравитационное действие остальных тел Солнечной системы.

4. Во времена Ньютона закон всемирного тяготения был подтвержден только астрономическими наблюдениями над движениями планет и их спутников. Впервые непосредственное экспериментальное доказательство этого закона для земных тел, а также численное определение гравитационной постоянной G были даны английским физиком Г. Кавендишем (1731–1810) в 1798 г. Прибор Кавендиша состоял из легкого горизонтального коромысла (рис. 171*а*), на концах которого укреплялись два одинаковых свинцовых шарика мас-

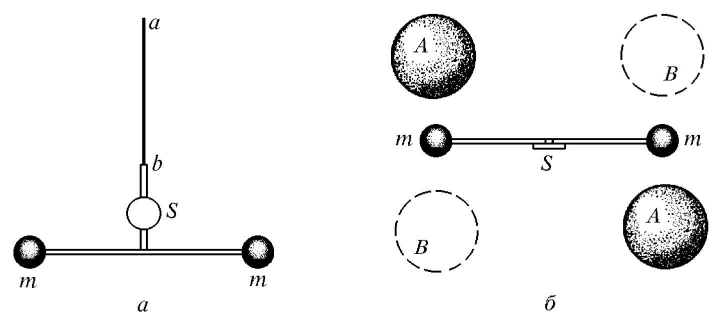


Рис. 171

сой m. Коромысло подвешивалось на тонкой вертикальной нити ab. Вблизи свинцовых шариков массой m помещались два других больших свинцовых шара с массой M каждый, причем $M \gg m$. Шары помещались сначала в положении AA, затем переводились в положение BB (рис. 171*б*). Благодаря гравитационному взаимодействию шариков m с шарами M коромысло поворачивалось из положения равновесия. Угол кручения α измерялся наблюдением луча света, отражавшегося от зеркальца S. Если r — расстояние между центрами малого и большого шаров, а l — длина коромысла, то момент пары гравитационных сил, поворачивающих коромысло, будет $G\frac{Mm}{r^2}l$. В положении равновесия этот вращающий момент должен

быть уравновешен упругим моментом закрученной нити $f\alpha$. Написав условие равновесия для положения свинцовых шаров сначала в AA ($\alpha = \alpha_1$), а затем в BB ($\alpha = \alpha_2$), получим два уравнения

$$f\alpha_1 = G\frac{Mm}{r^2}l, \quad f\alpha_2 = -G\frac{Mm}{r^2}l.$$

Из них находим

$$f(\alpha_1 - \alpha_2) = 2G\frac{Mm}{r^2}l.$$

Модуль кручения f легко найти, наблюдая период свободных колебаний коромысла

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{2f}}.$$

В результате получаем

$$G = \frac{lr^2}{M}\left(\frac{\pi}{T}\right)^2(\alpha_1 - \alpha_2).$$

5. Другой метод определения гравитационной постоянной был предложен немецким физиком-экспериментатором Филиппом Жолли (1809—1880) в 1878 г. На одном из плеч рычажных весов одна под другой подвешены две чашки (рис. 172), между которыми установлено неподвижно тяжелое свинцовое тело массой M правильной геометрической формы.

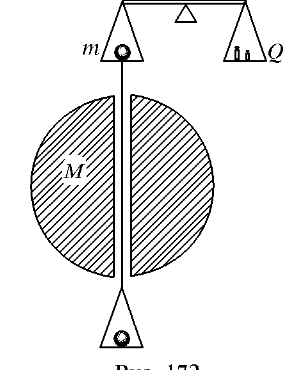


Рис. 172

В этом теле просверлен вертикальный канал, сквозь который свободно проходит проволока, соединяющая обе чашки. Если на верхнюю чашку положить тело массой m, то на него будет действовать вниз сила $Q_1 = mg + F$, где F — сила гравитационного притяжения между массами M и m. Она равна $F = kG\frac{Mm}{r^2}$, где r — расстояние между центрами рассматриваемых масс, а k — числовой коэффициент, зависящий от формы тела M. Для тел правильной геометрической формы его можно вычислить теоретически. Для шара $k = 1$. Если массу m перенести в нижнее положение, то сила F изменит направление. Сила, действующая вниз, станет $Q_2 = mg - F$. Значения Q_1 и Q_2 определяются по весу гирь, которые надо положить на чашку весов, подвешенную к другому плечу коромысла, чтобы весы находились в равновесии. Таким образом,

$$Q_1 - Q_2 = 2F = 2kG\frac{Mm}{r^2}.$$

Из этого соотношения и можно вычислить G.

6. Измерения G современными методами привели к результату

$$G = (6{,}6725 \pm 0{,}0005) \cdot 10^{-8}\ \text{дин} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{г}^{-2} = (6{,}6726 \pm 0{,}0005) \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}.$$

Гравитационная постоянная, как мы видим, весьма мала. Поэтому и гравитационные взаимодействия между обычными телами, даже считающимися большими с общежитейской точки зрения, ничтожно малы. Нетрудно подсчитать, что два точечных тела с массами по одному килограмму, находящиеся на расстоянии 1 м друг от друга, притягиваются с силой $F = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $= 6{,}67 \cdot 10^{-6}$ дин. Гравитационные силы ничтожны, когда речь идет о взаимодействии *элементарных частиц*. Здесь эти силы, принимая во внимание современное состояние теории элементарных частиц, не учитываются. Но, возможно, их надо будет учитывать при переходе к взаимодействиям на расстояниях порядка 10^{-33} см (см. задачу 1 к этому параграфу). Они являются *основными силами*, управляющими движением и эволюцией небесных тел, массы которых очень велики. В этих случаях наиболее интенсивные — *ядерные* — силы совсем не проявляются, поскольку их радиус действия всего порядка 10^{-13} см. *Электрические силы*, как и силы всемирного тяготения, являются силами *дальнодействующими*. Они убывают также обратно пропорционально квадрату расстояния. Однако на движение астрономических тел электрические силы не оказывают влияния, так как они могут быть и силами притяжения, и силами отталкивания. Все тела в высокой степени *электрически нейтральны*, действие положительных зарядов тела компенсируется равным и противоположно направленным действием отрицательных зарядов. Иное дело — гравитационные силы. Они всегда являются *силами притяжения*. Гравитационные поля тел складываются, а не вычитаются. Это обстоятельство и является причиной того, почему из всех фундаментальных сил гравитационные силы остаются *единственными силами*, управляющими движением массивных астрономических тел.

7. Ньютон ограничился констатацией наличия гравитационных сил и их количественным описанием. Но он воздержался от каких бы то ни было высказываний относительно их физической природы, справедливо считая, что по этому вопросу в его время, кроме фантастических измышлений, ничего сказать было нельзя. После Ньютона было немало попыток дать наглядное физическое объяснение гравитационного притяжения. Никакого научного и даже исторического интереса эти попытки в настоящее время не имеют. Теория тяготения получила дальнейшее развитие в *общей теории относительности* Эйнштейна. Но в ней речь идет не о наглядном физическом объяснении тяготения, а о *новом способе описания его и об обобщении ньютоновского закона тяготения.*

Отказ Ньютона от объяснения тяготения, от сведения его к другим физическим явлениям был воспринят его приверженцами как

общефизическая концепция *непосредственного действия на расстоянии*. Эта концепция не только считает тяготение неотъемлемым свойством материи, но идет значительно дальше. Она считает, что каждому телу присуща способность непосредственно воздействовать на другие тела, находящиеся в других местах пространства, причем это воздействие осуществляется без какого бы то ни было участия промежуточной среды или других физических агентов.

Непосредственное действие на расстоянии отвергается современной наукой. Современная физика считает, что *все взаимодействия осуществляются полями*. Однако она не пытается представить механизм действия поля как-то наглядно. Она наделяет поле лишь способностью к объективному существованию и к передаче взаимодействий. Тело A не непосредственно действует на тело B. Оно создает вокруг себя гравитационное поле. Это поле и воздействует на другое тело B и проявляется в виде силы, действующей на него.

ЗАДАЧИ

1. Найти отношение силы гравитационного притяжения между двумя электронами (и двумя протонами) к силе их электростатического отталкивания.

Ответ. $\frac{F_{\text{гр}}}{F_{\text{эл}}} = \frac{Gm^2}{e^2}$, где $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ — элементарный заряд. Подставляя в формулу массу электрона $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-28}$ г и массу протона $m_{\text{p}} = 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ г, получим для электрона $F_{\text{гр}}/F_{\text{эл}} = 2{,}4 \cdot 10^{-43}$, для протона $F_{\text{гр}}/F_{\text{эл}} = 8 \cdot 10^{-37}$.

2. Найти потенциальную энергию и силу гравитационного притяжения между однородной полной сферой массой M и материальной точкой массой m.

Решение. Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух точечных масс определяется формулой (25.6). Соединим центр сферы O с точкой A, в которой помещена точечная масса m (рис. 173 *а* и *б*). Из точки O, как из вершины, опишем два круговых конуса с общей осью OA,

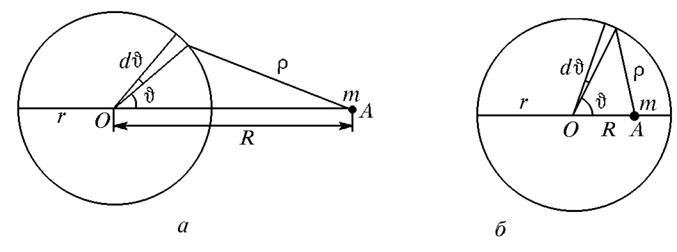


Рис. 173

образующие которых наклонены к этой оси под углами ϑ и $\vartheta + d\vartheta$. Они вырежут на поверхности сферы элементарной поясок площадью $dS = 2\pi r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta$, где r — радиус сферы. Масса этого пояска $dM = M\frac{dS}{4\pi r^2} = \frac{M}{2}\sin\vartheta\, d\vartheta$. Так как точки пояска равноудалены от точки A, то

потенциальная энергия гравитационного взаимодействия пояска и точечной массы m равна

$$dU = -G\frac{Mm}{2}\sin\vartheta d\vartheta.$$

Перейдем к новой переменной ρ — расстояние между точечной массой m и какой-либо точкой пояска. Эта переменная связана с ϑ соотношением $\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\vartheta$, где R — расстояние OA между центром сферы и точечной массой m. При перемещении вдоль поверхности сферы величины R и r остаются постоянными, поэтому

$$\rho d\rho = Rr\sin\vartheta\, d\vartheta,$$

а следовательно,

$$dU = -G\frac{Mm}{2Rr}d\rho,\quad U = -G\frac{Mm}{2Rr}\int\limits_{\rho_{\text{мин}}}^{\rho_{\text{макс}}} d\rho.$$

Если точка A лежит вне сферы, то максимальное и минимальное значения ρ равны соответственно $\rho_{\text{макс}} = R + r$ и $\rho_{\text{мин}} = R - r$. В этом случае интегрирование дает

$$U = -G\frac{Mm}{R}. \tag{55.6}$$

Потенциальная энергия такая же, как если бы вся масса сферы была сосредоточена в одной точке, а именно в центре сферы. То же справедливо и для силы взаимодействия F. Действительно, согласно (29.3), сила F определяется формулой

$$F = -\frac{dU}{dR} = -G\frac{Mm}{R^2}.$$

Можно сказать, что *сфера притягивает материальную точку так, как если бы вся ее масса была сосредоточена в ее центре.* Можно сказать и иначе: *точечная масса притягивает сферу так, как если бы вся масса последней была сосредоточена в ее центре.*

Если же точка A лежит внутри сферической полости (рис. 173 *б*), то $\rho_{\text{макс}} = r + R$, $\rho_{\text{мин}} = r - R$, и интегрирование дает

$$U = -G\frac{Mm}{r}. \tag{55.7}$$

На границе полости выражения (55.6) и (55.7) совпадают. Согласно (55.7) *потенциальная энергия материальной точки внутри полости не зависит от R, она постоянна. Сила F, действующая на материальную точку в этом случае, равна нулю,* так как $U = \text{const}$, а потому $F = -\dfrac{dU}{dR} = 0$.

3. Доказать, что *две однородные полые сферы притягиваются друг другу так, как если бы их массы были сосредоточены в их центрах.*

Доказательство. Если всю массу первого сферического тела сосредоточить в его центре, то создаваемое им гравитационное поле в объеме второго тела не изменится. Вместе с ним не изменится и сила взаимодействия со стороны первого тела на второе. По третьему закону Ньютона остается неизменной и сила, действующая на первое тело. Задача свелась к взаимо-

действию одной сферы с точечной массой. Повторением рассуждения убедимся, что и массу второго тела можно сосредоточить в одной точке, не меняя силы взаимодействия тел.

4. Доказать, что *два однородных шара притягиваются друг к другу так, как если бы масса каждого шара была сосредоточена в его центре.* Доказать также, что если внутри однородного шара имеется сферическая полость, центр которой совпадает с центром шара, то гравитационное поле внутри такой сферы равно нулю. Показать, что эти результаты справедливы и для шаров с концентрически слоистым распределением масс, т. е. таким, когда плотность вещества ρ в каждом шаре зависит только от расстояния до его центра.

5. Рассчитать напряженность гравитационного поля, т. е. силу, действующую на единицу массы, внутри и вне шара радиусом R, заполненного веществом с постоянной объемной плотностью ρ.

Решение. Поле вне шара равно $g = G\frac{M}{r^2}$, где M — масса шара. Для вычисления поля в точке A (рис. 174), лежащей внутри шара на расстоянии r от центра, проведем через эту точку вспомогательную сферу с центром в точке O. Вещество шара, расположенное вне вспомогательной сферы, не влияет на поле внутри нее. В частности, оно не влияет на поле в точке A. Гравитационное поле в точке A создается только веществом, сосредоточенным внутри вспомогательной сферы. Оно равно $G\frac{m}{r^2}$, где m — масса вещества, ограниченного вспомогательной сферой.

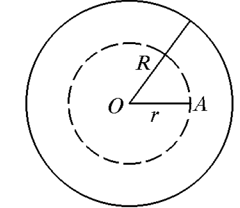


Рис. 174

Таким образом,

$$g = \begin{cases} G\frac{M}{r^2} = \frac{4\pi G}{3}\frac{R^3}{r^2}\rho, & \text{если } r \geqslant R, \\ G\frac{m}{r^2} = \frac{4\pi}{3}G\rho r, & \text{если } r \leqslant R \end{cases}. \qquad (55.8)$$

При $r = R$ оба выражения совпадают.

6. Подсчитать гравитационную энергию U шара радиусом R, равномерно заполненного веществом с объемной плотностью ρ.

Решение. Гравитационная энергия шара есть потенциальная энергия, обусловленная силами тяготения, действующими между материальными точками, на которые можно мысленно разбить шар. Она равна взятой с противоположным знаком работе, которую должны затратить внешние силы, чтобы привести вещество шара в бесконечно разрозненное состояние, когда каждая частица вещества удалена в бесконечность.

Эта работа не зависит от способа, каким шар переводится из начального состояния в конечное. Поэтому при вычислении можно поступить следующим образом. Разобьем мысленно весь шар на бесконечно тонкие концентрические слои и будем последовательно удалять в бесконечность каждый из таких слоев, начиная с самого крайнего. Напряженность поля тяготения в любой точке выделенного слоя, создаваемая веществом, внешним по отношению к этому слою, равна нулю. Поле создается только веществом, которое окружено рассматриваемым слоем. Если m — масса этого вещества, а dm — масса слоя, то работа, затрачиваемая на удаление

слоя в бесконечность, равна $dA = G\frac{m\,dm}{r}$. Но для однородного шара $m = M\left(\frac{r}{R}\right)^3$, где M — масса всего шара. Поэтому $dA = 3G\frac{M^2}{R^6}r^4\,dr$. Учитывая, что $dA = -dU$, и интегрируя, получим

$$U = -3\frac{GM^2}{R^6}\int_0^R r^4\,dr = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}. \qquad (55.9)$$

За нуль потенциальной энергии мы приняли энергию шара в бесконечно разрозненном состоянии.

Интересны астрофизические применения формулы (55.9). Физиков давно интересовал вопрос об источниках энергии, излучаемой Солнцем и звездами. В прошлом веке немецкий естествоиспытатель Герман Гельмгольц (1821—1894) и английский физик Уильям Томсон (Кельвин) (1824—1907) выдвинули гипотезу, согласно которой Солнце непрерывно сжимается под действием гравитационных сил. Выделяющееся при этом тепло и идет на излучение Солнца. Максимальная энергия, которая может выделиться в процессе гравитационного сжатия Солнца, соответствует начальному состоянию, в котором вещество Солнца было равномерно распределено по всему бесконечному пространству. Будем считать, что в конечном состоянии плотность солнечного вещества одинакова по всему его объему. В действительности она, конечно, возрастает к центру Солнца. Однако для оценок наше предположение не является очень грубым. Приняв его, можно воспользоваться формулой (55.9). Масса Солнца $M = 2\cdot 10^{33}$ г, радиус $R = 7\cdot 10^{10}$ см. Используя эти данные, получаем для выделившейся энергии

$$E = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} = 2{,}29\cdot 10^{48}\ \text{эрг}.$$

В настоящее время скорость излучения энергии Солнца составляет $3{,}83\cdot 10^{33}$ эрг/с. Если считать (при грубых оценках это допустимо), что эта скорость была постоянна во времени, то для возраста Солнца получится величина

$$t \approx \frac{2{,}29\cdot 10^{48}}{3{,}83\cdot 10^{33}} = 6\cdot 10^{14}\ \text{с} \approx 1{,}9\cdot 10^{7}\ \text{лет}.$$

Если воспользоваться распределением плотности вещества, соответствующим принятым в настоящее время моделям Солнца, то время t возрастет примерно в $6\cdot 10^7$ лет. Но и эта величина слишком мала. Возраст Земли по геологическим оценкам составляет около 4—$4{,}5\cdot 10^9$ лет. Возраст Солнца не меньше. Это показывает, что на настоящей стадии эволюции гравитационное сжатие является слишком слабым источником, чтобы покрыть потери энергии Солнца на излучение. В действительности источником солнечной энергии, равно как и энергии, излучаемой нормальными звездами, являются *ядерные реакции*, идущие в недрах Солнца и звезд. *Конечным итогом основных из этих реакций является превращение водорода в гелий.* Следует, однако, заметить, что гравитационное сжатие становится основным источником энергии на более поздних стадиях эволюции звезд (белые карлики, нейтронные звезды, или пульсары, коллапсары, или «черные дыры»).

7. В сплошном однородном шаре с плотностью вещества ρ сделана сферическая полость, центр которой O_1 смещен относительно центра шара O (рис. 175). Найти гравитационное поле в такой полости.

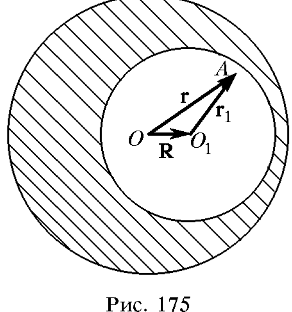


Рис. 175

Решение. Вообразим, что полость заполнена веществом, плотность которого равна плотности шара. Тогда искомое гравитационное поле g представится разностью гравитационных полей двух сплошных шаров с центрами в O и O_1 соответственно. Точка наблюдения A расположена внутри каждого из этих шаров. Поэтому можно воспользоваться формулой (55.8) и написать

$$\mathbf{g} = -\frac{4\pi}{3} G\rho\mathbf{r} - \left(-\frac{4\pi}{3} G\rho\mathbf{r}_1\right) = -\frac{4\pi}{3} G\rho\mathbf{R},$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, проведенный из центра O к центру полости O_1. Поле однородно, т. е. во всех точках полости оно одинаково.

§ 56. УСКОРЕНИЕ ПЛАНЕТ И КОМЕТ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО КОНИЧЕСКИМ СЕЧЕНИЯМ

1. Замена эллиптических орбит круговыми была произведена в предыдущем параграфе исключительно в целях упрощения вычислений. Рассмотрим теперь задачу более строго, не прибегая к такому упрощению. Наши вычисления будут справедливы не только для *планет*, но и для *комет*. Последние, как показывают наблюдения, двигаются по *гиперболам* и *параболам* с фокусом в точке нахождения Солнца, причем это движение подчиняется второму закону Кеплера. Третий закон Кеплера для гиперболических и параболических движений, конечно, теряет смысл. Однако для вычисления ускорения планеты или кометы он не нужен. Действительно, при заданной траектории второй закон Кеплера определяет скорость планеты или кометы на этой траектории. Этого достаточно, чтобы полностью описать движение тела, т. е. указать его положение и скорость в любой момент времени. Зная это, можно вычислить ускорение тела в любой точке траектории. Приведем это элементарное вычисление.

2. Введем полярную систему координат с полюсом в фокусе F_1, где находится Солнце, и полярной осью PA, направленной вдоль большой оси эллипса или гиперболы (рис. 176). Ускорение движущегося тела разложим на радиальную составляющую a_r, направленную вдоль радиуса r, и азимутальную составляющую a_φ, перпендикулярную к радиусу. Они определяются выражениями

$$a_r = \ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r, \quad a_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) \tag{56.1}$$

(см. § 46). Величина

$$\sigma = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \tag{56.2}$$

есть секториальная скорость, т. е. площадь, описываемая радиусом-вектором планеты или кометы в единицу времени. По второму закону Кеплера она постоянна, а потому $a_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(2\sigma) = 0$. Значит, ускорение рассматриваемого небесного тела не имеет азимутальной составляющей, т. е. направлено к Солнцу. Этот результат был уже получен в § 31 иным путем.

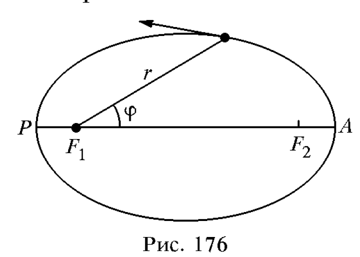


Рис. 176

Чтобы найти радиальное ускорение a_r, надо вычислить производные $\ddot{r}$ и $\dot{\varphi}$. Производная $\dot{\varphi}$ определяется формулой (56.2). Для вычисления производной $\ddot{r}$ воспользуемся уравнением конического сечения в полярной системе координат

$$r(1 - e\cos\varphi) = p, \tag{56.3}$$

где p и e — постоянные величины, из которых первая называется *параметром эллипса*, а вторая — его *эксцентриситетом*. Не нарушая общности, обе эти величины можно считать неотрицательными. Для эллипса $e < 1$, для параболы $e = 1$, для гиперболы $e > 1$. В предельных случаях, когда $e = 0$ и $e = \infty$, получаются круг и прямая линия. Дифференцируя уравнение (56.3) по времени, получим

$$\dot{r}(1 - e\cos\varphi) + er\dot{\varphi}\sin\varphi = 0,$$

или после умножения на r с учетом соотношений (56.2) и (56.3)

$$p\dot{r} + 2e\sigma\sin\varphi = 0.$$

Вторичное дифференцирование дает

$$p\ddot{r} + 2\sigma e\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} = 0.$$

Подставляя сюда $\dot{\varphi} = \frac{2\sigma}{r^2}$, $e\cos\varphi = 1 - \frac{p}{r}$, получим

$$\ddot{r} = -\frac{4\sigma^2}{pr^2} + \frac{4\sigma^2}{r^3} = -\frac{4\sigma^2}{pr^2} + \dot{\varphi}^2 r.$$

После этого из первой формулы (56.1) находим

$$a_r = -\frac{4\sigma^2}{pr^2}. \tag{56.4}$$

Таким образом, *из первых двух законов Кеплера вытекает, что ускорение планеты или кометы обратно пропорционально квадрату ее расстояния от Солнца.*

3. Третий закон Кеплера позволяет доказать, что коэффициент пропорциональности $4\sigma^2/p$ — один и тот же для всех планет. Докажем это. Площадь эллипса равна πab, где a и b — длины большой и малой полуосей его. Так как секториальная скорость σ постоянна, то $\sigma = \pi ab/T$, где T — период обращения планеты по ее орбите. Воспользуемся еще формулой аналитической геометрии $p = b^2/a$. Тогда из (56.4) получим

$$a_r = -\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}\frac{1}{r^2}. \tag{56.5}$$

(При равномерном вращении по окружности эта формула переходит в известную формулу $a_r = -\frac{4\pi^2 r}{T^2}$.) Вводя постоянную Кеплера (55.1), получим

$$a_r = \frac{4\pi^2 \mathcal{K}}{r^2}. \tag{56.6}$$

Этот результат совпадает с прежней формулой (55.2), но при его выводе здесь были использованы только эмпирические законы Кеплера без привлечения каких бы то ни было дополнительных соображений. Таким образом, формула (55.2) оказалась точной. Этого и следовало ожидать, так как в соответствии с основными положениями механики Ньютона ускорение планеты должно определяться только взаимным расположением Солнца и планеты и не может зависеть от вида траектории и скорости планеты. По той же причине формула (56.6) может служить и для вычисления ускорений комет, хотя третий закон Кеплера для них и не имеет смысла. В этом случае числовое значение постоянной $\mathcal{K}$ будет тем же самым, но она не может быть выражена через параметры орбиты кометы формулами, аналогичными (55.1).

4. Движение по параболе можно рассматривать как предельный случай движения по эллипсу, один из фокусов которого удален в бесконечность. Движение по гиперболе нуждается, однако, в некоторых пояснениях.

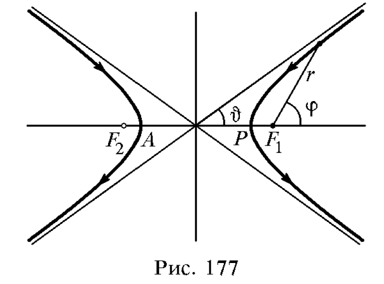


Рис. 177

Гипербола состоит из двух не связанных между собой ветвей. Чтобы обе ветви представлялись единым уравнением (56.3), надо допустить, чтобы расстояние r могло принимать не только положительные, но и *отрицательные* значения. Пусть ϑ — угол, определяемый условием $\vartheta = 1/e$. Он определяет направления *асимптот гиперболы* (рис. 177). Если $|\varphi| > \vartheta$, то r положительно. Этому соответствует правая ветвь гиперболы. Если $|\varphi| < \vartheta$, то r отрицательно. Тогда точку кривой надо искать не в направлении по-

лупрямой, проведенной под углом φ, а в прямо противоположном направлении. Получится левая ветвь гиперболы.

Конечно, движущаяся точка не может перескочить с одной ветви гиперболы на другую. Если на нее действует сила притяжения, то траектория должна быть обращена вогнутостью к силовому центру. Например, если силовой центр (Солнце) находится в фокусе F_1, то возможно движение только по правой ветви гиперболы. Однако, чтобы подметить общие закономерности движений по коническим сечениям, а не только по эллипсам, имеет смысл чисто формально ввести вспомогательную материальную точку, движущуюся по левой ветви гиперболы под действием силы отталкивания, исходящей из того же силового центра F_1. Потенциальная энергия вспомогательной точки представляется выражением $U = +G\frac{Mm}{|r|}$. Она положительна, поскольку силы являются силами отталкивания. Но так как на левой ветви гиперболы величины r отрицательны, то это выражение можно записать в виде $U = -G\frac{Mm}{r}$. Эта формула в точности совпадает с формулой, которой выражается потенциальная энергия действительной точки, движущейся по правой ветви гиперболы. Поэтому если энергия и момент импульса вспомогательной точки относительно фокуса F_1 равны соответствующим величинам для действительной точки, то движения обеих точек будут описываться *одними и теми же уравнениями*. В математических расчетах имеет значение не то, что движется, а то, какими уравнениями движение описывается. Формально математически дело происходит так, как если бы имелась всего одна материальная точка, обладающая способностью «перескакивать» с одной ветви гиперболы на другую. Целесообразность такого искусственного подхода будет проиллюстрирована на одном примере в § 58. Гравитационных сил отталкивания не существует. Но умозрительно их вводить можно. Кроме того, силы отталкивания возникают при электрических взаимодействиях одноименно заряженных частиц. Они, как и силы тяготения, убывают обратно пропорционально квадрату расстояния. Поэтому движение под действием сил отталкивания представляет не только умозрительный, но и физический интерес.

§ 57. УСЛОВИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО, ПАРАБОЛИЧЕСКОГО И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЙ

1. *Когда траектория эллиптическая, движение планеты финитно*, т. е. планета движется в ограниченной области пространства, не уходя в бесконечность. Напротив, в *случае гиперболических и параболических траекторий движение инфинитно* — движение планеты не стеснено определенной областью

пространства, она может удаляться в бесконечность. Таким образом, задача сводится, к нахождению условий финитности и инфинитности движения планеты.

Если E — полная энергия планеты, то

$$\frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{r} = E = \text{const}. \tag{57.1}$$

Кинетическую энергию Солнца мы не учитываем, считая, что она пренебрежимо мала по сравнению с кинетической энергией планеты. Это справедливо ввиду малости массы планеты по сравнению с массой Солнца. Аналогично если L — момент импульса планеты относительно Солнца, то

$$mr^2\dot{\varphi} = L = \text{const}. \tag{57.2}$$

Исключим из этих уравнений угловую скорость $\dot{\varphi}$. С этой целью разложим полную скорость v на радиальную составляющую v_r и азимутальную составляющую $r\dot{\varphi}$. Тогда

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}v_r^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{m}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2mr^2},$$

и уравнение (57.1) примет вид

$$\frac{m}{2}v_r^2 - G\frac{Mm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} = E = \text{const}. \tag{57.3}$$

Это уравнение содержит только одну неизвестную — радиальную скорость v_r. Формально оно может рассматриваться как *уравнение энергии для одномерного — радиального — движения точки*. Роль потенциальной энергии играет функция

$$V(r) = -G\frac{Mm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

2. Задача свелась к нахождению условий финитности и инфинитности одномерного движения с потенциальной энергией $V(r)$. Этот вопрос был исследован в § 25. Наиболее удобен для решения задачи графический метод. На рис. 178 штриховые кривые представляют соответственно графики функций

$$V_1(r) = -G\frac{Mm}{r}$$

и

$$V_2(r) = \frac{L^2}{2mr^2},$$

причем предполагается, что $L \neq 0$. Интересующая нас кривая $V(r)$ найдется сложением ординат этих двух графиков. При $r \to 0$ функция $V_2(r)$ быстрее стремится к бесконечности, чем функция $V_1(r)$. Поэтому при малых r функция $V(r) = V_1(r) + V_2(r)$ положительна

и асимптотически стремится к $+\infty$, когда $r \to 0$. Наоборот, при $r \to \infty$ функция $V_1(r)$ медленнее приближается к нулю, чем $V_2(r)$. Поэтому при больших r функция $V(r)$ отрицательна и асимптотически приближается к нулю, когда $r \to \infty$. График этой функции представлен на рис. 178 сплошной линией. Кривая $V(r)$ имеет вид «потенциальной ямы». Если $L = 0$, то $V(r) \equiv V_1(r)$, минимум на кривой смещается в начало координат и уходит в $-\infty$. Это соответствует случаю, когда планета движется вдоль прямой, проходящей через центр Солнца.

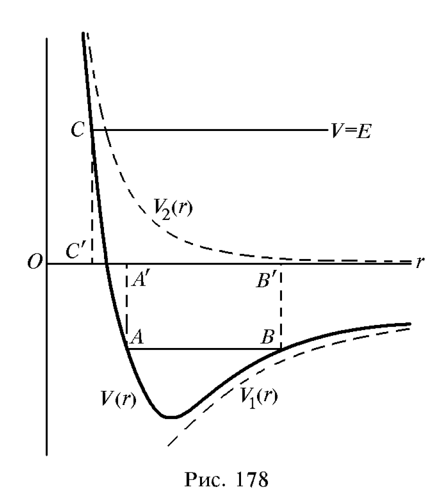


Рис. 178

Так как величина $\frac{1}{2} m v_r^2$ не может быть отрицательной, то из уравнения (57.3) следует, что область, в которой может находиться планета, определяется условием $V(r) \leqslant E$. Проведем горизонтальную прямую $V = E = \text{const}$. Участки кривой $V(r)$, лежащие выше этой прямой, соответствуют точкам пространства, которые не могут быть достигнуты планетой с энергией E. Если $E < 0$, то указанная прямая пересечет кривую $V = V(r)$ в двух точках A и B. Пусть A' и B' — их проекции на горизонтальную ось. Планета может совершать движение только в области между A' и B', она будет «локализована в потенциальной яме» $V = V(r)$. В этом случае движение планеты финитно, и траектория будет *эллиптической*. Если $E > 0$, то прямая пересечет кривую $V(r)$ только в одной точке C, проекцией которой на горизонтальную ось является точка C'. Если планета двигалась справа налево, то в точке C' она переменит направление движения на противоположное и начнет двигаться вправо, монотонно удаляясь в бесконечность. Ее движение инфинитно, а траектория — *гиперболическая*. Наконец, при $E = 0$ движение также инфинитно. Этому промежуточному случаю между эллиптическим и гиперболическим движениями соответствует *движение по параболе*.

Таким образом, *при $E > 0$ движение гиперболическое, при $E < 0$ — эллиптическое, при $E = 0$ — параболическое. В случае сил отталкивания энергия E всегда положительна, а потому движение в этом случае всегда гиперболическое (в частности, прямолинейно)*. Так как при $r \to \infty$ функция $V(r)$ обращается в нуль, то

$$E = \frac{1}{2} m v_\infty^2. \tag{57.4}$$

Отсюда следует, что *при гиперболическом движении материальная точка приходит в бесконечность с конечной скоростью* v_∞, *при параболическом движении — с нулевой скоростью*. Начальная скорость $v_п$, которую надо сообщить материальной точке, чтобы она стала двигаться по параболе, называется *параболической скоростью*. Параболическую скорость можно определить из уравнения (57.1), подставив в него $E = 0$. Если r_0 — начальное значение радиуса r, то

$$\frac{mv_п^2}{2} - G\frac{Mm}{r_0} = 0,$$

откуда

$$v_п = \sqrt{2G\frac{M}{r_0}}. \tag{57.5}$$

Параболическая скорость связана простым соотношением с «*круговой*» скоростью $v_к$. Так называется скорость, которой должна обладать планета, чтобы под действием гравитационной силы Солнца двигаться вокруг него по кругу радиуса r_0. Она найдется, если центростремительное ускорение $v_к^2/r_0$ приравнять гравитационной силе $G\frac{M}{r_0^2}$, действующей на единицу массы. Это дает

$$v_к = \sqrt{G\frac{M}{r_0}}. \tag{57.6}$$

Таким образом,

$$v_п = v_к\sqrt{2}. \tag{57.7}$$

ЗАДАЧИ

1. Допустим, что в результате взрыва тело, двигавшееся по круговой орбите вокруг Солнца, распалось на два осколка одинаковой массы. Один осколок непосредственно после взрыва остановился, другой продолжал движение. По какой траектории будет двигаться второй осколок: эллиптической, гиперболической или параболической?

Ответ. По гиперболической.

2. В условиях предыдущей задачи оба осколка разлетаются в перпендикулярных направлениях с одинаковыми скоростями. По каким орбитам они будут двигаться?

Ответ. Оба осколка будут двигаться по параболам.

§ 58. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОРБИТЫ

1. Длины большой и малой осей эллиптической орбиты планеты можно рассчитать с помощью законов сохранения энергии и момента импульса. В *перигелии* P и в *афелии* A (рис. 179) радиальная

скорость планеты равна нулю. Поэтому, полагая в уравнении (57.3) $v_r = 0$, получим для этих точек

$$r^2 + G\frac{Mm}{E}r - \frac{L^2}{2mE} = 0. \qquad (58.1)$$

При $E < 0$ это квадратное уравнение имеет два вещественных положительных корня r_1 и r_2. Один из корней соответствует перигелию P, другой — афелию A. Сумма корней $r_1 + r_2$ дает длину *большой оси* эллипса. Пользуясь для этой длины стандартным обозначением $2a$, получим

$$2a = r_1 + r_2 = -G\frac{Mm}{E} = -G\frac{M}{\varepsilon}, \qquad (58.2)$$

где $\varepsilon = E/m$ — полная энергия, приходящаяся на единицу массы планеты. Так как для движения по эллипсу $\varepsilon < 0$, то выражение (58.2) существенно положительно, как это и должно быть.

Круговые траектории являются вырожденными случаями эллиптических. Условие движения по круговой орбите найдется из уравнения (58.2), если в нем положить $r_1 = r_2 = r$. Тогда получится $2E = -GMm/r$ или $2E = U$. Записав это в виде $E = U - E$ и воспользовавшись соотношением $E = K + U$, получим

$$E = -K. \qquad (58.3)$$

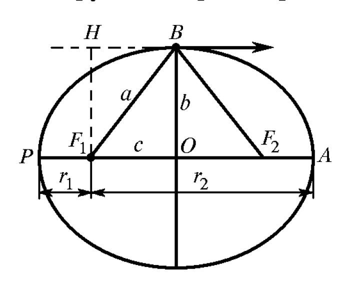


Рис. 179

Таким образом, *при круговом движении сумма полной и кинетической энергий равна нулю.* Нетрудно показать, что это условие снова приводит к формуле (57.6).

Для эллиптического движения формула (58.3) также справедлива, но под K следует понимать *среднее по времени* значение кинетической энергии планеты. Действительно, эллиптическое движение финитно, и к нему можно применить теорему вириала (§ 25, п. 6). Применительно к движению планеты эта теорема дает

$$\overline{K} = -\frac{1}{2}\overline{\mathbf{rF}} = \frac{1}{2}\overline{rF} = \frac{1}{2}GMm\overline{\left(\frac{1}{r}\right)} = -\frac{1}{2}\overline{U}.$$

Вычитая из обеих частей $1/2\,\overline{K}$ и учитывая, что $E = \overline{K} + \overline{U}$, получим

$$\overline{K} = -E.$$

Это и доказывает наше утверждение.

2. Найдем теперь длину *малой полуоси эллипса b.* Для этого помимо энергии надо знать еще момент импульса планеты или ее секториальную скорость $\sigma = \dot{S}$. Большую ось эллипса можно считать известной, поскольку она однозначно определяется энергией планеты. Пусть B — одна из точек, в которых малая ось пересекается с

эллипсом (рис. 179). Так как сумма расстояний любой точки эллипса от его фокусов F_1 и F_2 постоянна и равна $2a$, то $F_1B = a$. Секториальная скорость в точке B равна

$$\sigma = \frac{1}{2} vb, \tag{58.4}$$

так как b есть длина перпендикуляра F_1H, опущенного из фокуса F_1 на направление скорости в этой точке. Скорость v в точке B определится из уравнения энергии. Полагаем в нем $r = a$ и находим

$$\frac{v^2}{2} - G\frac{M}{a} = \varepsilon.$$

Подставив сюда выражение для ε из (58.2), определим v. После этого найдем

$$b = 2\sigma\sqrt{\frac{a}{GM}}. \tag{58.5}$$

3. Распространим теперь полученные результаты на случай *гиперболического движения*. Для этого воспользуемся искусственным приемом, указанным в п. 4 § 56. По правой ветви гиперболы (см. рис. 177) движется комета, по левой — соответствующая ей вспомогательная материальная точка. Эти движения описываются одним и тем же уравнением (57.3). В вершинах гиперболы P и A радиальная скорость v_r равна нулю, и мы снова приходим к квадратному уравнению (58.1). Однако теперь энергия E положительна, так что знаки корней этого уравнения противоположны. Положительный корень r_1 соответствует вершине P, отрицательный r_2 — вершине A. Сумма обоих корней $r_1 + r_2$ отрицательна. По абсолютной величина эта сумма равна расстоянию между вершинами P и A. Используя для этого расстояния стандартное обозначение $AP = 2a$, получим

$$2a = -(r_1 + r_2) = G\frac{Mm}{E} = G\frac{M}{\varepsilon}. \tag{58.6}$$

Эта формула в точности совпала бы с формулой (58.2), если бы условиться считать расстояние между вершинами гиперболы величиной отрицательной.

4. Найдем теперь аналог формулы (58.4) для гиперболического движения. Расстояние между фокусами F_1 и F_2 принято обозначать через $2c$, а под b понимать квадратный корень $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Проведем через фокус F прямую, параллельную одной из асимптот гиперболы (рис. 180). Из фокуса F_1 на прямую F_2M опустим перпендикуляр F_1M. Длину отрезка F_2M можно рассматривать как разность расстояний от фокусов F_1 и F_2 до бесконечно удаленной точки, в которой пересекаются параллельные прямые F_2M и OB. Поэтому в силу известного свойства гиперболы $F_2M = 2a$. На основании теоремы Пифагора делаем вывод, что расстояние F_1M равно $2b$. Секториальную скорость, как величину постоянную, достаточно вычислить для точки, дви-

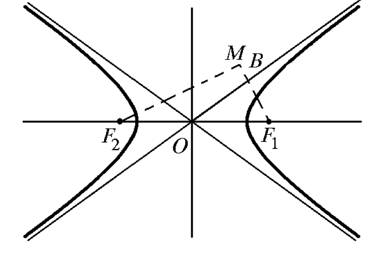


Рис. 180

жущейся в бесконечность. Радиус-вектор такой точки в единицу времени описывает треугольник с основанием v_∞ и высотой $F_1B = b$. Его площадь

$$\sigma = \frac{1}{2} b v_\infty \qquad (58.7)$$

и дает секториальную скорость. При этом величина v_∞ определяется формулой (57.4), которую можно записать также в виде

$$\frac{v_\infty^2}{2} = \varepsilon. \qquad (58.8)$$

Угол ϑ между асимптотами гиперболы можно вычислить по формуле

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{b}{a} = \frac{b v_\infty^2}{GM}. \qquad (58.9)$$

5. Параметр p для эллипса и гиперболы определяется выражением $p = b^2/a$. Подставляя сюда соответствующие значения для b и a, в обоих случаях найдем

$$p = \frac{4\sigma^2}{GM}. \qquad (58.10)$$

Той же формулой определяется параметр p и для параболы, поскольку парабола является предельной кривой, в которую переходят эллипс и гипербола. Для параболы параметр p является единственной величиной, определяющей ее форму.

6. Вид траектории планеты, конечно, определяется начальными условиями, т. е. положением и скоростью планеты в некото-

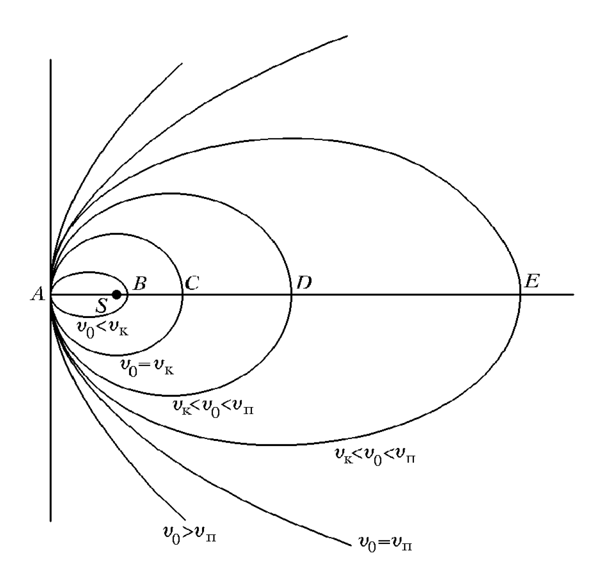


Рис. 181

рый момент времени, который условно можно принять за начальный. Иллюстрируем это следующим примером. Пусть S — Солнце, а A — начальное положение планеты (рис. 181). Расстояние AS обозначим через r_0. Будем сообщать планете в точке A скорость v_0 в направлении, перпендикулярном к AS. Посмотрим, как будет меняться вид траектории при изменении величины v_0. Если полная энергия планеты отрицательна, т. е. v_0 меньше параболической скорости $v_{\text{п}}$, то траекторией планеты будет эллипс. При $v_0 = 0$ эллипс вырождается в прямую, проходящую через Солнце S. Если $v_0 = v_{\text{к}}$, то планета будет двигаться по кругу. В этом случае точки A и C равноудалены от Солнца. Расстояние между ними (большая ось) равно $2r_0$. При уменьшении энергии большая ось эллипса уменьшается. При $v_0 < v_{\text{к}}$ она становится меньше $2r_0$. В этом случае точка A удалена от Солнца S дальше (афелий), чем точка B (перигелий). При $v_0 > v_{\text{к}}$ наоборот, большая ось эллипса больше $2r_0$, т. е. перигелием будет точка A, а афелием — точка D (или E). При $v = v_{\text{п}} = v_{\text{к}}\sqrt{2}$ траекторией будет парабола. При $v > v_{\text{п}}$ она переходит в гиперболу. Все эти результаты представлены в табл. 2:

Таблица 2

Начальная скорость	Траектория планеты
$v_0 = 0$	Прямая, проходящая через Солнце
$v_0 < v_{\text{к}}$	Эллипс с перигелием в точке B и афелием в точке A
$v_0 = v_{\text{к}}$	Окружность с центром в точке нахождения Солнца
$v_{\text{к}} < v_0 < v_{\text{п}}$	Эллипс с перигелием в точке A и афелием в точке D
$v_0 = v_{\text{п}}$	Парабола
$v_0 > v_{\text{п}}$	Гипербола

ЗАДАЧИ

1. Космический корабль движется вокруг Земли по близкой эллиптической орбите. В перигее касательная скорость корабля v увеличивается на $\Delta v = 10$ м/с. Что сделается с перигеем и апогеем при таком изменении скорости?

Решение. Перигей останется на месте, поскольку в нем меняется только касательная скорость. Из формулы (58.2) следует, что $\ln a = -\ln(-\varepsilon) + \text{const}$, и далее, что $\Delta a/a = -\Delta\varepsilon/\varepsilon$. Полная энергия $\varepsilon = \varepsilon_{\text{пот}} + \varepsilon_{\text{кин}}$. В перигее с точностью до второго порядка потенциальная энергия не меняется. Поэтому $\Delta\varepsilon \approx \Delta\varepsilon_{\text{кин}} = \Delta(v^2/2) = v\Delta v$. С учетом (58.2) $\Delta a/a = 2av\Delta v/GM$. Но $GM = gr^2$, где g — ускорение свободного падения в перигее, а r — расстояние до него от центра Земли. С учетом

$v_к^2 = gr$ получаем

$$\frac{\Delta a}{a} = 2av\,\frac{\Delta v}{v_к^2 r}.$$

Приближенно $v = v_к$, $r = a$, так что

$$\frac{\Delta a}{a} \approx 2\,\frac{\Delta v}{v_к} \approx \frac{1}{400}.$$

Полагая $a \approx 6400$ км, $v_к \approx 8$ км/с, найдем $\Delta\,(2a) = 33$ км. Большая ось эллиптической орбиты удлинится примерно на 33 км. Это произойдет за счет удаления апогея, так как перигей остается на месте.

2. Космический корабль движется вокруг Земли по близкой эллиптической орбите. Перигей находится на расстоянии 200 км от поверхности Земли, апогей — на расстоянии 233 км. Как надо изменить касательную скорость в перигее, чтобы корабль начал двигаться по круговой орбите? На сколько будет удалена круговая орбита от поверхности Земли?

Ответ. 200 км; $\Delta v \approx (v_к/2)\,(\Delta a/a) \approx -10$ м/с.

3. В классических опытах Резерфорда исследовалось рассеяние α-частиц на атомных ядрах различных химических элементов. Считая ядро бесконечно тяжелым и полагая, что рассеяние вызывается кулоновскими силами отталкивания, показать, что угол отклонения скорости α-частицы от первоначального направления полета θ связан с прицельным расстоянием b соотношением

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = \frac{mbv_\infty^2}{2Ze^2}, \tag{58.11}$$

где m — масса α-частицы, v_∞ — ее скорость вдали от ядра, $2e$ — ее заряд, Ze — заряд ядра (e — элементарный заряд, Z — порядковый номер элемента).

Примечание. *Прицельным расстоянием* называется длина перпендикуляра, опущенного из рассеивающего центра (ядра) на исходное направление касательной к траектории, когда рассеиваемая частица находится в бесконечности.

Мы воспользуемся формулой (58.11) в атомной физике при рассмотрении опытов Резерфорда.

§ 59. УЧЕТ ДВИЖЕНИЯ СОЛНЦА

1. При рассмотрении планетных движений мы не учитывали движение Солнца, считая его массу бесконечно большой по сравнению с массой планеты. Для ускорения планеты мы писали

$$m\,\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{a}_{абс} = \mathbf{F}, \tag{59.1}$$

где $\mathbf{F} = -G\,\dfrac{Mm}{r^3}\,\mathbf{r}$ — ньютонова сила гравитационного притяжения, действующая на планету со стороны Солнца. Символом $\mathbf{a}_{абс}$ обозначено ускорение планеты относительно какой-то инерциальной системы отсчета, например системы Коперника. Учтем теперь движение Солнца. Чтобы получить уравнение движения планеты относительно Солнца, надо массу планеты m заменить на приведенную

массу $\mu = \frac{Mm}{M+m}$ (см. § 20). В результате уравнение относительного движения примет вид

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} \equiv \mu\mathbf{a}_{\text{отн}} = \mathbf{F}.$$

Подставив выражение для μ, получим

$$m\mathbf{a}_{\text{отн}} = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\mathbf{F}. \tag{59.2}$$

Формально дело происходит так, как если бы Солнце оставалось неподвижно, но гравитационная постоянная увеличилась в $(1 + m/M)$ раз. Поэтому *для относительного движения первый и второй законы Кеплера остаются справедливыми.* Зато третий закон должен быть уточнен. Для этого достаточно в формуле (55.5) постоянную G заменить на $G(1 + m/M)$. Это приводит к соотношению

$$\frac{a^3}{T^2(M+m)} = \frac{G}{4\pi^2}. \tag{59.3}$$

Оно показывает, что *отношение* $\frac{a^3}{T^2(M+m)}$ *является универсальной постоянной, т. е. не зависит ни от масс взаимодействующих тел, ни от расстояния между ними.* Таким образом, *третий закон Кеплера для относительного движения не вполне точен.* То обстоятельство, что для планет Солнечной системы он выполняется с большой точностью, связано с тем, что масса планеты очень мала по сравнению с массой Солнца.

Отметим еще соотношение

$$\frac{a_{\text{отн}}}{a_{\text{абс}}} = 1 + \frac{m}{M}, \tag{59.4}$$

которое непосредственно следует из сравнения формул (59.1) и (59.2).

2. На формулах (55.5) и (59.3) основано определение масс планет, имеющих спутников, а также суммы масс двойных звезд. Если масса спутника пренебрежимо мала по сравнению с массой планеты, то для движения спутника справедлив третий закон Кеплера в форме (55.5). Постоянную Кеплера $\mathscr{K}$ можно вычислить, измерив размеры орбиты и время обращения спутника. Зная гравитационную постоянную G, по формуле (55.5) можно вычислить массу планеты M в абсолютных единицах. В астрономии, однако, предпочитают за единицу массы принимать массу Земли. Для определения масс планет в таких единицах не требуется знать числовое значение гравитационной постоянной, известное не очень точно.

В качестве примера найдем отношение массы Солнца $M_{\text{С}}$ к массе Земли $m_{\text{З}}$. Массу Земли будем считать пренебрежимо малой по сравнению с массой Солнца. Точно так же пренебрежем массой Луны по сравнению с массой Земли. Для земной орбиты имеем $a_{\text{З}} = 1{,}496 \cdot 10^8$ км, $T_{\text{З}} = 365{,}26$ суток, для лунной $a_{\text{Л}} = 3{,}844 \cdot 10^5$ км,

$T_Л = 27{,}32$ суток. По формуле (55.5) получаем

$$\frac{M_С}{m_З} = \left(\frac{a_З}{a_Л}\right)^3 \left(\frac{T_Л}{T_З}\right)^2 = 3{,}298\cdot 10^5.$$

В действительности, как видно из формулы (59.3), таким путем находится отношение $\frac{M_С + m_З}{m_З + m_Л}$. Метод дает отношение масс центральных тел, вокруг которых вращаются спутники, только тогда, когда масса каждого спутника пренебрежимо мала по сравнению с массой соответствующего центрального тела. Это условие идеально соблюдается для искусственных спутников. Например, можно найти отношение масс Луны и Земли, если измерить параметры орбит искусственных спутников, обращающихся вокруг них.

Труднее определить массу планеты, если у нее нет спутников. В этом случае применяются два способа. Во-первых, массу планеты можно вычислить по вызываемому ею возмущению в движении других небесных тел. Примером может служить Меркурий, масса которого была определена по возмущениям орбиты кометы Энке. Во-вторых, массу планеты можно оценить по ее блеску, если сделать правдободобные предположения относительно ее плотности и альбедо, т. е. величины, характеризующей способность поверхности тела отражать (рассеивать) падающее на нее излучение. Таким путем впервые была оценена масса Плутона. Труднее определять массы звезд. В случае двойной звезды это делается аналогично тому, как и для планеты со спутником, — по периоду обращения компонентов звезды вокруг их центра масс и по расстоянию между ними. Но этот метод определяет не массу каждого компонента звезды, а только сумму этих масс.

ЗАДАЧИ

1. Найти расстояние R между компонентами двойной звезды, если их общая масса $M_1 + M_2$ равна удвоенной массе Солнца M_0, и звезды обращаются по круговым орбитам вокруг их центра масс с периодом $T = 2T_0$, где T_0 — продолжительность земного года. Расстояние от Земли до Солнца $R_0 = 1{,}5\cdot 10^8$ км.

Ответ. $R = \sqrt[3]{\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 \frac{M_1+M_2}{M_0}} = 2R_0 = 3\cdot 10^8$ км.

2. Минимальное расстояние между компонентами двойной звезды, обращающимися один относительно другого, равно r_1. Относительная скорость их в этом положении равна v_1. Сумма масс обоих компонентов равна M. Найти расстояние между компонентами r_2 и их относительную скорость v_2 при максимальном удалении относительно друг от друга. При каком минимальном значении относительной скорости v_1 двойная звезда распадается?

Ответ. $r_2 = \left(\frac{2\,GM}{2\,GM - r_1 v_1^2} - 1\right) r_1$; $v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1$.

Звезда распадется, если $v_1 \geqslant \sqrt{2\,GM/r_1}$.

§ 60. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНА ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ К ПРОБЛЕМЕ ЗЕМНОЙ ТЯЖЕСТИ

По мысли Ньютона, вес тел на Земле является проявлением силы гравитационного притяжения между рассматриваемым телом и Землей*). Для проверки этой идеи Ньютон сравнил ускорение свободного падения тел у поверхности Земли с ускорением Луны на орбите, по которой она движется относительно Земли.

Допустим, что вещество внутри земного шара распределено сферически симметрично, т. е. его плотность зависит только от расстояния до центра Земли. В этом случае, как было показано в § 55, Земля создает во внешнем пространстве такое же гравитационное поле, что и материальная точка той же массы, помещенная в центре Земли. Если верна гипотеза Ньютона, то ускорение свободного падения $g_{абс}$ на расстоянии r от центра Земли должно определяться формулой

$$g_{абс} = G\frac{M}{r^2}, \tag{60.1}$$

где M — масса Земли. Той же формулой должно определяться ускорение Луны $a_{Л}$ на ее орбите:

$$a_{Л} = G\frac{M}{R^2}, \tag{60.2}$$

где R — радиус лунной орбиты. Таким образом,

$$g_{абс} = a_{Л}\left(\frac{R}{r}\right)^2. \tag{60.3}$$

Если $a_{Л}$ известно, то с помощью этой формулы можно вычислить ускорение свободного падения $g_{абс}$ на поверхности Земли. Это и было сделано Ньютоном.

Ускорение Луны $a_{Л}$ можно вычислить, зная R и период обращения Луны по ее орбите T (относительно звезд). Эти величины равны соответственно $R = 3{,}844\cdot 10^5$ км, $T = 27{,}32$ суток. Используя их, находим

$$a_{Л} = \frac{4\pi^2}{T^2}R = 0{,}2723\ \text{см/с}^2. \tag{60.4}$$

Средний радиус земного шара r, определяемый из условия, чтобы величина $4/3\pi r^3$ равнялась объему Земли, равен $r = 6371$ км. Подставляя эти данные в формулу (60.3), получим $g_{абс} = 991{,}4$ см/с^2. Эта величина близка к экспериментальным значениям: на полюсе $g_{абс} = 983{,}2$ см/с^2, на экваторе $g_{абс} = 981{,}4$ см/с^2. Близкое совпадение может рассматриваться как подтверждение гипотезы Ньютона.

*) Сила веса, о которой идет речь в этом утверждении, строго говоря, равна силе гравитационного притяжения только в том случае, когда взвешивание производится на весах, покоящихся или не имеющих ускорения относительно инерциальной системы отсчета (см. § 66)

Небольшое расхождение обусловлено, главным образом, тем, что мы не учли движение самой Земли. Формула (60.4) дает ускорение Луны относительно Земли $(a_\text{Л})_\text{отн}$, тогда как в формулу (60.3) должно входить ускорениеЛуны относительно инерциальной системы отсчета $(a_\text{Л})_\text{абс}$. Согласно формуле (59.4) эти ускорения связаны между собой соотношением

$$(a_\text{Л})_\text{отн} = \left(1 + \frac{m}{M}\right)(a_\text{Л})_\text{абс},$$

где m — масса Луны. Следовательно, вычисленное выше значение $g_\text{абс}$ надо уменьшить в $(1 + m/M)$ раз. Отношение массы Луны к массе Земли составляет $m/M = 1/81$. Введя эту поправку, получим $g_\text{абс} = 979{,}3$ см/с^2, что значительно лучше согласуется с опытом. Оставшееся небольшое расхождение можно объяснить отступлениями формы Земли от шаровой.

Заметим, что с помощью формулы (6.1) можно вычислить массу Земли. Для этого надо знать числовое значение гравитационной постоянной G.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что если высота над земной поверхностью мала по сравнению с радиусом Земли R, то зависимость ускорения свободного падения на Земле от высоты определяется приближенной формулой

$$g \approx g_0\left(1 - 2\frac{h}{R}\right) \approx g_0(1 - 0{,}00314h),$$

где g_0 — значение g на земной поверхности. Предполагается, что высота h измеряется в километрах.

2. Для вычисления средней плотности Земли δ Эйри (1801—1892) предложил и осуществил следующий метод. Измеряются ускорения свободного падения g_0 на поверхности Земли и g в шахте глубиной h. Принимается, что плотность Земли в поверхностном слое толщиной h однородна и равна $\delta_0 = 2{,}5$ г/см^3. (Это предположение плохо соответствует действительности.) В опытах Эйри было $g - g_0 = 0{,}000052\, g_0$, $R/h = 16\,000$ (R — радиус Земли). Пользуясь этими данными, вычислить среднюю плотность Земли. (Обратите внимание, что g вблизи поверхности Земли возрастает с глубиной! Чем это объясняется?)

Ответ. $\delta \approx \dfrac{3\delta_0}{2 - \frac{g - g_0}{g_0}\frac{R}{h}} \approx 6{,}5$ г/см^3.

3. Допустим, что в земном шаре вдоль оси вращения просверлен канал от полюса к полюсу. Как будет двигаться материальная точка, помещенная в такой канал без начальной скорости? Плотность вещества земного шара ρ считать однородной.

Ответ. Точка будет совершать гармонические колебания с круговой частотой, определяемой соотношением $\omega^2 = {}^4\!/_3\, \pi\rho G = g/R$, где R — радиус земного шара, g — ускорение свободного падения на поверхности Земли. Период

этих колебаний $T = 2\pi\sqrt{R/g} \approx 84$ мин. Интересно отметить, что *период колебаний зависит только от плотности шара, но не зависит от его размеров.*

Определить начальную скорость метеоритов v_∞, если максимальное прицельное расстояние, при котором они еще падают на Землю, равно l ($l > R$, где R — радиус земного шара). Получить числовой ответ при $l = 2R$. (См. примечание к задаче § 58.)

Ответ. $v_\infty = R\sqrt{\frac{2gR}{l^2-R^2}}$. При $l = 2R$ $v_\infty = \sqrt{\frac{2}{3}gR} \approx 6{,}5$ км/с.

5. Вычислить массу Земли, используя параметры орбиты советского искусственного спутника «Космос-380». Период обращения спутника (относительно звезд) $T = 102{,}2$ мин, расстояние до поверхности Земли в перигее 210 км, а апогее 1548 км. Землю считать шаром с радиусом 6371 км.

Ответ. $M = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^2}{T^2} \approx 6 \cdot 10^{27}$ г, где a — половина длины большой оси эллиптической орбиты спутника.

§ 61. КОСМИЧЕСКИЕ СКОРОСТИ

1. Теория финитных и инфинитных движений планет, изложенная в § 57, полностью применима к движению искусственных спутников Земли и космических кораблей (разумеется, с выключенными двигателями). Сопротивление воздуха мы не будем учитывать, предполагая, что движение происходит в достаточно разреженной атмосфере. Кроме того, при движении вблизи Земли мы будем пренебрегать силами гравитационного притяжения Солнца, Луны и планет. Массу Земли будем обозначать буквой M, массу искусственного спутника — буквой m.

Полная энергия спутника или космического корабля в поле земного тяготения равна

$$E = \frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{r},$$

или в силу соотношения (60.1)

$$E = \frac{mv^2}{2} - mrg_{\text{абс}}. \tag{61.1}$$

(В дальнейшем будем писать просто g вместо $g_{\text{абс}}$.) Если энергия E отрицательна, то движение финитно и будет происходить по эллиптической траектории. При круговом движении

$$v_{\text{к}} = \sqrt{G\frac{M}{r}} = \sqrt{gr}. \tag{61.2}$$

Если r — радиус земного шара, то получаемая по этой формуле величина называется *первой космической скоростью.* Она приблизительно равна 8 км/с.

Минимальное значение E, при котором движение становится инфинитным, равно нулю. В этом случае получается движение по

параболе со скоростью

$$v_{п} = \sqrt{2gr} = v_{к}\sqrt{2} \approx 11{,}2 \text{ км/с}, \tag{61.3}$$

называемой *параболической* или *второй космической скоростью*. Это есть минимальная скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно никогда не вернулось на Землю (при условии, что тело не подвергается гравитационному действию со стороны других небесных тел).

Если, наконец, полная энергия E положительна, т. е. начальная скорость тела превосходит вторую космическую скорость, то его движение станет гиперболическим.

2. Совершенно аналогичные вычисления можно провести и для движений в гравитационном поле Солнца. Среднее расстояние до Солнца составляет 150 000 000 км. Скорость Земли при круговом движении на таком расстоянии 29,8 км/с. Для того чтобы при запуске с такого расстояния тело навсегда покинуло пределы Солнечной системы, надо сообщить ему скорость относительно Солнца не меньше $29{,}8\sqrt{2} \approx 42{,}1$ км/с. Находясь на Земле, тело движется вместе с ней вокруг Солнца со скоростью 29,8 км/с. Если бы тело не подвергалось действию земного притяжения, то ему достаточно было бы сообщить относительно Земли дополнительную скорость $42{,}1 - 29{,}8 = 12{,}3$ км/с в направлении ее движения, чтобы относительно Солнца оно стало двигаться с параболической скоростью и навсегда покинуло пределы Солнечной системы. В действительности же для этого требуется бóльшая скорость, так как тело дополнительно должно преодолеть действие земного притяжения. Скорость относительно Земли, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно навсегда покинуло пределы Солнечной системы, называется *третьей космической скоростью*. Значение третьей космической скорости зависит от того, в каком направлении корабль выходит из зоны действия земного тяготения. Она минимальна, если это направление совпадает с направлением орбитального движения Земли вокруг Солнца, и максимальна, когда эти направления противоположны.

Точное вычисление третьей космической скорости довольно кропотливо, так как при этом надо учесть гравитационное взаимодействие трех тел: Солнца, Земли и космического корабля. Однако такое вычисление не представляет большого труда, если пренебречь влиянием поля тяготения Солнца на движение космического корабля в течение всего времени, которое он затрачивает для выхода из зоны действия земного тяготения*). Будем обозначать малыми буквами (v, $v_{к}$, $v_{п}$) скорости корабля относи-

---

*) Более подробное рассмотрение показывает (см. § 65), что в действительности при таком расчете мы пренебрегаем не полем тяготения Солнца, а лишь его *неоднородностью* в той области пространства, где преобладающим является поле тяжести Земли. Однородная составляющая поля тяготения Солнца компенсируется силами инерции, возникающими из-за свободного падения Земли на Солнце. Поэтому ошибка, которую мы делаем при вычислении третьей космической скорости, ничтожна.

тельно Земли. Все скорости относительно Солнца будем обозначать большими буквами (V, $V_к$, $V_п$). Пока корабль движется в поле земного тяготения, его движение удобнее относить к системе отсчета, в которой Земля неподвижна. Считая массу Земли M бесконечно большой по сравнению с массой корабля m, запишем уравнение энергии в виде

$$\frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{r} = \frac{mv_\infty^2}{2},$$

где v_∞ — скорость корабля в тот момент, когда он практически выходит из зоны действия земного тяготения. Вводя круговую скорость $v_к^2 = GM/r$, получаем $v_\infty^2 = v^2 - 2v_к^2$. После того как корабль выйдет из зоны действия земного тяготения, будем относить его движение к системе отсчета, в которой неподвижно Солнце. В момент выхода из зоны тяготения скорость корабля $\mathbf{V}$ в этой системе равна векторной сумме скорости $\mathbf{v}_\infty$ и скорости кругового движения Земли $\mathbf{V}_к$. Если корабль выходит из зоны земного тяготения под углом ϑ, то такой же угол будет между скоростями $\mathbf{v}_\infty$ и $\mathbf{V}$. Значит,

$$V^2 = V_к^2 + v_\infty^2 + 2V_к v_\infty \cos\vartheta.$$

Третья космическая скорость v_3 найдется из условия $V = V_п \equiv \sqrt{2}V_к$. Подставляя это значение для V в предыдущее соотношение, получим квадратное уравнение для v_∞, из которого найдем

$$v_\infty = (\sqrt{1+\cos^2\vartheta} - \cos\vartheta)V_к.$$

Положительный знак перед квадратным корнем выбран потому, что величина v_∞ по своему смыслу существенно положительна. После этого получим

$$v_3^2 = (\sqrt{1+\cos^2\vartheta} - \cos\vartheta)^2 V_к^2 + 2v_к^2 \qquad (61.4)$$

Минимальное значение третьей космической скорости получится при $\vartheta = 0$ (запуск в направлении орбитального движения Земли), а максимальное — при $\vartheta = \pi$ (запуск в направлении против орбитального движения Земли). Для этих значений формула (61.4) дает

$$v_3^{мин} \approx \sqrt{0{,}171\ V_к^2 + 2v_к^2} \approx 16{,}7\ км/с,$$
$$v_3^{макс} \approx \sqrt{5{,}828\ V_к^2 + 2v_к^2} \approx 72{,}7\ км/с. \qquad (61.5)$$

Вычислим теперь приближенно *четвертую космическую скорость* v_4. Так называется минимальная скорость, которую надо сообщить ракете, чтобы она могла упасть в заданную точку Солнца. Такая скорость зависит от положения этой точки на поверхности Солнца. На старте ракета движется вокруг Солнца вместе с Землей со скоростью $V_к$. Чтобы ракета упала на Солнце, ее движение надо затормозить. Как и ранее находим, что при выходе из зоны земного притяжения скорость ракеты будет $\mathbf{V} = \mathbf{V}_к + \mathbf{v}_\infty$ (относительно Солнца). Наименьшая энергия, которую нужно затратить для замедления, получится тогда, когда скорости $\mathbf{V}_к$ и $\mathbf{v}_\infty$ направлены противоположно. В этом случае $V = V_к - v_\infty$ (все скорости положительны), а энергия,

приходящаяся на единицу массы ракеты, равна

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(V_к - v_\infty)^2 - G\frac{M}{R} = -\frac{1}{2}(V_к^2 + 2V_к v_\infty - v_\infty^2),$$

где $R = CA$ — расстояние ракеты до центра Солнца при ее максимальном удалении (рис. 181*а*). Если $\varepsilon < 0$, то траекторией ракеты будет эллипс с большой осью

$$2a = -G\frac{M}{\varepsilon} = \frac{2RV_к^2}{V_к^2 + V_к v_\infty - v_\infty^2}.$$

Один из фокусов эллипса находится в центре Солнца. Обозначим через $x = CP$ расстояние от центра Солнца до ближайшей вершины этого эллипса. Расстояние x однозначно определяет форму эллипса, а с ней и линию на поверхности Солнца, на которой будет лежать точка падения. Большая ось эллипса $2a = R + x$. Подставив это значение в предыдущее уравнение, придем к квадратному уравнению для v_∞. Меньший корень этого уравнения равен

$$v_\infty = V_к\left(1 - \sqrt{\frac{2x}{R+x}}\right).$$

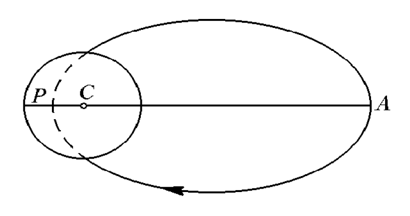


Рис. 181а

Четвертая космическая скорость v_4 ракеты определится из соотношения $v_4^2 = v_\infty^2 + 2v_к^2$, или

$$v_4^2 = V_к^2\left(1 - \sqrt{\frac{2x}{R+x}}\right)^2 + 2v_к^2.$$

Она зависит от параметра x, определяющего место падения. При $x = 0$ (прямолинейное движение по направлению к центру Солнца) скорость v_4 максимальна и равна

$$v_4^{макс} = (V_к^2 + 2v_к^2)^{1/2} \approx 31{,}8 \text{ км/с}.$$

Ракета упадет в передней точке Солнца. При $x = r$ (r — радиус Солнца) ракета упадет в задней точке Солнца, двигаясь по касательной к его поверхности. В этом случае скорость минимальна и равна

$$v_4^{мин} \approx \left[V_к^2\left(1 - \sqrt{\frac{2r}{R+r}}\right)^2 + 2v_к^2\right]^{1/2} \approx [V_к^2(1 - \sqrt{2\alpha})^2 + 2v_к^2]^{1/2} \approx 29{,}2 \text{ км/с},$$

где $\alpha = 4{,}65 \cdot 10^{-3}$ рад — средний угловой радиус Солнца.

ЗАДАЧИ

1. Искусственный спутник Земли вращается по круговой орбите радиусом R с периодом T_1. В некоторый момент на очень короткое время был включен реактивный двигатель, увеличивший скорость спутника в α раз, и спутник стал вращаться по эллиптической орбите. Двигатель сообщал ускорение спутнику все время в направлении движения. Определить макси-

мальное расстояние спутника от центра Земли, которого он достигнет после выключения двигателя. Найти также период T_2 обращения спутника по новой (эллиптической) орбите.

Решение. Обозначим через $E_к$ полную энергию спутника при движении по круговой орбите. Согласно (58.3) $E_к = -K$, $U = -2K$. После того как отработал двигатель, скорость спутника возросла в α раз, а кинетическая энергия K — в α^2 раз. Потенциальная энергия не изменилась, так как за время работы двигателя спутник переместился пренебрежимо мало. Таким образом, полная энергия спутника на эллиптической орбите будет

$$E_{эл} = \alpha^2 K + U = (\alpha^2 - 2)K = (2 - \alpha^2)E_к.$$

Большие оси эллиптических орбит обратно пропорциональны полным энергиям (см. формулу (58.2)). Поэтому

$$\frac{a}{R} = \frac{1}{2-\alpha^2}, \quad a = \frac{R}{2-\alpha^2}.$$

Орбита будет эллиптической, если $\alpha^2 \leqslant 2$. Максимальное расстояние спутника от центра Земли (в апогее)

$$R_{макс} = 2a - R = \frac{\alpha^2 R}{2-\alpha^2}.$$

Период обращения T_2 найдется из третьего закона Кеплера и равен

$$T_2 = \frac{T_1}{(2-\alpha^2)^{3/2}}.$$

2. Найти такой радиус R круговой орбиты спутника Земли, движущегося в направлении ее вращения в плоскости земного экватора, чтобы он все время оставался неподвижным относительно Земли. (Такой спутник называется *стационарным*.)

Ответ. $R = (g/\omega^2 R_0)^{1/3} R_0 \approx 6{,}60\ R_0$. Здесь R_0 — экваториальный радиус Земли, $\omega^2 R_0$ — центростремительное ускорение на экваторе, обусловленное осевым вращением Земли, g — ускорение свободного падения. На экваторе $\omega^2 R_0/g = 1/288$.

3. Силы приливного трения, вызываемые лунными приливами, замедляют осевое вращение Земли. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока не сделаются равными угловые скорости осевого вращения Земли и орбитального движения Луны вокруг Земли. Определить общую угловую скорость ω обоих вращений, продолжительность земных суток T и радиус лунной орбиты a после того, как это произойдет. В настоящее время угловая скорость осевого вращения Земли равна $\omega_З = 7{,}29 \cdot 10^{-5}$ рад/с, момент импульса Земли относительно своей оси $L_З = 5{,}91 \cdot 10^{40}$ г·см^2/с, момент инерции Земли относительно той же оси $I_З = 8{,}11 \cdot 10^{44}$ г·см^2, радиус лунной орбиты $a_0 = 3{,}84 \cdot 10^{10}$ см, период обращения Луны вокруг Земли (относительно звезд) $T_Л = 27{,}3$ сут, масса

Луны $m = 7{,}35 \cdot 10^{25}$ г. Для упрощения расчета считать, что земная ось перпендикулярна к плоскости лунной орбиты.

Решение. Используя приведенные данные, находим: момент инерции Луны относительно оси вращения Земли $I_Л = ma_0^2 = 1{,}08 \cdot 10^{47}$ г·см^2 (моментом инерции Луны относительно ее собственной оси пренебрегаем), угловая скорость орбитального вращения Луны вокруг Земли $\omega_Л = 2{,}67 \cdot 10^{-6}$ рад/с, момент импульса Луны относительно Земли $L_Л = I_Л \omega_Л = 28{,}9 \cdot 10^{40}$ г·см^2/с, полный момент импульса системы Земля—Луна $L = L_З + L_Л = 34{,}8 \cdot 10^{40}$ г·см^2/с. По закону сохранения момента импульса $(I_З + ma^2)\omega = L$, или, пренебрегая $I_З$, $ma^2\omega = L$. По третьему закону Кеплера $a^3\omega^2 = a_0^3\omega_Л^2$. Из этих двух уравнений можно найти неизвестные a и ω. В указанном приближении

$$a = \frac{L^2}{m^2 a_0^4 \omega_Л^2} a_0 = \left(\frac{L}{L_Л}\right)^2 a_0 = 1{,}45, \quad a_0 = 5{,}58 \cdot 10^{10} \text{ см},$$

$$\frac{\omega}{\omega_Л} = \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3/2} = 0{,}573, \quad T = \frac{27{,}3}{0{,}573} = 47{,}7 \text{ сут.}$$

4. Космический корабль подходит к Луне по параболической траектории, почти касающейся поверхности Луны. Чтобы перейти на стелящуюся круговую орбиту, в момент наибольшего сближения включают тормозной двигатель, выбрасывающий газы со скоростью $v = 4$ км/с относительно корабля в направлении его движения. Какую часть общей массы системы будет составлять горючее, использованное для торможения корабля? Средний радиус Луны $R = 1738$ км, ускорение свободного падения на поверхности Луны $g = 162$ см/с^2.

Ответ. $(m_0 - m)/m_0 = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{gR}/v \approx 0{,}17$.

5. Искусственный спутник движется вокруг Земли в разреженной атмосфере по круговой (или почти круговой) орбите. Как влияет сопротивление среды на скорость движения спутника и его момент импульса относительно центра Земли?

Решение. Согласно (58.3) при круговом движении $E = -K$. Трение уменьшает полную энергию E. Поэтому кинетическая энергия K возрастает (спутник приближается к Земле).

6. Космический корабль без начальной скорости свободно падает на Землю из удаленной точки. В каком месте следует повернуть направление скорости корабля на 90° (без изменений ее модуля), чтобы он стал двигаться вокруг Земли по круговой траектории?

Ответ. Посередине между центром Земли и начальным положением корабля.

7. Космический корабль движется вокруг Земли по эллиптической орбите. В какой точке орбиты следует изменить направление скорости корабля (без изменения ее модуля), чтобы корабль стал двигаться по круговой орбите?

Решение. Так как энергия корабля зависит только от длины $2a$ большой оси его орбиты, то переход на круговую орбиты произойдет на расстоянии a, т. е. в точке пересечения эллипса с его малой осью. Направление скорости корабля надо повернуть на такой угол, чтобы оно оказалось перпендикулярным к линии, соединяющей корабль с центром Земли.

8. Космический корабль движется вокруг Земли по эллиптической орбите. В точке пересечения эллипса с его малой осью включается двигатель. Как надо изменить скорость корабля в этой точке, чтобы он перешел на параболическую орбиту?

Ответ. Увеличить в $\sqrt{2}$ раз.

9. Какую перегрузку испытывает при старте космонавт в космическом корабле на самом начальном участке полета, когда корабль вместе с ракетой-носителем поднимается вертикально вверх с постоянным ускорением и за время $\tau = 4$ с набирает скорость $v = \alpha v_{\text{к}}$, где $v_{\text{к}}$ — первая космическая скорость, а $\alpha = 0{,}03$? (Перегрузкой называется отношение $n = (P - P_0)/P_0$, где P_0 — вес космонавта на Земле, а P — «вес», который показали бы пружинные весы при взвешивании космонавта в корабле.)

Решение. Примем за положительное направление направление вверх. «Вес» космонавта в корабле будет

$$P = P_0 + m\,\frac{dv}{dt}.$$

Считая на начальном участке величину P постоянной, находим скорость корабля через время τ:

$$v \equiv \alpha v_{\text{к}} = \frac{P - P_0}{m}\,\tau.$$

Отсюда

$$\frac{P - P_0}{P_0} = \frac{\alpha v_{\text{к}}}{g\tau} = \frac{\alpha}{\tau}\sqrt{\frac{R}{g}} = 6.$$

§ 62. ВЫВОД ЗАКОНОВ ДВИЖЕНИЯ ПЛАНЕТ ИЗ ЗАКОНА ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ НЬЮТОНА

В предыдущих параграфах три закона Кеплера были приняты за исходные. Пользуясь ими, мы пришли к закону всемирного тяготения Ньютона. Теперь поступим наоборот. Примем, что на планету со стороны Солнца действует сила тяготения, подчиняющаяся закону Ньютона. Найдем движение планеты под действием такой силы. Массу Солнца будет считать бесконечно большой по сравнению с массой планеты. К такому случаю сводится и общий случай, когда это условие не выполняется (см. § 59). Возьмем полярную системы координат (r, φ), полюс которой поместим в центре Солнца. Скорость планеты v можно разложить на радиальную скорость $v_r = \dot{r}$ и перпендикулярную к ней азимутальную скорость $v_\varphi = r\dot{\varphi}$. Очевидно, $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$. Законы сохранения энергии и момента импульса планеты запишем в виде

$$\frac{1}{2}\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - G\,\frac{M}{r} = \varepsilon, \qquad (62.1)$$

$$\frac{1}{2}\,r^2\dot{\varphi}^2 = \sigma, \qquad (62.2)$$

где M — масса Солнца, ε — полная энергия планеты, приходящаяся на единицу ее массы, σ — секториальная скорость, остающаяся постоянной

во время движения. Для нахождения уравнения траектории планеты исключим время. Считая r функцией φ, имеем $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi}$. Подставляя это значение в уравнение (62.1) и исключая $\dot{\varphi}$ с помощью уравнения (62.2), получим

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{2\sigma^2}\left(\varepsilon + G\frac{M}{r}\right). \tag{62.3}$$

Введем новую переменную $\rho = -1/r + 1/p$, p — постоянная, значение которой будет установлено ниже. Тогда уравнение (62.3) примет вид

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \left(\rho - \frac{1}{p}\right)^2 = \frac{\varepsilon}{2\sigma^2} + G\frac{M}{2\sigma^2}\left(-\rho + \frac{1}{p}\right).$$

Подберем постоянную p так, чтобы в этом уравнении исчезали члены, содержащие первые степени ρ. Для этого надо положить

$$p = \frac{4\sigma^2}{GM}. \tag{62.4}$$

При таком выборе постоянной p получим

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\varepsilon}{2\sigma^2} + \frac{1}{p^2} - \rho^2.$$

Поскольку слева стоит неотрицательная величина, постоянная величина $1/p^2 + \varepsilon/2\sigma^2$ также неотрицательна, ее можно обозначить через A^2:

$$A^2 = \frac{1}{p^2} + \frac{\varepsilon}{2\sigma^2}. \tag{62.5}$$

В результате получим

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = A^2 - \rho^2. \tag{62.6}$$

Очевидно, $A^2 \geqslant \rho^2$, а потому можно положить $\rho/A = \cos\Theta$, где Θ — новая неизвестная. Тогда

$$A^2 - \rho^2 = A^2\sin^2\Theta, \quad \frac{d\rho}{d\varphi} = -A\sin\Theta\,\frac{d\Theta}{d\varphi}.$$

Подставляя в (62.6) и сокращая на $A\sin\Theta$, получим $\frac{d\Theta}{d\varphi} = \pm 1$, откуда $\Theta = \pm\varphi + \varphi_0$. Следовательно, $\rho = A\cos(\pm\varphi + \varphi_0) = A\cos(\varphi \pm \varphi_0)$. В последнем выражении двойной знак перед φ_0 сохранять не имеет смысла, поскольку φ_0 есть постоянная интегрирования. Возвращаясь к прежним обозначениям, получим

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}\,[1 - e\cos(\varphi + \varphi_0)], \tag{62.7}$$

где

$$e = pA = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon p^2}{2\sigma^2}} = \sqrt{1 + \frac{8\varepsilon\sigma^2}{G^2M^2}}. \tag{62.8}$$

Без ограничения общности можно положить $\varphi_0 = 0$. Это означает просто, что отсчет углов φ ведется от такого положения радиуса-вектора планеты, когда его длина равна $\frac{p}{(1-e)}$. При таком отсчете уравнение (62.7) принимает вид

$$r = \frac{p}{(1-e\cos\varphi)}. \tag{62.9}$$

Это — уравнение конического сечения с эксцентриситетом e и параметром p. Если $\varepsilon < 0$, то $e < 1$ (эллипс); если $\varepsilon = 0$, то $e = 1$ (парабола); если $\varepsilon > 0$, то $e > 1$ (гипербола). Мы пришли к результатам, полученным в § 57 иным путем. Нетрудно теперь вычислить остальные параметры орбиты и в случае эллиптического движения получить третий закон Кеплера. Однако все эти вычисления уже были проделаны ранее, и в новых вычислениях нет необходимости.

ГЛАВА IX

ДВИЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОТСЧЕТА

§ 63. СИЛЫ ИНЕРЦИИ ПРИ УСКОРЕННОМ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

1. До сих пор мы относили движение к какой-либо одной из бесчисленного множества *инерциальных систем отсчета.* В такой системе отсчета основным уравнением движения материальной точки является уравнение, выражающее *второй закон Ньютона.* Запишем здесь это уравнение в виде

$$m\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{F}, \tag{63.1}$$

снабдив ускорение $\mathbf{a}$ индексом «абс», смысл которого выяснится в дальнейшем. Поставим теперь задачу найти уравнения движения в *неинерциальных системах отсчета*, т. е. таких системах, которые движутся ускоренно относительно инерциальных систем. Задача сводится к установлению *законов преобразования сил и ускорений* при переходе от инерциальной системы к любой неинерциальной системе отсчета. Дорелятивистская физика считала этот вопрос чисто кинематическим и решала его на основе следующих двух допущений: 1) время абсолютно, т. е. промежутки времени между любыми двумя событиями одинаковы во всех системах отсчета; 2) пространство абсолютно, т. е. расстояния между любыми двумя точками (материальными телами) также одинаковы во всех системах отсчета. Таким образом, в дорелятивистской физике считалось, что *расстояния и промежутки времени инварианты по отношению к переходу от одной системы отсчета к любой другой, произвольно движущейся системе отсчета.* Оба допущения казались настолько самоочевидными, что даже явно не формулировались. И только глубокий анализ проблемы пространства и времени в теории относительности выявил *постулативный характер* этих допущений. При этом оказалось, что *оба допущения приближенно верны лишь для медленных движений.* При быстрых движениях они становятся неверными. Ограничимся сейчас нерелятивистским рассмотрением, т. е. *будем предполагать, что все скорости, в том числе и относительные скорости самих систем отсчета, малы по сравнению со скоростью света в вакууме.*

2. Условимся называть *неподвижной* какую-либо произвольно выбранную инерциальную систему отсчета, а движение относительно

нее — *абсолютным*. В формуле (63.1) речь идет об ускорении при абсолютном движении именно в таком смысле. Не следует вкладывать в понятия «неподвижная система отсчета» и «абсолютное движение» что-либо большее по сравнению с тем, что содержится в приведенном определении. Оба понятия чисто условны и не противоречат утверждению, что всякое движение *относительно*. Тело, покоящееся в движущейся системе отсчета, увлекается последней в ее движении относительно неподвижной системы отсчета. Такое движение тела называется *переносным*. Абсолютное движение тела складывается из его относительного и переносного движений.

Цель настоящей главы — изучить *относительное движение*. Для этого прежде всего следует установить уравнения относительного движения. *Под уравнениями движения мы понимаем соотношения, которыми определяются ускорения всех материальных точек механической системы в той системе отсчета, относительно которой рассматривается движение*. Когда система отсчета движется относительно неподвижной системы отсчета прямолинейно и равномерно, она сама является инерциальной системой отсчета. В этом случае уравнения относительного движения совпадают с уравнениями *абсолютного движения*, т. е. даются законами Ньютона. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением только тех случаев, когда рассматриваемая система отсчета движется относительно неподвижной системы отсчета с ускорением.

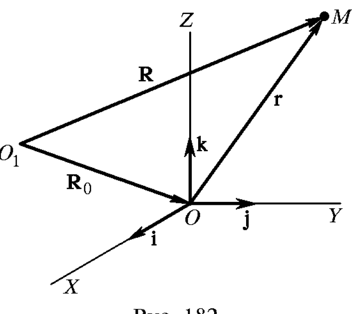


Рис. 182

3. Возьмем две системы отсчета: неподвижную систему S_1 с началом координат в точке O_1 и движущуюся систему S с началом координат в точке O (рис. 182). Обозначим через $\mathbf{R}_0$ радиус-вектор $\overrightarrow{O_1O}$, проведенный из неподвижного начала O_1 к движущемуся началу O. Пусть M — какая-либо материальная точка. Ее положение в неподвижной системе отсчета определяется радиусом-вектором $\mathbf{R}$, а в движущейся — радиусом-вектором $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$. Векторы $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{r}$ в каждый момент времени связаны соотношением

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}. \tag{63.2}$$

Дважды дифференцируя это соотношение по времени, получим

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_0 + \dot{\mathbf{r}}, \tag{63.3}$$

$$\ddot{\mathbf{R}} = \ddot{\mathbf{R}}_0 + \ddot{\mathbf{r}}. \tag{63.4}$$

Чтобы лучше выявить идейную сторону вопроса, рассмотрим сначала частный случай, когда система S движется относительно неподвижной системы S_1 *поступательно*. Вектор $\dot{\mathbf{R}}$, очевидно, всегда дает абсолютную скорость $\mathbf{v}_{абс}$, а вектор $\ddot{\mathbf{R}}$ — абсолютное ускорение $\mathbf{a}_{абс}$ движущейся точки M. Вектор $\mathbf{v}_0 \equiv \dot{\mathbf{R}}_0$ есть абсолютная скорость, а $\mathbf{a}_0 \equiv \ddot{\mathbf{R}}_0$ — абсолютное ускорение начала координат O системы S. При поступательном движении эти величины совпадают соответственно со скоростью и ускорением любой точки системы S. Таким образом, $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{a}_0$ должны быть интерпретированы как *переносные скорость* и *ускорение*. Точно так же при поступательном движении $\dot{\mathbf{r}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$ дают соответственно *относительную скорость* и *относительное ускорение*, т. е. значения этих величин в движущейся системе отсчета S. Итак, при поступательном движении

$$\mathbf{v}_{абс} = \mathbf{v}_{отн} + \mathbf{v}_{пер}, \tag{63.5}$$

$$\mathbf{a}_{абс} = \mathbf{a}_{отн} + \mathbf{a}_{пер}, \tag{63.6}$$

причем $\mathbf{a}_{пер} = \mathbf{a}_0$, $\mathbf{v}_{пер} = \mathbf{v}_0$.

4. Подставим теперь выражение (63.6) в уравнение (63.1) и перенесем член, содержащий $\mathbf{a}_{пер}$, в правую часть. Получим

$$m\mathbf{a}_{отн} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0. \tag{63.7}$$

Это и есть уравнение относительного движения материальной точки. На правую часть этого уравнения формально можно смотреть как на некоторую «силу», действующую на материальную точку в движущейся системе отсчета. Таким образом, в каждом системе отсчета сила определяется как вектор, равный произведению массы материальной точки на ее ускорение в этой системе отсчета. Не обязательно, чтобы «сила» в таком смысле была результатом взаимодействия тел. Однако необходимо располагать каким-то независимым способом, позволяющим выразить «силу» через координаты и скорости движущейся точки. Только при этом условии мы в состоянии написать уравнение движения типа (63.7), а к этому в конце концов сводится реальное содержание законов механики.

«Сила» $\mathbf{F} - m\mathbf{a}_0$ слагается из двух существенно различных составляющих. Первая составляющая $\mathbf{F}$ есть «настоящая сила» в том смысле, что она является результатом взаимодействия тел. Она зависит только от разностей координат и разностей скоростей взаимодействующих материальных точек. В нерелятивистской кинематике все эти разности не меняются при переходе от одной системы отсчета к другой, произвольно поступательно движущейся системе. Поэтому не меняется и сила $\mathbf{F}$. Она *инвариантна* относительно такого перехода.

Совсем иной характер имеет составляющая — $m\mathbf{a}_0$. Это составляющая возникает не из-за взаимодействия тел, а из-за *ускоренного*

движения системы отсчета. Она называется *силой инерции*, точнее *поступательной силой инерции*, поскольку сейчас мы ограничиваемся лишь поступательными движениями систем отсчета. При переходе к другой ускоренной системе отсчета меняются и силы инерции. Они *не инвариантны* относительно такого перехода. Этим силы инерции отличаются от «настоящих сил», возникающих при взаимодействии тел. Второе отличие состоит в том, что *силы инерции не подчиняются закону равенства действия и противодействия.* Если на какое-либо тело действует сила инерции, то не существует противодействующей силы, приложенной к другому телу. Движение тел под действием сил инерции аналогично, таким образом, движению во внешних силовых полях. *Силы инерции всегда являются внешними по отношению к любой движущейся системе материальных тел.*

5. Реальны или фиктивны силы инерции? Ответ на этот вопрос зависит от смысла, который вкладывается в слова «реальный» и «фиктивный». Если придерживаться ньютоновской механики, согласно которой все силы должны быть результатом взаимодействия тел, то на силы инерции надо смотреть как на фиктивные силы, исчезающие в инерциальных системах отсчета. Однако такая точка зрения не обязательна. Все взаимодействия осуществляются посредством силовых полей и передаются с конечными скоростями. И на силы инерции можно смотреть как на действия, которым подвергаются тела со стороны каких-то реальных силовых полей. Правда, эти поля определенным образом преобразуются при переходе от рассматриваемой системы отсчета к другой системе, движущейся относительно нее ускоренно. Но это не является основанием считать эти силы фиктивными. Ведь электрические и магнитные силы также преобразуются при переходе к другой системе отсчета (даже от инерциальной к инерциальной). И тем не менее никто не сомневается в реальном существовании электромагнитных полей.

Независимо от того, какую из этих точек зрения мы примем, существует много явлений, которые могут быть интерпретированы как проявление сил инерции. Когда поезд набирает скорость, пассажир в вагоне испытывает действие силы, направленной против движения поезда. Если пассажир сидит по ходу поезда, то эта сила прижимает его к спинке сиденья. Это и есть сила инерции. При торможении поезда сила инерции меняет направление и стремится отделить тело пассажира от стенки сиденья. Если в ускоренно движущемся вагоне висит маятник, то сила инерции стремится отклонить его в сторону, противоположную ускорению. В состоянии равновесия сила инерции уравновешивается силами тяжести и натяжением нити подвеса. Особо заметно проявляются силы инерции при внезапном быстром торможении поезда. Силы инерции вызывают перегрузки, действующие на летчика или космонавта при больших ускорениях самолета или при запуске и торможении космического корабля.

Конечно, все эти явления можно понять, не пользуясь представлением о силах инерции, а рассматривая движение относительно инерциальной системы отсчета. Так, в примере с маятником маятник движется ускоренно относительно инерциальной системы отсчета.

Маятник должен отклониться назад, чтобы возникла сила натяжения с горизонтальной составляющей, направленной вперед. Эта составляющая и сообщает маятнику ускорение. Однако во многих случаях бывает проще рассматривать явления непосредственно в движущейся системе отсчета, не переходя к инерциальной. Кроме того, иногда затруднительно разделить полную силу, действующую в неинерциальной системе отсчета, на «реальную силу», возникающую из-за взаимодействия тел, и «фиктивную» силу инерции, связанную с ускорением движения системы отсчета.

§ 64. СИЛЫ ИНЕРЦИИ ПРИ УСКОРЕННОМ ПРОИЗВОЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

1. Допустим теперь, что система отсчета S (см. рис. 182) движется относительно неподвижной системы S_1 *совершенно произвольно.* Это движение можно разложить на два: *поступательное движение* со скоростью $\mathbf{v}_0$, равной скорости движения начала координат O, и *вращательное движение* вокруг мгновенной оси, проходящей через это начало. Угловую скорость этого вращения обозначим через $\boldsymbol{\omega}$. Она может меняться как по модулю, так и по направлению. Пусть $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы (орты) координатных осей системы координат S, которую мы будем предполагать прямоугольной. Длины этих векторов, поскольку они единичные, остаются неизменными. Но их направления с течением времени могут измениться. Это переменные векторы. Каждый из них вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Их производные по времени определяются формулами (46.11). Выпишем эти формулы еще раз:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{i}], \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{j}], \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{k}]. \qquad (64.1)$$

Ход рассуждений остается в точности таким же, как и в предыдущем параграфе. Усложняются только вычисления. Формулы (63.2)–(63.4), разумеется, остаются без изменения. Остается неизменной и интерпретация слагаемых $\dot{\mathbf{R}}_0$ и $\ddot{\mathbf{R}}_0$. Первое есть абсолютная скорость $\mathbf{v}_0$, а второе — абсолютное ускорение $\mathbf{a}_0$ начала координат O. Меняются только слагаемые $\dot{\mathbf{r}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$, которые мы и должны найти.

2. Пусть x, y, z — координаты движущейся точки M в движущейся системе S. Тогда

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \qquad (64.2)$$

Дифференцируя это выражение, получим

$$\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}) + \left(x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}\right).$$

В первой скобке дифференцируются только координаты x, y, z, как если бы единичные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, а с ними и система отсчета S были неподвижными. Такую операцию должен был бы выполнить наблюдатель, покоящийся в системе S, если бы он поставил перед собой задачу найти скорость точки M в этой системе, т. е. по нашей терминологии относительную скорость $\mathbf{v}_{\text{отн}}$. Таким образом,

$$\mathbf{v}_{\text{отн}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}. \tag{64.3}$$

Используя далее формулы (64.1) получим

$$x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt} = x[\boldsymbol{\omega}\mathbf{i}] + y[\boldsymbol{\omega}\mathbf{j}] + z[\boldsymbol{\omega}\mathbf{k}] = \\ = [\boldsymbol{\omega}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})] = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}].$$

Таким образом,

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_{\text{отн}} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]. \tag{64.4}$$

Окончательно для абсолютной скорости можно написать

$$\mathbf{v}_{\text{абс}} = \mathbf{v}_{\text{отн}} + \mathbf{v}_{\text{пер}}, \tag{64.5}$$

т. е. выражение, совпадающее с (63.5). Однако теперь переносная скорость дается выражением

$$\mathbf{v}_{\text{пер}} = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]. \tag{64.6}$$

Эта величина есть абсолютная скорость, которую имела бы точка M, если бы она покоилась в движущейся системе отсчета S. Поэтому-то она и называется переносной скоростью. Переносная скорость слагается из двух частей: скорости $\mathbf{v}_0$, с которой движется начало координат O, и скорости $[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$, возникающей из-за вращения системы S вокруг этого начала.

3. Несколько сложнее обстоит дело с абсолютным ускорением. Для вычисления абсолютного ускорения продифференцируем выражение (64.5) по времени. С учетом соотношения (64.6) находим

$$\mathbf{a}_{\text{абс}} \equiv \dot{\mathbf{v}}_{\text{абс}} = \dot{\mathbf{v}}_{\text{отн}} + \dot{\mathbf{v}}_0 + [\boldsymbol{\omega}\dot{\mathbf{r}}] + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}].$$

Производная $\dot{\mathbf{v}}_{\text{отн}}$ найдется дифференцированием выражения (64.3). При этом, разумеется, надо дифференцировать не только компоненты относительной скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, но и координатные орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Это делается в точности так же, как и дифференцирование выражения (64.2). Поэтому по аналогии с формулой (64.4) можно написать

$$\dot{\mathbf{v}}_{\text{отн}} = \mathbf{a}_{\text{отн}} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}_{\text{отн}}], \tag{64.7}$$

где

$$\mathbf{a}_{\text{отн}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}. \tag{64.8}$$

Последнее выражение дает относительное ускорение. Для его нахождения надо дважды дифференцировать координаты x, y, z, считая координатные орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ неподвижными. Именно так поступал бы наблюдатель, изучающий движение относительно системы отсчета S и не подозревающий о ее движении. Поэтому-то величина (64.8) и называется относительным ускорением.

Слагаемое $[\boldsymbol{\omega}\dot{\mathbf{r}}]$ преобразуем, подставив в него выражение (64.6) для $\dot{\mathbf{r}}$

$$[\boldsymbol{\omega}\dot{\mathbf{r}}] = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}_{\text{отн}}] + [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]].$$

Окончательно для абсолютного ускорения найдем

$$\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{a}_{\text{отн}} + 2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}_{\text{отн}}] + \dot{\mathbf{v}}_0 + [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]] + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}]. \tag{64.9}$$

Этому результату можно придать вид

$$\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{a}_{\text{отн}} + \mathbf{a}_{\text{кор}} + \mathbf{a}_{\text{пер}}, \tag{64.10}$$

где

$$\mathbf{a}_{\text{кор}} = 2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}_{\text{отн}}], \tag{64.11}$$

$$\mathbf{a}_{\text{пер}} = \dot{\mathbf{v}}_0 + [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]] + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}]. \tag{64.12}$$

Вектор $\mathbf{a}_{\text{пер}}$ зависит только от движения системы отсчета S относительно неподвижной системы S_1. Только такое ускорение испытывала бы точка, если бы покоилась в системе S. Поэтому вектор $\mathbf{a}_{\text{пер}}$ называется *переносным ускорением*. Наконец, слагаемое $\mathbf{a}_{\text{кор}} = 2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}_{\text{отн}}]$ зависит как от относительного, так и от переносного движений. Оно называется *кориолисовым ускорением*, по имени Кориолиса, который впервые ввел это понятие в механику. Равенство (64.10) вместе с выражениями для отдельных слагаемых, стоящих в его правой части, выражает так называемую *теорему Кориолиса*. Согласно этой теореме *абсолютное ускорение является векторной суммой относительного, кориолисова и переносного ускорений*.

Исследуем структуру переносного ускорения. Для этого воспользуемся формулой (64.12). Слагаемое $\dot{\mathbf{v}}_0$ есть переносное ускорение, вызванное поступательным движением системы S, тождественным с движением начала координат O. Остальные два слагаемых вызываются вращением системы S. Из них $[\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}]$ есть часть переносного ускорения, вызванная неравномерностью вращения. При равномерном вращении ($\boldsymbol{\omega} = \text{const}$) это слагаемое пропадает. Другое слагаемое $[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]]$, обозначаемое в дальнейшем $\mathbf{a}_{\text{ц}}$, есть

центростремительное ускорение, направленное к мгновенной оси вращения. Действительно, представим радиус-вектор $\mathbf{r}$ в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}_\parallel$, где $\mathbf{r}_\parallel$ и $\mathbf{r}_\perp$ — компоненты этого радиуса-вектора, направленные вдоль оси вращения и перпендикулярно к ней соответственно. Так как $[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_\parallel] = 0$, то

$$\mathbf{a}_\text{ц} \equiv [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]] = [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_\perp]].$$

Раскрыв по известной формуле двойное векторное произведение и приняв во внимание, что $(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_\perp) = 0$, получим

$$\mathbf{a}_\text{ц} = -\omega^2\mathbf{r}_\perp. \tag{64.13}$$

Эта формула и доказывает наше утверждение.

4. Можно было бы теперь перейти к написанию уравнения относительного движения материальной точки. Однако мы хотим еще раз на частном примере получить теорему Кориолиса. Таким путем мы лучше выясним происхождение кориолисова ускорения и других членов, из которых складывается абсолютное ускорение.

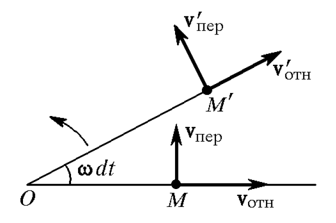


Рис. 183

Пусть шарик M (рис. 183) движется вдоль жесткого стрежня, вращающегося вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, перпендикулярной к плоскости рисунка. Его абсолютная скорость $\mathbf{v}_\text{абс}$ складывается из двух взаимно перпендикулярных скоростей: скорости вдоль стержня и скорости, к нему перпендикулярной. Первая есть относительная скорость в системе отсчета, в которой стержень покоится. Вторая возникает из-за вращения стержня и потому является переносной скоростью. Таким образом, $\mathbf{v}_\text{абс} = \mathbf{v}_\text{отн} + \mathbf{v}_\text{пер}$, а потому $\mathbf{a}_\text{абс} = \dot{\mathbf{v}}_\text{отн} + \dot{\mathbf{v}}_\text{пер}$. Пусть за время dt стержень повернулся на угол $d\varphi = \omega\, dt$. За то же время шарик перешел из положения M в положение M'. Найдем приращение, которое претерпевает за то же время вектор $\mathbf{v}_\text{отн}$. Если бы не было вращения стержня, то это приращение возникало бы только из-за неравномерности движения вдоль стержня и было бы равно $\mathbf{a}_\text{отн}\, dt$. Но из-за поворота вектор $\mathbf{v}_\text{отн}$ получает дополнительное приращение $[d\boldsymbol{\varphi}\mathbf{v}_\text{отн}]$. Полное приращение вектора $\mathbf{v}_\text{отн}$ будет

$$d\mathbf{v}_\text{отн} = \mathbf{a}_\text{отн}\, dt + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}_\text{отн}]dt.$$

Теперь найдем приращение вектора $\mathbf{v}_\text{пер} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$. Очевидно, $d\mathbf{v}_\text{пер} = [d\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega}d\mathbf{r}]$. Первое слагаемое возникает из-за неравномерности вращения и равно $[\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}]\, dt$. Второе связано с перемещением точки M в (абсолютном) пространстве и дается выражением $[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}_\text{абс}]\, dt = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}_\text{отн}]\, dt + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}_\text{пер}]\, dt$. Таким образом,

$$d\mathbf{v}_\text{пер} = [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}]\, dt + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}_\text{отн}]\, dt + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}_\text{пер}]\, dt.$$

Сложив приращения обоих векторов, $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ и $\mathbf{v}_{\text{пер}}$, найдем окончательно

$$\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{a}_{\text{отн}} + 2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}_{\text{отн}}] + [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]] + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}].$$

Как ясно из вывода, в рассматриваемом случае кориолисово ускорение слагается из двух равных членов. Первый возникает из-за вращения вектора $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ вместе со стержнем. Второй появляется из-за приращения переносной скорости $\mathbf{v}_{\text{пер}}$, которое получается вследствие приближения шарика к оси вращения или удаления от нее. Очевидно, вывод применим и в том случае, когда направление оси вращения меняется с течением времени.

Кориолисово ускорение $2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}_{\text{отн}}]$ направлено перпендикулярно к вращающемуся стержню. Для того чтобы сообщить такое ускорение телу M, стержень должен оказывать на него боковое давление. Сила бокового давления

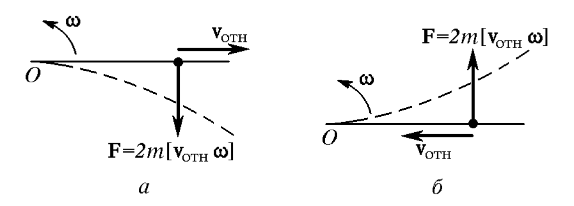


Рис. 184

равна $2m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}_{\text{отн}}]$, где m — масса тела M. В свою очередь, тело M действует на стержень с равной и противоположно направленной силой $\mathbf{F} = 2m[\mathbf{v}_{\text{отн}}\boldsymbol{\omega}]$. Если тело удаляется от оси вращения (рис. 184 *а*), то сила $\mathbf{F}$ направлена противоположно вращению и замедляет его. При этом стержень изгибается таким образом, что он выпуклой стороной обращен в сторону вращения, как показано штриховой линией. Напротив, если тело приближается к оси вращения (рис. 184 *б*), то сила $\mathbf{F}$ направлена в сторону вращения стержня. В этом случае угловая скорость вращения стержня увеличивается, а сам стержень изгибается так, что в сторону вращения обращена его вогнутая сторона. В опыте со скамьей Жуковского, описанном в § 34 (см. рис. 60), возникают такие же силы бокового давления, с которыми гири действуют на демонстратора, когда он приближает или удаляет их от оси вращения. Эти силы и изменяют угловую скорость вращения скамьи Жуковского вместе с демонстратором, сидящим на ней. Вообще, действием таких сил объясняются все явления, связанные с изменением угловой скорости вращения изолированного тела при изменении его момента инерции.

5. Обратимся теперь к написанию уравнений относительного движения. Поступим в точности так же, как в предыдущем параграфе. В уравнение (63.1) подставим выражение (64.10) и все члены перенесем в правую часть, за исключением члена, содержащего относительное ускорение. Таким путем получим

$$m\mathbf{a}_{\text{отн}} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_{\text{кор}} - m\mathbf{a}_{\text{пер}}, \qquad (64.14)$$

или более подробно

$$m\mathbf{a}_{\text{отн}} = \mathbf{F} + 2m[\mathbf{v}_{\text{отн}}\boldsymbol{\omega}] - m\dot{\mathbf{v}}_0 + m\omega^2\mathbf{r}_\perp - m[\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}]. \qquad (64.15)$$

К «настоящей» силе $\mathbf{F}$ добавились две силы инерции: так называемая *кориолисова сила*

$$\mathbf{F}_{\text{кор}} = -m\mathbf{a}_{\text{кор}} = 2m[\mathbf{v}_{\text{отн}}\boldsymbol{\omega}] \tag{64.16}$$

и *переносная сила инерции*

$$\mathbf{F}_{\text{пер}} = -m\mathbf{a}_{\text{пер}} = -m\dot{\mathbf{v}}_0 + m\omega^2\mathbf{r}_\perp - m[\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}]. \tag{64.17}$$

Разумеется, к этим силам инерции относятся все общие замечания, которые были высказаны в предыдущем параграфе применительно к силам инерции, возникающим при ускоренном поступательном движении системы отсчета.

6. Переносная сила инерции в общем случае состоит из трех слагаемых. С первым слагаемым $-m\dot{\mathbf{v}}_0$ мы уже познакомились в предыдущем параграфе. Это есть *поступательная сила инерции*, возникающая из-за ускоренного движения начала координат O. Последнее слагаемое $-m[\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}]$ обусловлено *неравномерностью вращения* системы отсчета. Оно не получило специального названия. Второе слагаемое

$$\mathbf{F}_{\text{ц}} = m\omega^2\mathbf{r}_\perp \tag{64.18}$$

называется *центробежной силой инерции* или просто *центробежной силой*. Действию центробежной силы подвергается, например, пассажир в движущемся автобусе на поворотах. Перегрузки, испытываемые летчиком при выполнении фигур высшего пилотажа на больших скоростях, также в основном вызываются центробежными силами. Если на центробежной машине подвесить несколько шариков на нитях и привести машину в быстрое вращение, то центробежные силы отклонят шарики от оси вращения. Угол отклонения тем больше, чем дальше шарик отстоит от оси. Центробежные силы используются в центробежных сушилках для отжима белья и в сепараторах для отделения сливок от молока.

7. Центробежные силы, как и всякие силы инерции, существуют лишь в ускоренно движущихся (вращающихся) системах отсчета и исчезают при переходе к инерциальным системам. Забыв это, можно прийти к парадоксам, которые часто ставят в тупик школьников. Вот один из самых распространенных парадоксов такого типа. Пусть тело движется по окружности. На него действуют две силы: центростремительная $\mathbf{F}_1$, направленная к центру окружности, и центробежная $\mathbf{F}_2$, направленная в противоположную сторону. Эти силы равны по модулю и уравновешивают друг друга: $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$. По закону инерции тело должно двигаться прямолинейно и равномерно. Противоречие возникло потому, что движение стали относить к неподвижной (инерциальной) системе отсчета. А в этой системе никаких центробежных сил не существует. Есть только одна центростремительная сила $\mathbf{F}_1$, которая и сообщает телу ускорение. Это может быть, например, натяжение шнура, к которому привязано тело. Вводить центробежную силу

можно лишь тогда, когда движение рассматривается во вращающейся системе отсчета. В этой системе на тело действительно действует центробежная сила, и она уравновешивается центростремительной силой. Однако это не приводит к противоречию, так как во вращающейся системе отсчета тело покоится.

Путаница происходит из-за того, что в технической механике термин «центробежная сила» иногда употребляют в совершенно другом смысле. Центробежной силой называют *силу реакции*, с которой тело A, вращающееся по окружности, действует на тело B, принуждающее его совершать это вращение. Равную ей и противоположно направленную силу, с которой тело B действует на вращающееся тело A, называют центростремительной. Допустим, например, что шарик привязан к шнуру. Взяв рукой за свободный конец шнура, приведем шарик во вращение. Центростремительной здесь является сила натяжения шнура, тянущая шарик к центру окружности. Центробежная сила также создается натяжением шнура, но она приложена к руке. Центростремительная и центробежная силы, так понимаемые, всегда приложены к *разным телам*. Обе они являются «настоящими силами» в смысле ньютоновой механики, т. е. возникают в результате взаимодействия тел. По существу этой терминологии, конечно, нельзя привести никаких возражений. Речь может идти только о ее целесообразности. Возражение начинается с того пункта, когда, понимая центробежную силу во втором смысле, утверждают, что она стремится удалить вращающееся тело от оси вращения. Это утверждение просто абсурдно, так как при втором определении центробежной силы она не приложена к вращающемуся телу и поэтому не может оказывать на него никакого действия. Действительно, центробежная сила стремится удалить тело от оси вращения. Но это утверждение относится к центробежной силе, понимаемой как *сила инерции*. Мы не будем употреблять термин «центробежная сила» во втором смысле. Под центробежной силой мы будем всюду понимать *силу инерции*, действующую только во вращающихся системах отсчета и исчезающую при переходе к инерциальным системам.

8. Обратимся теперь к кориолисовой силе инерции (64.16). Она возникает только тогда, когда система отсчета S *вращается*, а материальная точка *движется относительно этой системы*. От других сил инерции кориолисова сила отличается тем, что она зависит от относительной скорости $\mathbf{v}_{\text{отн}}$. При обращении в нуль этой скорости обращается в нуль и кориолисова сила. Когда пассажир стоит в движущемся автобусе, то на поворотах он испытывает действие центробежной силы. Если во время поворота пассажир будет перемещаться в автобусе, то на него начнет еще действовать кориолисова сила. Вот почему удержаться в автобусе на поворотах легче в неподвижном положении, чем при движении. Кориолисова сила всегда перпендикулярна к относительной скорости. Поэтому при относительном движе-

нии она не совершает работы. Кориолисова сила, таким образом, является силой *гироскопической* (см. § 24, п. 6).

ЗАДАЧИ

1. В чем ошибочность следующего рассуждения: пусть A и B — две неподвижные материальные точки, расстояние между которыми равно r. Состояние покоя точки B можно рассматривать как результат сложения двух вращений с одинаковыми, но противоположно направленными постоянными угловыми скоростями: $+\boldsymbol{\omega}$ и $-\boldsymbol{\omega}$. При первом вращении возникает центростремительное ускорение $\mathbf{a}_1 = \omega^2\mathbf{r}$, при втором — центростремительное ускорение $\mathbf{a}_2 = (-\omega)^2\mathbf{r} = \omega^2\mathbf{r} = \mathbf{a}_1$. Результирующее ускорение точки B равно $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = 2\omega^2\mathbf{r}$. Следовательно, точка A действует на точку B с силой притяжения $\mathbf{F} = 2m\omega^2\mathbf{r}$, где m — масса точки B. Поскольку ω — величина произвольная, получается абсурдный результат, что точки A и B притягиваются друг к другу с произвольной, наперед заданной силой.

Решение. Не учтено кориолисово ускорение. Введем систему отсчета S, равномерно вращающуюся вокруг точки A с угловой скоростью $+\boldsymbol{\omega}$. Пусть точка B вращается относительно этой системы с угловой скоростью $-\boldsymbol{\omega}$. Обозначая вектор $\overrightarrow{AB}$ через $\mathbf{r}$, имеем для скоростей и ускорений точки B:

$$\mathbf{v}_{\text{отн}} = -[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}],\ \mathbf{a}_{\text{отн}} = \mathbf{a}_{\text{пер}} = -\omega^2\mathbf{r},\ \mathbf{a}_{\text{кор}} = 2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}_{\text{отн}}] = 2\omega^2\mathbf{r}.$$

Следовательно, $\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{a}_{\text{отн}} + \mathbf{a}_{\text{кор}} + \mathbf{a}_{\text{пер}} = 0$.

2. Стрелок и мишень находятся в диаметрально противоположных точках карусели радиусом $R = 5$ м, равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси. Период вращения карусели $T = 10$ с, скорость пули $v = 300$ м/с. Пренебрегая максимальной линейной скоростью вращающейся карусели ωR по сравнению со скоростью пули, определить приближенно, под каким углом α к диаметру карусели должен целиться стрелок, чтобы поразить мишень. Задачу рассмотреть как с точки зрения вращающейся, так и с точки зрения неподвижной системы, и сравнить результаты.

Ответ. $\alpha = 4\pi R/vT = 0{,}0209$ рад $= 1{,}2°$.

3. Тонкий стержень длиной l вращается вокруг одного из концов, описывая круговой конус (физический конический маятник). Найти период движения T в зависимости от угла при вершине конуса 2φ.

Указание. В системе отсчета, вращающейся вместе со стержнем вокруг вертикальной оси, стержень покоится. Задача сводится к нахождению условия равновесия подвешенного стержня в этой системе под действием силы тяжести и центробежной силы.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{2l\cos\varphi/3g}$

4. Физический маятник, состоящий из шарика, насаженного на конец тонкого жесткого стержня, может свободно колебаться вокруг горизонтальной оси A, проходящей через верхний конец стержня. Ось A неподвижно закреплена на геометрической оси горизонтального диска, равномерно вращающегося вокруг этой (вертикальной) геометрической оси с угловой скоростью ω. Таким образом, плоскость колебаний маятника вращается вместе с диском с той же угловой скоростью ω. Найти период малых колебаний

маятника, если масса стержня пренебрежимо мала по сравнению с массой шарика. При каком условии нижнее вертикальное положение стержня станет неустойчивым положением равновесия?

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{l/(g - l\omega^2)}$, если $l\omega^2 < g$. При $l\omega^2 > g$ положение равновесия неустойчиво.

5. Представим, себе, что в земном шаре просверлен канал по диаметру в плоскости экватора. Вычислить силу F, с которой будет давить на стенку канала тело, падающее по нему с поверхности Земли, в тот момент, когда оно достигнет центра Земли. Считать, что трения нет, а плотность Земли однородна.

Ответ. $F = (4\pi/T)\sqrt{R/gT} \approx 0{,}12P$, где P — вес тела на поверхности Земли, T — продолжительность звездных суток, R — радиус Земли.

6. Какую центральную силу надо прибавить к силе притяжения Солнца для того, чтобы орбита планеты, не меняя своего вида, вращалась вокруг Солнца? (Задача Ньютона.)

Решение. Обозначим через $\mathbf{F}_1$ силу ньютонова притяжения планеты к Солнцу, $\mathbf{F}_2$ — дополнительную центральную силу, о которой говорится в условии задачи, $\boldsymbol{\omega}$ — угловую скорость вращения орбиты. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ перпендикулярен к плоскости орбиты. Полный момент импульса планеты относительно Солнца $\mathbf{L}$ слагается из момента импульса относительно движения $\mathbf{L}_1 = m[r\mathbf{v}_{\text{отн}}]$ и момента импульса дополнительного вращения $\mathbf{L}_2 = mr^2\,\boldsymbol{\omega}$. Момент $\mathbf{L}$, очевидно сохраняется, так как полная действующая сила $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ является центральной. Момент $\mathbf{L}_1$ тоже сохраняется. Действительно, таким моментом обладала бы планета, если бы вращения орбиты не было, и все ее движение происходило под действием только одной центральной силы $\mathbf{F}_1$. Поэтому должен сохраняться и момент $\mathbf{L}_2$, а планета должна вращаться с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{L}_2}{mr^2} = \frac{\text{const}}{r^2}. \tag{64.19}$$

Вращение орбиты неравномерное за исключением случая, когда орбита круговая. В системе отсчета, вращающейся вместе с орбитой с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, уравнение движения планеты, с одной стороны, имеет вид

$$m\mathbf{a}_{\text{отн}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + m\omega^2\mathbf{r} - m[\dot{\boldsymbol{\omega}}r] + 2m[\mathbf{v}_{\text{отн}}\boldsymbol{\omega}].$$

С другой стороны, по условию, в этой системе планета должна двигаться по обычному кеплеровскому эллипсу, а потому $m\mathbf{a}_{\text{отн}} = \mathbf{F}_1$. Это дает

$$\mathbf{F}_1 = -m\omega^2\mathbf{r} + m[\dot{\boldsymbol{\omega}}r] - 2m[\mathbf{v}_{\text{отн}}\boldsymbol{\omega}]. \tag{64.20}$$

Дифференцируя (64.19) по времени и принимая во внимание, что $\mathbf{L}_2 = \text{const}$, получим

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = -2\,\frac{\dot{r}}{r}\,\frac{\mathbf{L}_2}{mr^2} = -2\,\frac{\dot{r}}{r}\,\boldsymbol{\omega}.$$

Скорость $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ можно разложить на две составляющие: вдоль радиуса $\frac{\dot{r}}{r}\,\mathbf{r}$ и перпендикулярную к нему. Последняя возникает из-за вращения планеты

по кеплерову эллипсу с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} = \dfrac{\mathbf{L}_1}{mr^2}$. Таким образом,

$$\mathbf{v}_{\text{отн}} = \frac{\dot{r}}{r}\,\mathbf{r} + [\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} r].$$

Подставив это в (64.20), после простых преобразований получим

$$\mathbf{F}_2 = -m\{\omega^2 + 2(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}})\}\,\mathbf{r}, \tag{64.21}$$

или

$$\mathbf{F}_2 = -[L_2^2 + 2(\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2)]\frac{\mathbf{r}}{mr^4} = \frac{\text{const}}{r^4}\,\mathbf{r}. \tag{64.22}$$

Отсюда видно, что дополнительная сила $\mathbf{F}_2$ должна меняться обратно пропорционально кубу расстояния планеты от Солнца.

7. Применить теорему Кориолиса для решения *обратной задачи* о движении симметричного гироскопа. Прямая задача механики состоит в том, чтобы по заданным силам определить движение механической системы. Обратная задача сводится к определению сил по заданному движению системы. Пусть гироскоп совершает вынужденную регулярную прецессию. Какие на него должны действовать силы, чтобы эта прецессия имела место?

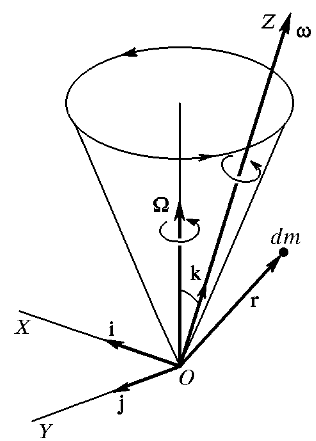


Рис. 185

Решение. Пусть гироскоп равномерно вращается вокруг своей оси фигуры с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, а ось фигуры вращается также равномерно с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$ (вынужденная прецессия). Перейдем к системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$. В этой системе ось фигуры гироскопа неподвижна, так что

$$\mathbf{v}_{\text{отн}} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}],\quad \mathbf{v}_{\text{пер}} = [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}],\quad \mathbf{a}_{\text{пер}} = [\boldsymbol{\Omega}[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]]. \tag{64.23}$$

Мысленно выделим из тела гироскопа элемент массы dm с радиусом-вектором $\mathbf{r}$ (рис. 185). Обозначим через $d\mathbf{f}$ действующую на него (реальную) силу. При использовании формулы (64.9) надо помнить, что угловая скорость вращения системы отсчета обозначена через $\boldsymbol{\Omega}$ (а не через $\boldsymbol{\omega}$, как в этой формуле). Применив к выделенному элементу массы второй закон Ньютона и использовав формулу (64.9) и выражения (64.23), можем написать

$$d\mathbf{f} = dm[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]] + 2dm[\boldsymbol{\Omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]] + dm[\boldsymbol{\Omega}[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]]. \tag{64.24}$$

Поскольку гироскоп предполагается идеально твердым телом, его уравнения движения полностью определяются геометрической суммой $\mathbf{f}$ внешних сил и их моментов относительно точки опоры O. Для нахождения $\mathbf{f}$ проинтегрируем выражение (64.24). Векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$, как постоянные, можно при этом вынести из-под знака интеграла. Кроме того, учтем, что $\int \mathbf{r}\,dm = m\mathbf{r}_C$, где $\mathbf{r}_C$ — радиус-вектор центра масс гироскопа C. В результате получим

$$\mathbf{f} = m\{[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_C]] + 2[\boldsymbol{\Omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_C]] + [\boldsymbol{\Omega}[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}_C]]\}.$$

Первые два слагаемых в правой части этого соотношения равны нулю, так как центр масс C лежит на оси фигуры гироскопа, а потому векторы $\mathbf{r}_C$ и $\boldsymbol{\omega}$ коллинеарны. Поэтому окончательно

$$\mathbf{f} = m[\boldsymbol{\Omega}[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}_C]]. \tag{64.25}$$

Этот результат, конечно, можно было бы написать сразу на основании теоремы о движении центра масс, поскольку ускорение последнего происходит только из-за прецессионного вращения и равно $[\boldsymbol{\Omega}[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}_C]]$ (центростремительное ускорение). Сила $\mathbf{f}$ возникает автоматически как реакция точки опоры на прецессирующий гироскоп.

Перейдем теперь к вычислению момента сил $\mathbf{M}$. Для этого радиус-вектор $\mathbf{r}$ надо векторно умножить на выражение (64.24) и проинтегрировать по m. Но и без вычислений ясно, что при таком интегрировании слагаемое $dm[\boldsymbol{\omega}t[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]]$ не внесет никакого вклада в момент $\mathbf{M}$. Действительно, член, возникающий от интегрирования этого слагаемого, не зависит от того, содержатся в сумме (64.24) другие слагаемые или не содержатся. Но рассматриваемое слагаемое соответствует равномерному вращению вокруг оси фигуры гироскопа, которая, как известно, является одной из свободных осей вращения, а для равномерного вращения вокруг свободной оси никаких внешних сил не требуется. По той же причине не повлияло бы на момент $\mathbf{M}$ и последнее слагаемое суммы (64.24), если бы прецессия происходила вокруг оси, перпендикулярной к оси фигуры гироскопа, а его центр масс C совпадал с точкой опоры O. Во всех остальных случаях это не так. Однако при вычислении момента $\mathbf{M}$ мы пренебрежем последним слагаемым в (64.24) и вот по какой причине. Мы будем предполагать прецессионное вращение Ω очень медленным по сравнению с собственным вращением ω и пренебрегать квадратами малой величины Ω. А последнее слагаемое в (64.24) как раз квадратично по Ω. Таким образом, момент $\mathbf{M}$ происходит лишь от второго слагаемого в сумме (64.24). Разложив соответствующее двойное векторное произведение, умножив его векторно на $\mathbf{r}$ и проинтегрировав, получим

$$\mathbf{M} = 2\int (\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r})\ [\mathbf{r}\boldsymbol{\omega}]\ dm.$$

Для вычисления интеграла введем прямоугольную систему координат. Ось Z направим вдоль оси фигуры гироскопа, а ось X расположим в плоскости, в которой лежат векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ (см. рис. 185). В этой системе координат

$$\mathbf{M} = -2\mathbf{j}\omega\Omega_x \int x^2 dm - 2\mathbf{j}\omega\Omega_z \int zx dm + 2\mathbf{i}\omega\Omega_x \int xy dm + 2\mathbf{i}\omega\Omega_z \int yz dm.$$

Все входящие сюда интегралы, за исключение первого, обращаются в нуль из-за осесимметричного распределения масс. Первый же член может быть записан в виде

$$\mathbf{M} = -\mathbf{j}\omega\Omega_x \int (x^2 + y^2) dm = -\mathbf{j} I_\perp \omega\Omega \sin\vartheta,$$

где ϑ — угол между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$, а $I_\perp$ — соответствующий момент инерции гироскопа. В векторной форме

$$\mathbf{M} = I_\perp [\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\omega}]. \tag{64.26}$$

Векторное произведение $[\boldsymbol{\Omega\omega}]$ есть вектор скорости, с которой при регулярной прецессии движется конец вектора $\boldsymbol{\omega}$, неизменно связанный с осью фигуры гироскопа. Таким образом, вершина гироскопа перемещается не в направлении приложенной силы, а в перпендикулярном к ней направлении — в направлении момента $\mathbf{M}$. Это то, что кажется более всего удивительным в движении гироскопа. Если перейти к системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью прецессии $\boldsymbol{\Omega}$, то можно сказать, что в этой системе момент внешних сил должен уравновешивать момент сил инерции Кориолиса.

§ 65. УРАВНЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ С УЧЕТОМ ЕЕ ВРАЩЕНИЯ

1. Применим уравнение относительного движения (64.15) к движению тел относительно Земли. Движущуюся систему отсчета S свяжем с вращающейся Землей. Речь идет о вращении Земли относительно инерциальной системы отсчета, например системы Коперника. Начало координат O поместим в центре Земли. Таким образом, под $\mathbf{v}_0$ следует понимать скорость, а под $\dot{\mathbf{v}}_0$ — ускорение центра Земли. Земля вращается практически равномерно, а потому последний член в уравнении (64.15) выпадает. Далее, так как речь будет идти только об относительном движении, условимся опускать в уравнении (64.15) индекс «отн», т. е. будем полагать $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_{\text{отн}}$, $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_{\text{отн}}$. Внешнюю силу представим в виде суммы трех сил $\mathbf{F}_З + \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}$, где $\mathbf{F}_З$ — сила гравитационного притяжения Земли, $\mathbf{F}_0$ — равнодействующая сил гравитационного притяжения Солнца, Луны, планет, звезд и прочих небесных тел, $\mathbf{F}$ — геометрическая сумма всех остальных сил, действующих на материальную точку. Сила $\mathbf{F}$ слагается, например, из силы сопротивления воздуха, силы трения, силы натяжения нити и пр. В этих обозначениях уравнение (64.15) примет вид

$$m\mathbf{a} = (\mathbf{F}_З + m\omega^2\mathbf{r}_\perp) + 2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}] + \mathbf{F} + (\mathbf{F}_0 - m\dot{\mathbf{v}}_0). \qquad (65.1)$$

2. Используем далее фундаментальный физический закон, согласно которому *все тела в одном и том же поле тяготения падают и с одинаковым ускорением*. Этот закон называется *обобщенным законом Галилея*, так как Галилей бы первым, кто установил его справедливость для тел, свободно падающих в поле тяжести Земли. Из этого закона следует, что *сила, действующая на тело в гравитационном поле, зависит не от состава тела, а только от его массы. Она строго пропорциональна массе тела.* В этом отношении силы тяготения ведут себя так же, как и силы инерции. Последние, очевидно, также строго пропорциональны массам тел.

3. Основной вклад в силу $\mathbf{F}_0$ вносят гравитационные поля Солнца и Луны. Эти поля, в особенности гравитационное поле Луны, неоднородны. Они убывают обратно пропорционально квадратам

расстояний от Солнца и Луны. Однако размеры Земли очень малы по сравнению с этими расстояниями. При рассмотрении движений вблизи земной поверхности изменениями гравитационных полей Солнца, Луны и всех прочих внешних гравитационных полей на расстояниях порядка диаметра земного шара можно в первом приближении пренебречь, т. е. считать внешнее гравитационное поле в окрестности Земли *однородным*. Однородное гравитационное поле сообщает одно и то же ускорение всем телам, независимо от того, в каких точках поля эти тела находятся. Значит, в принятом приближении внешнее гравитационное поле сообщает рассматриваемой материальной точке такое же ускорение, что и центру Земли, т. е. $\dot{\mathbf{v}}_0$. Поэтому

$$\mathbf{F}_0 - m\dot{\mathbf{v}}_0 = 0.$$

Таким образом, силы *гравитационного притяжения Солнца, и всех остальных небесных тел выпадают из уравнений относительного движения* (65.1). *Они полностью компенсируются поступательными силами инерции, возникающими из-за ускорения, сообщаемого Земле этими полями.* Этот замечательный результат, как мы видим, является следствием обобщенного закона Галилея.

4. Сила $\mathbf{F}_З$ гравитационного притяжения Земли, а с ней и векторная сумма $\mathbf{F}_З + m\omega^2\mathbf{r}_\perp$, вследствие того же закона Галилея, пропорциональны массе материальной точки m. Эта сумма не зависит от относительного движения точки и характеризует только гравитационное поле Земли и ее вращение. Целесообразно рассматривать эту сумму как единую величину. Для нее мы введем обозначение

$$\mathbf{F}_З + m\omega^2\mathbf{r}_\perp = m\mathbf{g}. \tag{65.2}$$

Тогда уравнение относительного движения примет вид

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + 2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}] + \mathbf{F}. \tag{65.3}$$

Величина $\mathbf{g}$ одна и та же для всех тел — она может меняться только при переходе из одной точки пространства в другую.

Для установления физического смысла вектора $\mathbf{g}$ допустим, что внешних сил нет ($\mathbf{F} = 0$), а скорость $\mathbf{v}$ материальной точки равна нулю. Тогда из формулы (65.3) следует $\mathbf{a} = \mathbf{g}$. Таким образом, *вектор* $\mathbf{g}$ *есть ускорение свободно падающего тела относительно Земли при условии, что его скорость в рассматриваемый момент равна нулю.* Оговорка относительно скорости тела необходима, так как при наличии скорости $\mathbf{v}$ появляется дополнительное ускорение из-за кориолисовой силы. Мы видим, что ускорение свободного падения состоит из двух слагаемых

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{абс} + \omega^2\mathbf{r}_\perp. \tag{65.4}$$

Первое из них, $\mathbf{g}_{\text{абс}} = \mathbf{F}_З/m$, есть ускорение, вызванное силой гравитационного притяжения Земли. Такое ускорение мы получили бы, если бы измеряли ускорение свободного падения относительно неподвижной системы отсчета при условии, что, помимо земного гравитационного поля, никаких других полей нет. Второе слагаемое $\omega^2\mathbf{r}_\perp$ есть ускорение, сообщаемое центробежной силой инерции и связанное с вращением Земли.

§ 66. ВЕС И ВЗВЕШИВАНИЕ ТЕЛ

1. *Весом тела называется приложенная к нему сила* **P**, *равная силе, с которой это тело действует не подставку, на которой оно лежит, или тянет за подвес, к которому оно подвешено. При этом предполагается, что тело, подставка и подвес покоятся в той системе отсчета, в которой производится взвешивание. Когда говорят о весе тела, обычно предполагают, что тело, подставка и подвес покоятся относительно Земли.* Допустим ради определенности, что тело лежит на подставке. Оно действует на подставку с силой **P**, подставка действует на тело с противоположно направленной силой **F**. По смыслу **P** и **F** суть силы взаимодействия подставки и тела. Они удовлетворяют третьему закону Ньютона: $\mathbf{F} = -\mathbf{P}$. Предполагая, что тело на подставке покоится, подставим в формулу (65.3) $\mathbf{v} = 0$, $\mathbf{a} = 0$, $\mathbf{F} = -\mathbf{P}$. Тогда для **P** найдем

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}. \qquad (66.1)$$

Учитывая (65.4), видим, что **P** состоит из двух слагаемых:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}_{\text{абс}} + m\omega^2\mathbf{r}_\perp = \mathbf{F}_З + m\omega^2\mathbf{r}_\perp. \qquad (66.2)$$

Значит, *вес есть геометрическая сумма силы гравитационного притяжения Земли* $\mathbf{F}_З$ *и центробежной силы инерции* $m\omega^2\mathbf{r}_\perp$.

Если тело подвешено на нити, то рассуждения остаются теми же самыми. В этом случае направление нити определяет направление силы **P**, а следовательно, и ускорение свободного падения **g**. Оно называется *направлением отвеса* или *отвесным направлением.*

2. Вектор $\mathbf{g}_{\text{абс}}$ характеризует гравитационное поле Земли. В каждой точке пространства он определяется только размерами и формой Земли, а также распределением вещества в ней. Если бы Земля была правильным шаром, а вещество внутри нее было распределено сферически-симметрично, то вектор $\mathbf{g}_{\text{абс}}$ был бы направлен точно к центру Земли. Направление отвеса определяется вектором **g**, т. е. диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{g}_{\text{абс}}$ и $\omega^2\mathbf{r}_\perp$ (рис. 186). Таким образом, если бы даже Земля была строго сферически-симметрична, то направление к ее центру не совпало бы с направлением отвеса. Различие между этими двумя направле-

ниями для сферически-симметричной Земли обусловлено центробежной силой. Реальная Земля сплюснута вдоль оси вращения, и это является второй причиной различия указанных двух направлений. Впрочем, ввиду медленности вращения Земли и малости ее сплюснутости, оба направления отличаются друг от друга весьма мало. Для сферически-симметричной Земли угол α между ними определяется формулой

$$\sin\alpha = \frac{\omega^2 r_\perp}{g}\sin\vartheta = \frac{1}{2}\frac{\omega^2 r}{g}\sin 2\vartheta, \tag{66.3}$$

где ϑ — географическая широта рассматриваемого места (рис. 186). На полюсе и на экваторе угол α обращается в нуль. Для реальной (несферической) Земли формула (66.3) хотя и приближенна, но достаточно точна. Проецируя векторы $\mathbf{g}_{\text{абс}}$ и $\omega^2\mathbf{r}_\perp$ на направление вектора $\mathbf{g}$ и полагая $\cos\alpha \approx 1$, легко получить приближенную формулу

$$g = g_{\text{абс}} - \omega^2 r_\perp \cos\vartheta = g_{\text{абс}} - \omega^2 r\cos^2\vartheta. \tag{66.4}$$

Ошибка этого расчета порядка α^2.

Величина g может быть найдена путем взвешивания или из опытов по свободному падению тел. Более точно ее можно найти, измеряя период колебаний обратного маятника (см. § 41). Опыты показали, что g зависит от географической широты. На полюсе $g = 983{,}2$ см/с^2, на экваторе $g = 978{,}0$ см/с^2. Зная g, можно по формуле (66.4) вычислить и $g_{\text{абс}}$. На полюсе $g_{\text{абс}} = g = 983{,}2$ см/с^2. На экваторе

$$g_{\text{абс}} = g + \omega^2 r = 978{,}0 + \frac{4\pi^2}{86\,164^2}\cdot 6{,}378\cdot 10^8 = 981{,}4 \text{ см/с}^2.$$

Если бы Земля была правильным шаром со сферически-симметричным распределением вещества в нем, то величина $g_{\text{абс}}$ должна была бы быть одной и той же на полюсе и на экваторе. В действительности на экваторе $g_{\text{абс}}$ меньше, чем на полюсе. Это объясняется сплюснутостью Земли, обусловленной действием центробежных сил. Точки экватора отстоят от центра Земли дальше, чем полюсы. Поэтому они притягиваются к центру Земли слабее, чем такие же точки на полюсе. Разумеется, изменение ускорения свободного падения g на земной поверхности нельзя обнаружить с помощью рычажных весов. Но это можно сделать с помощью пружинных весов.

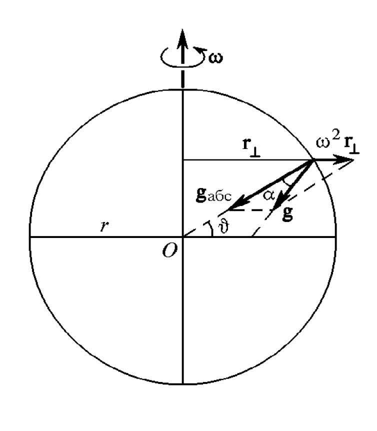


Рис. 186

3. Допустим теперь, что пружинные весы установлены на искусственном спутнике или космическом корабле. Что покажут эти весы, когда взвешиваемое тело покоится относительно корабля? Наши прежние рассуждения не изменятся, только в них Землю надо заменить космическим кораблем. В частности, движущуюся систему отсчета S мы связываем теперь с кораблем. Землю же надо рассматривать как внешнее тело, которое наряду с Солнцем, Луной и прочими небесными телами создает внутри внешнее гравитационное поле. В силу малых размеров корабля это поле внутри корабля можно считать однородным. Оно полностью компенсируется поступательными силами инерции, возникающими в системе отсчета S из-за ускорения, сообщаемого ей этим гравитационным полем. Поэтому если двигатели на корабле выключены и он свободно падает в гравитационном поле, то относительное движение внутри корабля описывается прежним уравнением (65.3). Только ввиду ничтожности гравитационного поля, создаваемого самим кораблем, член $m\mathbf{g}$ теперь обусловлен исключительно вращением корабля и равен $m\omega^2\mathbf{r}_\perp$ (центробежная сила). Если корабль не вращается, а взвешиваемое тело относительно него покоится, то из уравнения (65.3) получаем $\mathbf{F} = 0$. Величина $\mathbf{F}$ есть сила, с которой на тело действует растянутая пружина весов. Мы видим, что пружина не растянута, т. е. вес, показываемый весами, равен нулю. Весы не реагируют на внешние гравитационные поля, последние полностью компенсируются поступательными силами инерции. Такое состояние «*невесомости*» свойственно всем телам внутри космического корабля. Состояние «невесомости» проявляется в том, что в телах полностью отсутствуют внутренние упругие напряжения, которые в обычных условиях возникают под действием силы тяжести.

Если корабль вращается, то появляется центробежная сила, не компенсируемая внешними гравитационными полями. Эта сила создает на корабле «*искусственную тяжесть*».

Наконец, если включены двигатели, сообщающие кораблю дополнительное поступательное ускорение $\mathbf{w}$, то в правой части уравнения (65.3) добавляется член $-m\mathbf{w}$. Весы покажут вес $\mathbf{P} = -m\mathbf{w}$. Все тела внутри космического корабля снова становятся «весомыми». Этим «весом» и обусловлены перегрузки, которые испытывают космонавты на старте или торможении космических кораблей.

ЗАДАЧИ

1. Тело на экваторе взвешивается на пружинных весах в полдень, когда гравитационные силы Земли и Солнца тянут его в противоположные стороны. Одновременно такое же тело взвешивается в полночь в диаметрально противоположной точке земного шара, когда обе эти силы направлены в одну сторону. Вес какого тела будет больше?

Решение. Если пренебречь неоднородностью гравитационного поля Солнца в окрестности Земли, то в обоих случаях получится один и тот же вес. Учтем теперь неоднородность гравитационного поля Солнца, пренебрегая влиянием Луны. Веса тел в диаметрально противоположных точках земного шара *1* (день) и *2* (ночь) будут соответственно

$$P_1 = F_З - F_С(R - r) - m\omega^2 r + mw,$$

$$P_2 = F_З + F_С(R + r) - m\omega^2 r + mw$$

(рис. 187). Здесь $F_З$ и $F_С$ — силы гравитационного притяжения Земли и Солнца соответственно, R — расстояние между их центрами, r — радиус Земли, w — ускорение центра Земли под действием гравитационного притяжения Солнца. Очевидно, $mw = F_С(R)$. Вычитая, находим

$$P_2 - P_1 = [F_С(R + r) - F_С(R)] + [F_С(R - r) - F_С(R)].$$

Разлагая обе разности в квадратных скобках по формуле Тейлора и ограничиваясь квадратичными членами по r, получим

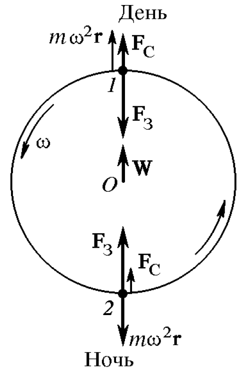


Рис. 187

$$P_2 - P_1 = r^2 \frac{d^2 F_С}{dR^2}.$$

Преобразуем это выражение, используя соотношения

$$F_С = G\frac{Mm}{R^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} m, \; P = mg$$

(M — масса Солнца, T — период обращения Земли вокруг Солнца, P — вес тела). После несложных преобразований найдем

$$\frac{P_2 - P_1}{P} = \frac{24\pi^2}{gT^2}\frac{r^2}{R} = \frac{12\pi^2 r^2}{sR}.$$

Здесь $s = 1/2\, gT^2$ означает расстояние, которое проходила бы Земля в течение года, если бы она двигалась равноускоренно с ускорением g. Вычисляя это расстояние, получим $s \approx 5 \cdot 10^{12}$ км и далее

$$\frac{P_2 - P_1}{P} \approx 6{,}5 \cdot 10^{-12}.$$

2. Найти разность между весами одинаковых тел в диаметрально противоположных точках земного шара, обусловленную неоднородностью гравитационного поля Луны. Считать, что центры Луны, Земли и обе рассматриваемые точки *1* и *2* лежат на одной прямой (см. предыдущую задачу).

Ответ. $\frac{P_2 - P_1}{P} = \frac{M_Л}{M_З}\frac{24\pi^2 r^2}{RgT^2} \approx 8 \cdot 10^{-10}$, где $M_З$ и $M_Л$ — масса Земли и Луны, R расстояние между их центрами, T — период обращения Луны вокруг Земли, r — радиус Земли.

3. Пароход движется на восток вдоль параллели с географической широтой $\vartheta = 60°$. Скорость парохода $v = 10$ м/с. Определить вес тела P на пароходе, если взвешивание происходит на пружинных весах. Вес того же тела, неподвижного относительно Земли, в той же точке земной поверхности равен P_0.

Ответ.

$$P = P_0\left[1 - \frac{2\omega v \cos\vartheta + v^2/R}{g}\right] \approx P_0\left(1 - 2\,\frac{\omega v}{g}\cos\vartheta\right) \approx P_0(1 - 7{,}5\cdot 10^{-5})$$

(R — радиус Земли).

4. Самолет летит с постоянной скоростью, описывая окружность на постоянной высоте. Какое направление будет укзывать нить отвеса подвешенного в салоне самолета? Найти период малых колебаний математического маятника внутри самолета, если длина маятника равна l , корпус самолета наклонен к направлению горизонта под углом α.

Ответ. Нить отвеса установится перпендикулярно к полу салона самолета. $T = 2\pi\sqrt{l\cos\alpha/g}$.

5. Самолет летит на постоянной высоте по окружности радиусом $R = 25$ км с постоянной скоростью $v = 250$ м/с. В кабине самолета установлены пружинные и маятниковые часы. Какое время полета t' покажут маятниковые весы, если это время, измеренное пружинными часами, равно $t = 1$ ч? Часы считать идеальными. Силу Кориолиса, ввиду ее малости, не учитывать.

Ответ. $t' = t(1 + v^4/(4R^2g^2)) = 1$ ч 56 с.

§ 67. ОТКЛОНЕНИЕ ПАДАЮЩИХ ТЕЛ ОТ НАПРАВЛЕНИЯ ПОДВЕСА

1. Пусть тело свободно падает в поле тяжести Земли. В этом случае $\mathbf{F} = 0$, и уравнение (65.3) переходит в

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} + 2[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}]. \qquad (67.1)$$

Это уравнение описывает *свободное падение тел с учетом вращения Земли*. Влияние вращения Земли сводится к действию центробежной и кориолисовой сил. Центробежная сила учитывается автоматически, так как она включена в вес тела $m\mathbf{g}$ как его составная часть. Наличие этой силы не меняет вид уравнения. Только направление к центру Земли заменяется направлением отвеса. В остальном центробежная сила не приводит к качественно новым явлениям. Более существенно влияет на характер движения кориолисова сила. *При падении тел без начальной скорости кориолисова сила проявляется в отклонении свободно падающих тел к востоку и экватору от направления отвеса.* Теория этих явлений сводится к решению дифференциального уравнения (67.1). Если вектор $\mathbf{g}$ постоянен, то векторное уравнение (67.1) эквивалентно системе трех линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Точное решение такой системы получить нетрудно с помощью общеизвестных методов, излагаемых в теории дифференциальных уравнений. Однако мы по этому пути не пойдем. Он громоздок, а главное, получение точных решений вряд ли оправдано, когда в уравнении (67.1) пренебрегается зависимостью $\mathbf{g}$ от координат. Последнее допустимо лишь тогда, когда движение рассматривается в сравнительно небольшой области пространства, во всех точках кото-

рой вектор $\mathbf{g}$ практически один и тот же. А в этих случаях прекрасно работает приближенный *метод последовательных приближений*, дающий вполне достаточную точность. Вычисления по этому методу просты и лучше выявляют сущность явления. Им мы и воспользуемся.

2. В уравнении (67.1) член $2[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}]$ мал по сравнению с $\mathbf{g}$. Его можно рассматривать как малую поправку и в *нулевом приближении* отбросить. Тогда получатся законы свободного падения без учета вращения Земли:

$$\mathbf{a} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t, \tag{67.2}$$

где $\mathbf{v}_0$ — начальная скорость тела.

Пользуясь нулевым приближением, можно учесть и влияние кориолисовой силы. С этой целью в уравнение (67.1) мы подставим значение $\mathbf{v}$ из нулевого приближения и таким путем получим ускорение $\mathbf{a}$ в *первом приближении*:

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} + 2[\mathbf{v}_0\boldsymbol{\omega}] + 2t[\mathbf{g}\boldsymbol{\omega}]. \tag{67.3}$$

Интегрирование этого уравнение дает скорость $\mathbf{v}$ в том же приближении:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + gt + 2t[\mathbf{v}_0\boldsymbol{\omega}] + t^2[\mathbf{g}\boldsymbol{\omega}]. \tag{67.4}$$

С помощью этого выражения снова уточняем выражение для кориолисовой силы. Именно, подставляя его в уравнение (67.1), получаем выражение для ускорения $\mathbf{a}$ во *втором приближении*:

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} + 2[\mathbf{v}_0\boldsymbol{\omega}] + 2t[\mathbf{g}\boldsymbol{\omega}] + 4t[[\mathbf{v}_0\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}] + 2t^2[[\mathbf{g}\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}], \tag{67.5}$$

а после интегрирования по t — для скорости $\mathbf{v}$ в том же приближении:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t + 2t[\mathbf{v}_0\boldsymbol{\omega}] + t^2[\mathbf{g}\boldsymbol{\omega}] + 2t^2[[\mathbf{v}_0\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}] + \frac{2}{3}t^3[[\mathbf{g}\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}] \tag{67.6}$$

Описанный процесс последовательных приближений можно было бы продолжить неограниченно. Оборвем его на втором приближении. Интегрируя (67.6) по t, находим радиус-вектор материальной точки в любой момент времени во втором приближении:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 + t^2[\mathbf{v}_0\boldsymbol{\omega}] + \\ + \frac{1}{3}t^3[\mathbf{g}\boldsymbol{\omega}] + \frac{2}{3}t^3[[\mathbf{v}_0\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}] + \frac{1}{6}t^4[[\mathbf{g}\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}]. \tag{67.7}$$

В частности, если тело падает без начальной скорости, то для его смещения из начального положения $\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ получим

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 + \frac{1}{3}t^3[\mathbf{g}\boldsymbol{\omega}] + \frac{1}{6}t^4[[\mathbf{g}\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}]. \tag{67.8}$$

3. Чтобы проанализировать полученный результат, введем прямоугольную систему координат, начало которой поместим в точку A, из которой начинает падать рассматриваемое тело (рис. 188). Ось X направим по параллели на восток, ось Y — по меридиану к экватору, ось Z — по направлению отвеса вниз, т. е. вдоль век-

тора **g**. Спроецируем затем выражение (67.8) на координатные оси. Векторное произведение [**gω**] направлено на восток, двойное векторное произведение [[**gω**]**ω**] есть вектор, направленный от оси вращения Земли и перпендикулярный к ней. Поэтому, переходя к проекциям, получим

$$z = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{6}\omega^2 t^4 g\cos^2\vartheta, \qquad (67.9)$$

$$x \equiv s_{\text{вост}} = \frac{1}{3}\omega t^3 g\cos\vartheta, \qquad (67.10)$$

$$y \equiv s_{\text{экв}} = \frac{1}{12}\omega^2 t^4 g\sin 2\vartheta, \qquad (67.11)$$

где ϑ — угол географической широты рассматриваемого места. Второе слагаемое в формуле (67.9) есть только малая поправка к нулевому приближению и не меняет качественно характер явления. Это слагаемое можно отбросить и находить время падения по формуле нулевого приближения

$$t = \sqrt{\frac{2z}{g}}. \qquad (67.12)$$

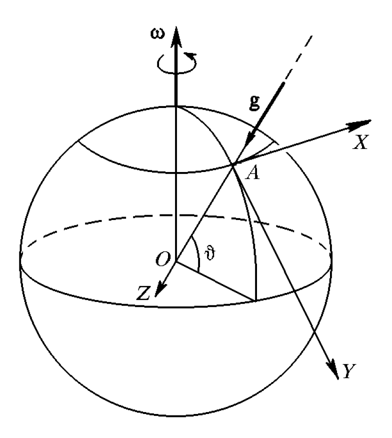


Рис. 188

Иное дело, когда речь идет о формулах (67.10) и (67.11). Здесь в нулевом приближении $x = y = 0$. Вращение Земли сказывается в появлении двух новых эффектов: отклонении свободно падающих тел к востоку и к экватору от направления отвеса (а не от направления к центру Земли, как это иногда ошибочно утверждают). Выражение для восточного отклонения можно записать в виде

$$s_{\text{вост}} = \frac{2}{3}\omega t h\cos\vartheta = \frac{4}{3}\pi\frac{t}{T}h\cos\vartheta, \qquad (67.13)$$

где h — высота падения, а $T = 2\pi/\omega$ — период суточного вращения Земли.

Отклонение $s_{\text{вост}}$ очень мало, так как в формулу (67.13) входит малый множитель t/T. Так, при $h = 100$ м $t = 4{,}5$ с, и для широты Москвы ($\vartheta = 56°$) получаем $s_{\text{вост}} = 1{,}2$ см. При падении с высоты $h = 500$ м получилось бы $s_{\text{вост}} = 13{,}8$ см. Несмотря на малость эффекта, его с уверенностью удалось наблюдать в опытах с падением тел в глубоких шахтах уже в середине XIX века.

Экваториальное отклонение связано с восточным соотношением:

$$s_{\text{экв}} = \frac{\omega t\sin\vartheta}{2}s_{\text{вост}}. \qquad (67.14)$$

Из-за наличия малого множителя $\omega t = 2\pi t/T$ отклонение к экватору очень мало и по этой причине недоступно наблюдению.

ЗАДАЧИ

1. Из ружья произведен выстрел строго вверх (т. е. параллельно линии отвеса). Начальная скорость пули $v_0 = 100$ м/с, географическая широта места $\vartheta = 60°$. Учитывая осевое вращение Земли, определить приближенно, насколько восточнее или западнее от места выстрела упадет пуля. Сопротивление воздуха не принимать во внимание.

Ответ. Пуля отклонится к западу на расстояние

$$x_{\text{зап}} = \frac{4}{3}\frac{v_0^3\omega}{g}\cos\vartheta \approx 51 \text{ см}.$$

Результат может показаться неожиданным. При движении вверх кориолисова сила отклоняет брошенное тело к западу от направления отвеса, при движении вниз она отклоняет его к востоку. На первый взгляд кажется, что отклонение к западу должно компенсироваться последующим отклонением к востоку. На самом деле это не так. Когда тело движется вверх, его боковая начальная скорость равна нулю. В наивысшую точку тело переходит, однако, с западной составляющей скорости, которую оно приобретает под действием кориолисовой силы. Поэтому обратное падение тела начинается с начальной скоростью, направленной на запад. При этом тело не только смещается к востоку под действием изменившей направление кориолисовой силы, но и продолжает по инерции двигаться на запад. В результате отклонение к западу оказывается больше, чем отклонение к востоку.

2. Под каким углом α к вертикали надо произвести выстрел вверх, чтобы пуля упала обратно в точку, из которой был произведен выстрел? Использовать данные предыдущей задачи.

Ответ. Ствол ружья надо наклонить к востоку под углом

$$\alpha = \frac{2}{3}\frac{v_0\omega}{g}\cos\vartheta \approx 2{,}45\cdot 10^{-4} \text{ рад} \approx 0{,}85' \approx 51''.$$

3. Из орудия, установленного в точке земной поверхности с географической широтой $\vartheta = 30°$, производится выстрел в направлении на восток. Начальная скорость снаряда $v_0 = 500$ м/с, угол вылета снаряда (т. е. угол наклона касательной в начальной точке траектории к плоскости горизонта) $\alpha = 60°$. Пренебрегая сопротивлением воздуха и учитывая вращение Земли, определить приближенно отклонение y точки падения снаряда от плоскости стрельбы. Какое это будет отклонение: к югу или к северу? (Плоскостью стрельбы называется плоскость, проходящая через направление касательной в начальной точке траектории и направление отвеса в той же точке.)

Ответ. $y = \frac{1}{g^2}\cdot 4\omega v_0^3 \sin\vartheta\cos\alpha\sin^2\alpha \approx 71$ м. К югу.

§ 68. МАЯТНИК ФУКО

1. Опыты по отклонению к востоку свободно падающих тел в принципе могли бы служить экспериментальным доказательством неинерциальности земной системы отчета и приближенной инерциальности системы Коперника. Однако постановка таких опытов затруднительна, а их точность невелика. Для этой цели более подхо-

дящим является *маятник Фуко*. Так называется массивный шар, подвешенный на достаточно длинной нити и совершающий малые колебания около положения равновесия. Отклоним маятник из положения равновесия, а затем предоставим его самому себе. Если бы Земля была инерциальной системой отсчета, то на маятник действовали бы только «настоящие силы»: сила веса $m\mathbf{g}$ и сила натяжения нити $\mathbf{F}$ (силами трения и сопротивления воздуха пренебрегаем). Обе эти силы лежат в вертикальной плоскости. Поэтому если маятнику не сообщен толчок в боковом направлении, то он все время будет колебаться в одной и той же вертикальной плоскости, неподвижной относительно Земли. Опыты показали, что это не так: плоскость качаний маятника в земной системе отсчета медленно поворачивается вокруг вертикали рассматриваемого места и притом в том же направлении, в каком совершают суточное вращение Солнце и звезды на небесной сфере. Это доказывает, что земная система отсчета не является инерциальной.

Чтобы объяснить вращение плоскости качаний маятника, предположим, что Земля равномерно вращается относительно неизвестной нам инерциальной системы отсчета с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. В земной системе отсчета к «настоящим силам», действующим на маятник, добавятся еще силы инерции: центробежная и кориолисова. Движение маятника будет описываться уравнением (65.3). Кориолисова сила $2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}]$ перпендикулярна к плоскости качаний маятника. Она-то и вызывает вращение этой плоскости.

2. Допустим сначала, что опыт произведен на полюсе Земли. Тогда в уравнении (65.3) вектор $\boldsymbol{\omega}$ будет направлен вдоль вертикали. Но результат легко предсказать, если рассмотреть качания маятника в инерциальной системе отсчета. В этой системе нет никаких сил инерции — действуют только сила веса $m\mathbf{g}$ и сила натяжения нити $\mathbf{F}$. Поэтому в инерциальной системе плоскость качаний маятника будет сохранять неизменное положение. Земля же будет вращаться относительно этой неподвижной плоскости с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Иными словами, плоскость качаний маятника будет вращаться относительно Земли с той же угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, но в противоположном направлении. Разумеется, результат предсказаний не может зависеть от способа рассмотрения (если только способ правильный). Поэтому к тому же результату мы пришли бы, если бы с самого начала рассматривали задачу в земной системе отсчета с помощью уравнения относительного движения (65.3). Это замечание позволяет легко разобраться в вопросе, как будет вести себя плоскость качаний маятника, если опыт произведен в любом месте земной поверхности (а не только на полюсе).

3. Допустим, что опыт произведен в точке земной поверхности с географической широтой ϑ. Разложим вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на

две составляющие: вертикальную $\boldsymbol{\omega}_в$ и горизонтальную $\boldsymbol{\omega}_г$: $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_в + \boldsymbol{\omega}_г$. Горизонтальную составляющую в свою очередь разложим на две составляющие: $\boldsymbol{\omega}_\parallel$ и $\boldsymbol{\omega}_\perp$, из которых $\boldsymbol{\omega}_\parallel$ лежит в плоскости качаний маятника, а $\boldsymbol{\omega}_\perp$ к ней перпендикулярна (рис. 189). Тогда уравнение (65.3) представится в виде

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + 2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_в] + 2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_\perp] + 2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_\parallel] + \mathbf{F}.$$

Составляющая силы Кориолиса $2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_\perp]$ направлена вдоль нити маятника. Она слегка меняет натяжение нити, а с ним и период колебаний маятника. На положение плоскости качаний маятника эта составляющая не оказывает влияния. В задаче о вращении плоскости качаний маятника ее можно отбросить. Вторая составляющая силы Кориолиса $2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_в]$ в нашей задаче наиболее важна. Она перпендикулярна к плоскости качаний маятника и вызывает вращение этой плоскости. Третья составляющая $2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_\parallel]$ тоже перпендикулярна к плоскости качаний маятника, а потому она также оказывает влияние на эту плоскость. Однако при малых колебаниях маятника эта составляющая мала в силу малости угла α. Кроме того, при колебаниях маятника она периодически меняет направление. Когда маятник движется от центра O вправо или влево, составляющая $2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_\parallel]$ направлена за плоскость рисунка (рис. 189). Когда маятник из крайних положений приближается к центру O, она направлена противоположно, т. е. к читателю. Поэтому сила $2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_\parallel]$ не приводит к систематическому вращению плоскости колебаний маятника, а вызывает лишь малые колебания ее относительно среднего положения. Эту силу можно также отбросить. В результате уравнение относительного движения примет вид

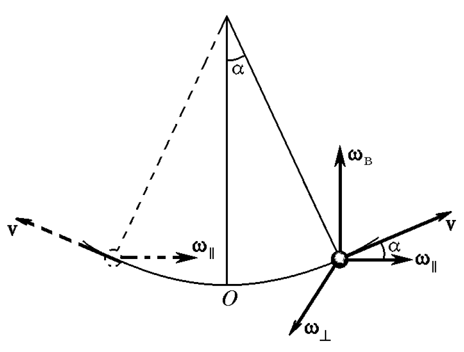


Рис. 189

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + 2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_в] + \mathbf{F}. \qquad (68.1)$$

Из уравнения выпала горизонтальная составляющая угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Уравнение приняло такой же вид, как и на полюсе. Вся разница только в том, что вместо полной угловой скорости в него вошла ее вертикальная составляющая $\boldsymbol{\omega}_в$, т. е. маятник будет вести себя так же, как и на полюсе. Но плоскость качаний его будет вращаться с меньшей угловой скоростью

$$\omega_в = \omega \sin \vartheta. \qquad (68.2)$$

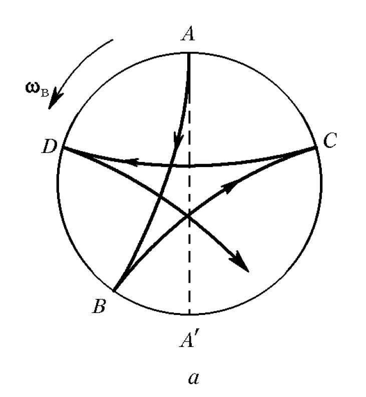
Полный оборот плоскость качаний маятника совершит за время

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega \sin \vartheta} = \frac{T}{\sin \vartheta}, \tag{68.3}$$

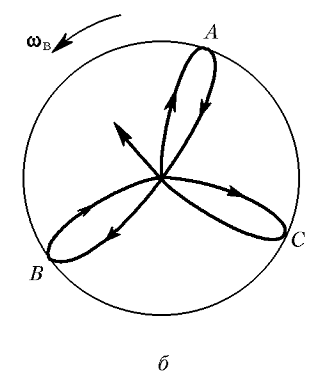
где T — период вращения Земли относительно инерциальной системы отсчета.

Реальный опыт впервые был произведен Фуко в Парижской обсерватории в 1850 г. и повторен в 1851 г. в Пантеоне. Маятник имел длину 67 м и состоял из металлического шара массой $m = 28$ кг. Опыт показал, что относительно Земли плоскость качаний маятника вращается вокруг вертикали рассматриваемого места в соответствии с формулами (68.2) и (68.3), если только вращение самой Земли относить к системе Коперника. Это доказывает, что земная система отсчета не инерциальна, а система Коперника — инерциальна. Конечно, последнее заключение не может быть столь же категоричным, каким является первое. Лучше сказать, что опыт Фуко не противоречит предположению об инерциальности коперниковой системы отсчета.

4. Исследуем более детально форму траектории маятника Фуко при его колебаниях относительно земной системы отсчета. Как уже выяснено, можно отвлечься от горизонтальной составляющей угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и считать, что Земля вращается вокруг вертикали с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_\text{в}$. Иначе говоря, можно рассуждать так, как если бы опыт Фуко был произведен на полюсе, но Земля вращалась бы с меньшей угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_\text{в}$. Пусть вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_\text{в}$ направлен перпендикулярно к плоскости рисунка к читателю (рис. 190). Кориолисова сила $2m[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}_\text{в}]$, действующая на маятник при его колебаниях, перпендикулярна к его траек-



а



б

Рис. 190

тории и направлена вправо по ходу движения маятника. Эта сила искривляет траекторию маятника. Допустим сначала, что маятник отклонен в крайнее положение A, а затем отпущен без начальной скорости. Если бы не было кориолисовой силы, то маятник пришел бы в диаметрально

противоположную точку A'. Кориолисова сила отклонит маятник в сторону, и он придет в точку B, расположенную правее. В этой точке скорость маятника обратится в нуль, а затем изменит направление. Изменит направление и кориолисова сила. Она по-прежнему будет изгибать траекторию маятника вправо (так как наблюдатель также должен повернуться, чтобы все время смотреть в направлении движения маятника). Затем маятник будет последовательно приходить в новые точки поворота C, D, ... В результате получится сложная кривая с угловыми точками, изображенная схематически на рис. 190 *а*.

Несколько иной характер траектории получится в том случае, когда маятнику сообщен толчок из положения равновесия. Траектория по-прежнему будет изгибаться вправо. Но в крайние точки A, B, C, ... (рис. 190 *б*) маятник будет приходить с отличными от нуля азимутальными скоростями, которые он приобрел под действием кориолисовой силы, когда двигался от центра. В результате в местах поворота получатся не точки заострения, а плавные закругления, как это изображено на рисунке. Вследствие медленности вращения Земли наблюдатель не замечает искривления плоскости качания маятника. В обоих случаях ему кажется, что плоскость качаний маятника вращается вокруг вертикали с угловой скоростью $\omega_в = \omega \sin \vartheta$.

ЗАДАЧА

Один из маятников Фуко был установлен в Лениграде в Исаакиевском соборе. Длина маятника $l = 98$ м, линейная амплитуда колебаний шара маятника (т. е. наибольшее отклонение его из положения равновесия) $x_0 = 5$ м. Маятник отпускался из крайнего положения без начального толчка. Определить боковое отклонение шара маятник от положения равновесия в момент прохождения его через среднее положение. Географическая широта Ленинграда $\vartheta = 60°$.

Решение. Эта задача решается проще, если движение рассматривать в неподвижной системе отсчета (точнее, в системе отсчета, вращающейся относительно Земли вокруг вертикали рассматриваемого места с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_в$). В этой системе уравнение малых колебаний математического маятника имеет вид $\ddot{\mathbf{r}} + \Omega^2 \mathbf{r} = 0$, где $\Omega^2 = g/l$, а $\mathbf{r}$ — смещение маятника из положения равновесия. В начальный момент маятник, вращаясь вместе с Землей, имеет боковую скорость $\omega_в x_0$. Поместим начало координат O в положение равновесия маятника. Ось X направим из точки O к точке $(x = x_0,\ y = 0)$, в которой маятник находился в начальный момент. Для движения вдоль оси Y имеем $\ddot{y} + \Omega^2 y = 0$. Решая это уравнение при начальных условиях $y_{t=0} = 0$, $\dot{y}_{t=0} = \omega_в x_0$, получим

$$y = \frac{\omega_в x_0}{\Omega} \sin \Omega t.$$

В среднем положении $\Omega t = \pi/2$, для бокового отклонения в этом положении наша формула дает

$$y = \frac{\omega_в x_0}{\Omega} = \frac{\omega x_0}{\Omega} \sin \vartheta \approx 1 \text{ мм}.$$

Читателю рекомендуется получить тот же результат, рассматривая движение в земной системе отсчета.

§ 69. ПРИЛИВЫ

1. У берегов океанов и морей дважды в сутки наблюдается поднятие (*прилив*) морской воды до некоторого максимального уровня (*полная вода*). После этого начинается опускание ее (*отлив*) до минимального уровня (*малая вода*). Разность уровней большой и малой воды называется *амплитудой прилива*. Время между следующими друг за другом положениями полной (или малой) воды составляет 12 ч 25 мин. Это время точно совпадает с половиной промежутка времени, в течение которого Луна в своем видимом движении совершает полный оборот вокруг Земли. Поэтому уже давно причину приливов и отливов связывали с положением Луны на небесном своде. Однако научное объяснение этого явления впервые было дано Ньютоном.

Приливы и отливы объясняются *неоднородностью поля тяготения Луны и отчасти Солнца*. Если бы внешнее гравитационное поле было однородно, то в земной системе отсчета оно полностью компенсировалось бы поступательной силой инерции, связанной с ускоренным движением центра масс Земли (где мы помещаем начало координат этой системы). На самом деле гравитационное поле неоднородно, и полная компенсация имеет место только в центре масс Земли. В остальных точках полной компенсации нет. Остаются нескомпенсированные силы, которые и вызывают приливы. Влияние Луны более существенно, чем Солнца. Хотя лунное поле тяготения и слабее солнечного, но оно *более неоднородно*, так как Луна примерно в 400 раз ближе к Земле, чем Солнце. Рассмотрим сначала, как выглядело бы явление приливов, если бы Солнца не было, а Земля подвергалась бы воздействию гравитационного поля одной только Луны.

2. Для простоты будем считать Землю твердым недеформированным шаром, покрытым океаном постоянной глубины. Будем считать также, что Луна движется в плоскости земного экватора. Рассмотрим точки океана, расположенные вдоль экватора. Земля и Луна вращаются вокруг их общего центра масс, как бы непрерывно падая на него. Но точка A (рис. 191), для которой Луна находится в *зените*, расположена ближе к Луне, чем центр Земли O. Последний в свою очередь, ближе к Луне, чем диаметрально противоположная точка B, для которой Луна находится в *надире*. Поэтому гравитационное поле Луны в точке A сильнее, а в точке B слабее, чем в центре Земли. Под влиянием гравитационного притяжения Луны частицы воды в точке A будут приближаться к Луне с бо́льшим ускорением, чем центр Земли O, а частицы воды в точке B — с меньшим ускорением. Начиная с этого места, большинство авторов по примеру Ньютона рассуждает неточно. Заключения, касающиеся ускорений частиц, переносятся на их скорости и перемещения. Говорят, что частицы воды в A будут приближаться к Луне быстрее, чем центр Земли O, а потому они будут опере-

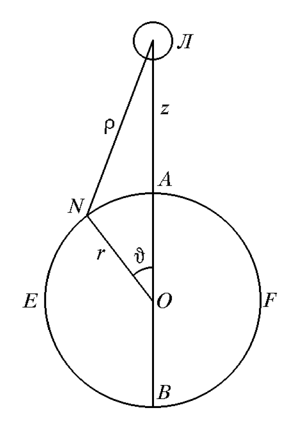


Рис. 191

жать последний. Напротив, частицы воды вблизи точки B будут отставать от центра Земли. По этой причине на поверхности океана образуются два диаметрально противоположных горба или выступа с центрами в точках A и B (рис. 192 *а*). Центры горбов все время обращены к Луне и от нее. Вследствие осевого вращения Земли они бегут по поверхности океана, непрерывно следуя за движением Луны. Вот почему два последовательных прилива (или отлива) отделены друг от друга промежутком времени в 12 ч 25 мин. Согласно приведенному объяснению полная вода должна наблюдаться в моменты времени, когда Луна находится в *верхней* или *ниж-*

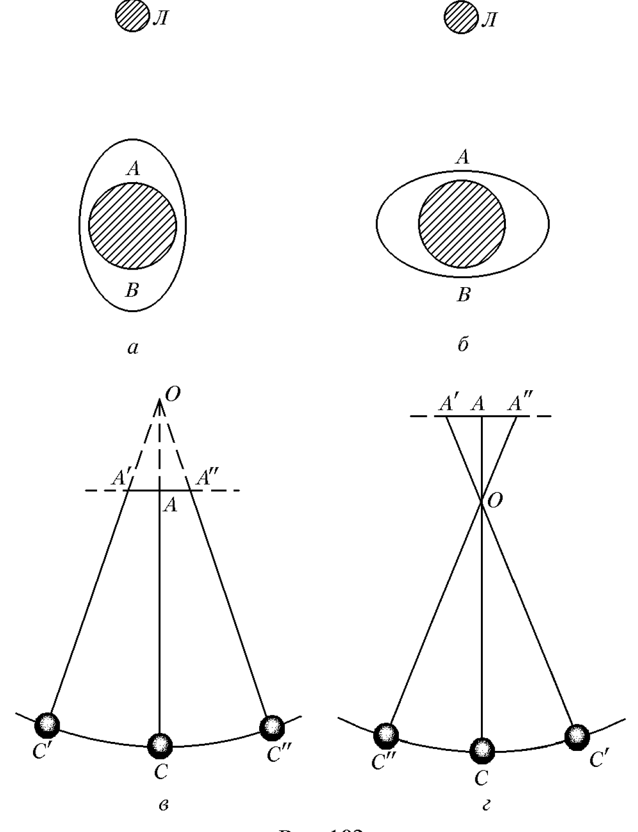


Рис. 192

ней кульминации (в зените или надире), а малая вода — когда они находятся в *квадратуре*. Наблюдения не согласуются с этим заключением. Скорее, справедлива обратная закономерность: *полная вода наблюдается в квадратурах, а малая — в кульминациях Луны* (рис. 192 *б*). Во всяком случае, между кульминацией Луны и последующей полной водой проходит значительный промежуток времени, составляющий несколько часов. В службе портов среднее значение этого промежутка называется *прикладным часом*. Такое расхождение между теорией и наблюдениями связано

прежде всего с неточностью в рассуждениях, отмеченной выше. Смещение и скорости частиц воды определяются не только ускорениями, но и их *начальными значениями.* Если бы в какой-либо один и тот же момент времени (который можно принять за начальный) частицы воды находились, например, в состоянии покоя, то рассуждение было бы верным. Но это условие на Земле как раз и не выполняется. На этом вопросе мы остановимся несколько ниже.

3. Задачу построения теории приливов можно разделить на две части. Одна, более простая, заключается в нахождении *приливообразующих сил*, действующих на воду океана в различных точках земного шара. Вторая, несравненно более трудная, состоит в том, чтобы определить *вынужденное движение* воды, которое установится под действием этих сил. Остановимся на первой части задачи.

Силы, действующие на частицы воды, в земной системе отсчета складываются из сил тяготения и сил инерции. Силы притяжения самой Земли, а также центробежные силы, возникающие из-за вращения Земли вокруг ее центра масс, в вопросах образования приливов роли не играют. Их результирующую напряженность мы будем обозначать буквой **g** (ускорение свободного падения). *Вектор* **g** *в каждой точке земной поверхности остается постоянным. Он определяет форму свободной поверхности океана в состоянии равновесия.* Эта поверхность всюду перпендикулярна к вектору **g**. В теории приливов нас интересуют *отклонения от этой равновесной формы*, связанные с действием переменных приливообразующих сил. При определении этих отклонений равновесную форму поверхности воды в океане можно считать шаровой. Кориолисову силу инерции мы не будем принимать во внимание, потому что воду в океане в отсутствие возмущающих приливообразующих сил мы будем считать покоящейся. Кориолисовы силы, возникающие из-за движений воды, вызванных приливами и отливами, пренебрежимо малы. Таким образом, при вычислении приливообразующих сил надо учесть только силы тяготения внешних сил (Луны), а также силы инерции, связанные с ускоренным движением центра Земли. Такие силы инерции по нашей терминологии называются *поступательными силами инерции* (см. § 64).

4. Приливообразующую силу мы будем относить к единице массы, на которую она действует, и обозначать буквой **f**. Проще сначала вычислить не самый вектор **f**, а соответствующий ему потенциал $\varphi_{\text{пр}}$, т. е. потенциальную энергию единицы массы, находящейся под действием силы **f**. Он складывается из потенциала сил тяготения Луны ($\varphi_{\text{Л}}$) и потенциала поступательных сил инерции ($\varphi_{\text{ин}}$). Опуская эти вычисления (они приводятся в задаче к этому параграфу), приведем окончательные результаты. Приливообразующий потенциал определяется выражением

$$\varphi_{\text{пр}} = -\frac{3}{4}\frac{GM_{\text{Л}}}{R_{\text{ЗЛ}}^3} r^2 \cos 2\vartheta, \tag{69.1}$$

где $M_{\text{Л}}$ — масса Луны, $R_{\text{ЗЛ}}$ — расстояние между центрами Земли и Луны, ϑ — зенитное расстояние Луны в рассматриваемый момент времени, r — расстояние от центра Земли до точки наблюдения N (см. рис. 191). Величины r и ϑ являются полярными координатами точки наблюдения. Приливообразующая сила найдется дифференцированием по-

тенциала $\varphi_{\text{пр}}$. Она содержит вертикальную ($f_{\text{в}}$) и горизонтальную ($f_{\text{г}}$) составляющие

$$f_{\text{в}} = -\frac{\partial \varphi_{\text{пр}}}{\partial r}, \quad f_{\text{г}} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_{\text{пр}}}{\partial \vartheta}. \tag{69.2}$$

(За положительные приняты направления возрастания величин r и ϑ.) Дифференцируя и вводя ускорение свободного падения $g = G\frac{M_{\text{З}}}{r^2}$, получим

$$f_{\text{в}} = \frac{3}{2}\frac{M_{\text{Л}}}{M_{\text{З}}}\left(\frac{r}{R_{\text{ЗЛ}}}\right)^2 g\cos 2\vartheta, \tag{69.3}$$

$$f_{\text{г}} = \frac{3}{2}\frac{M_{\text{Л}}}{M_{\text{З}}}\left(\frac{r}{R_{\text{ЗЛ}}}\right)^2 g\sin 2\vartheta. \tag{69.4}$$

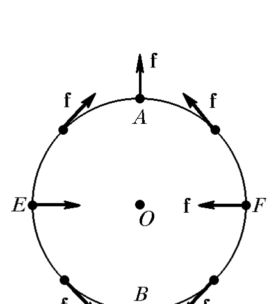


Рис. 193

Распределение приливообразующих сил вдоль экватора показано стрелками на схематическом рис. 193. Полная приливообразующая сила будет

$$f = \sqrt{f_{\text{в}}^2 + f_{\text{г}}^2} = \frac{3}{2}\frac{M_{\text{Л}}}{M_{\text{З}}}\left(\frac{r}{R_{\text{ЗЛ}}}\right)^3 g. \tag{69.5}$$

Положив здесь $M_{\text{Л}}/M_{\text{З}} = 1/81$, $r/R_{\text{ЗЛ}} = 1/60$, получим $f/g = 8{,}57\cdot 10^{-8}$. Следует заметить, что Луна обращается вокруг Земли по эллиптической орбите. В перигее она бывает на расстоянии 57 земных радиусов, в апогее — на расстоянии 63,7. Это сказывается на величине приливообразующей силы Луны. Для Луны отношение f/g меняется в пределах от $7{,}2\cdot 10^{-8}$ (в апогее) до 10^{-7} (в перигее). Конечно, приведенные формулы полностью справедливы и для приливообразующих сил, вызываемых Солнцем. В этом случае $f/g = 3{,}8\cdot 10^{-8}$, т. е. в 21/4 раза меньше, чем для Луны при ее среднем удалении от Земли. Величина приливообразующей силы Солнца меняется в течение года примерно на 10%.

5. Приведенные результаты показывают, насколько ничтожны приливообразующие силы по сравнению с обычной силой тяжести на Земле. То обстоятельство, что эти силы вызывают такое грандиозное явление природы, как приливы и отливы, связано с тем, что они не постоянны, а *периодически меняются во времени.* Если бы приливообразующие силы менялись от точки к точке на земной поверхности, но оставались постоянными во времени, то они лишь слегка изменили бы равновесную форму свободной поверхности воды в океане. Но эта форма не менялась бы с течением времени, т. е. не было бы никаких приливов и отливов. Такая ситуация осуществлялась бы, если бы Луна вращалась по круговой орбите с угловой скоростью, равной угловой скорости осевого вращения Земли. В действительности, как показывают формулы (69.3)—(69.5), в каждой точке земного шара остается неизменной лишь модуль приливообразующей силы, но не ее направление. Обе составляющие приливообразующей силы $f_{\text{в}}$ и $f_{\text{г}}$ в каждой точке земного шара периодически меняются во времени из-за суточных изменений зенитного расстояния Луны ϑ. Отвле-

каясь от второстепенных обстоятельств, можно положить $\vartheta = \omega t$, где ω — угловая скорость осевого вращения Земли (относительно прямой Земля—Луна). Поэтому $f_{\text{в}} \sim \cos 2\omega t$, $f_{\text{г}} \sim \sin 2\omega t$. Когда сила $f_{\text{в}}$ проходит через максимум, сила $f_{\text{г}}$ обращается в нуль, и наоборот. Это вызывает *периодические изменения направления отвеса* в каждой точке земного шара, что и является непосредственной причиной приливов и отливов.

6. Теперь мы должны обратиться ко второй части задачи о приливах, а именно определить воздействие заданных приливообразующих сил на воду в океане. Первая — *статическая* — теория приливов была разработана Ньютоном. Эта теория определяла мгновенную форму свободной поверхности океана, как если бы приливообразующие силы были постоянными, т. е. не менялись во времени. Согласно законам гидростатики свободная поверхность жидкости в состоянии равновесия в каждой точке перпендикулярна к (постоянным) действующим силам. Отсюда следует, что вдоль свободной поверхности жидкости потенциал всех действующих сил φ не должен меняться. Очевидно, $\varphi = \varphi_0 + \varphi_{\text{пр}}$, где φ_0 — потенциал всех сил, определяющих ускорение свободного падения g в отсутствие приливообразующих сил. Таким образом, по статической теории приливов уравнение свободной поверхности воды в океане должно иметь вид $\varphi_0 + \varphi_{\text{пр}} = \text{const}$, или более подробно

$$\varphi_0 - \frac{3}{4}\frac{GM_{\text{л}}}{R_{\text{зл}}^3} r^2 \cos 2\vartheta = \text{const}. \tag{69.6}$$

Применим это уравнение к точкам A и E на поверхности океана (см. рис. 193). Полагая сначала $\vartheta = 0$, а затем $\vartheta = \pi/2$, получим

$$\varphi_0(A) - \frac{3}{4}\frac{GM_{\text{л}}}{R_{\text{зл}}^3} r_A^2 = \varphi_0(E) + \frac{3}{4}\frac{GM_{\text{л}}}{R_{\text{зл}}^3} r_E^2.$$

Но $\varphi_0(A) - \varphi_0(E) = gH$, где $H = r_A - r_E$ — амплитуда прилива. У оставшихся двух членов знаки A и E можно опустить, полагая $r_A = r_E = r$. Замечая еще, что $g = G\frac{M_{\text{з}}}{r^2}$, и используя формулу (69.5), получим

$$H = \frac{f}{g} r. \tag{69.7}$$

По этой формуле находим для амплитуды лунных приливов $H = 0{,}55$ м, а для амплитуды солнечных приливов $H = 0{,}24$ м. Таким образом, по статической теории картина приливов и отливов должна соответствовать рис. 192 *а*, а не рис. 192 *б*. В этом основной недостаток статической теории приливов.

7. Правильная полная теория приливов должна быть *динамической*. Надо определить *вынужденное движение* воды в океане под действием заданных *переменных* приливообразующих сил. Важный принципиальный момент, который должна учесть теория, состоит в том, что вода в океане представляет собой механическую систему, которой, подобно маятнику, свойственны определенные *собственные частоты свободных колебаний*. Чтобы простейшим образом пояснить суть дела, вообразим вместе с Эйри, что на Земле вдоль ее экватора прорыт канал постоянной глубины, заполненный водой и опоясывающий весь земной шар. Если в каком-либо месте канала возникло возмущение,

то оно будет распространяться вдоль него с определенной скоростью. Пренебрежем силами трения, действующими в жидкости. В этом случае, как доказывается в гидродинамике, скорость распространения длиноволновых возмущений (т. е. таких возмущений, длины волн которых очень велики по сравнению с глубиной канала h) определяется формулой $u = \sqrt{gh}$. Возьмем в качестве h среднюю глубину воды в океане ($h = 3{,}5$ км). Тогда нетрудно подсчитать, что возмущение обежит вокруг Земли за 60 ч. При рассмотрении явления приливов играет роль время, вдвое меньшее. Дело в том, что в этом случае возмущение состоит из двух одинаковых горбов A и B, расположенных в диаметрально противоположных точках земного шара (рис. 192 *а, б*). По истечении 30 ч горб A перейдет в положение B, а горб B — в положение A, и первоначальная форма поверхности воды в канале восстановится. Значит, воде в канале свойствен *собственный период колебаний* $T_0 = 30$ ч. Он больше периода колебаний приливообразующей силы $T = 12$ ч 25 мин. Из элементарной теории колебаний известно, что в этом случае (при отсутствии сил трения) *внешняя сила и возбужденные ею вынужденные колебания находятся в противоположных фазах*. Наоборот, при $T_0 < T$ колебания совершаются в *одинаковых фазах*. Так, если привести в колебания точку подвеса A математического маятника, то шарик маятника C также придет в колебание (рис. 192 *в, г*). При малых частотах колебаний точки подвеса она и шарик в каждый момент времени будут двигаться в одинаковых, при больших — в противоположных направлениях. Поскольку в разбираемом нами вопросе $T_0 > T$, картина приливов должна соответствовать рис. 192 *б*, а не рис. 192 *а*. Статическая теория приливов качественно верно описывала бы явление приливов, если бы было $T_0 < T$. Но для этого нужно, как нетрудно подсчитать, чтобы глубина h превышала 20 км.

8. Солнечные приливы накладываются на приливы лунные. Если при этом наложении они усиливают друг друга, то приливы получаются особенно сильными. Это происходит тогда, когда Солнце и Луна находятся на одной прямой с Землей, т. е. в полнолуние и новолуние. Наступающие тогда приливы называются *большими* (*сизигийными*) *приливами*. Наоборот, когда Луна находится в первой или последней четверти, лунный прилив ослабляется солнечным. Тогда говорят о *малом*, или *квадратурном, приливе*.

Полная теория приливов, отвечающая всем требованиям практики, еще не создана. Это и понятно. На характере приливов существенно сказывается сложный рельеф дна океанов и морей, наличие материков и островов, очертания берегов, трение, морские течения и ветры, деформации самой Земли под действием приливообразующих сил и множество других трудно учитываемых факторов.

На открытых островах в океане амплитуда прилива в полнолуние и новолуние обычно бывает порядка 1 м. Это находится в согласии с тем, что дает статическая теория приливов. У берегов океана амплитуда приливов обычно около 2 м. Мест с амплитудой в 3 м уже немного, а с амплитудой более 6 м очень мало. Все они находятся либо в узких приливах, либо в глубине длинных заливов. Наиболее значительные приливы наблюдаются в заливе Фунди, на восточном берегу Канады. Этот залив расположен между материком и полуостровом Новая Шотландия. Амплитуда от 4 м при входе нарастает до 12—16 м в глубине залива. Во время сизигийных приливов здесь наблюдались амплитуды свыше 20 м.

ЗАДАЧА

Вывести формулы (69.1), (69.3), (69.4).

Решение. Как выяснено в тексте, $\varphi_{\text{пр}} = \varphi_{\text{Л}} + \varphi_{\text{ин}}$. Направим ось Z в сторону Луны (см. рис. 191). Пусть w — ускорение, с которым центр Земли O приближается к центру масс Земля—Луна. Соответствующая сила инерции будет $-mw = -w$. Считая ее однородной, имеем $\varphi_{\text{ин}} = wz = wr\cos\vartheta$. Потенциал силы тяготения Луны равен

$$\varphi_{\text{Л}} = -G\frac{M_{\text{Л}}}{\rho}.$$

С помощью рис. 191 находим $\rho^2 = R^2_{\text{ЗЛ}} = 2R_{\text{ЗЛ}}r\cos\vartheta + r^2$. Применяя формулу бинома Ньютона и пренебрегая кубами и высшими степенями r, получим

$$\varphi_{\text{Л}} = -\frac{GM_{\text{Л}}}{R_{\text{ЗЛ}}}\left(1 - \frac{2R_{\text{ЗЛ}}r\cos\vartheta - r^2}{R^2_{\text{ЗЛ}}}\right)^{-1/2} =$$
$$= -\frac{GM_{\text{Л}}}{R_{\text{ЗЛ}}}\left[1 + \frac{2R_{\text{ЗЛ}}r\cos\vartheta - r^2}{2R^2_{\text{ЗЛ}}} + \frac{3}{8}\left(\frac{2r\cos\vartheta}{R_{\text{ЗЛ}}}\right)^2\right].$$

Постоянный член $-GM_{\text{Л}}/R_{\text{ЗЛ}}$, как и всякую постоянную в выражении потенциала, можно отбросить. Линейный по r член компенсируется потенциалом $\varphi_{\text{ин}}$, так как $w = GM_{\text{Л}}/R^2_{\text{ЗЛ}}$. Далее, из потенциала $\varphi_{Л}$ можно исключить все члены, зависящие только от r, но не зависящие от угла ϑ. Они вносят одну и ту же радиальную добавку в действующую силу во всех точках земной поверхности. Эту добавку можно включить в g. К образованию приливов она не имеет отношения. С учетом этих замечаний нетрудно получить

$$\varphi_{\text{пр}} = -\frac{3}{4}\frac{r^2}{R_{\text{ЗЛ}}}w\cos 2\vartheta = -\frac{3}{4}\frac{GM_{\text{Л}}}{R^3_{\text{ЛЗ}}}r^2\cos 2\vartheta.$$

§ 70. ГРАВИТАЦИОННАЯ МАССА И ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГАЛИЛЕЯ

1. Понятие массы было введено нами с помощью закона сохранения импульса. В основе этого понятия лежат *инерционные свойства тел.* Поэтому так определенную массу называют *инертной массой* и иногда обозначают через $m^{(i)}$. Однако *тела обладают не только свойствами инерции, но и способностью возбуждать в окружающем пространстве гравитационные поля.* В этом отношении они аналогичны электрически заряженным телам, создающим вокруг себя электрическое поле. Инерция тел и их способность возбуждать в окружающем пространстве гравитационные поля не должны априори рассматриваться как взаимосвязанные и тем более тождественные свойства тел. Можно думать, что тела являются источниками гравитационных полей не потому, что они обладают инертными массами, а потому, что они несут особые заряды, аналогичные

электрическим зарядам. Такие заряды называются *гравитационными зарядами* или *гравитационными массами. Силы взаимодействия гравитационных масс*, как показывает опыт, *изменяются обратно пропорционально квадрату расстояния между ними.* Для количественного определения гравитационных масс можно поступить так же, как поступают с электрическими зарядами в электростатике. Именно, обозначим гравитационные массы взаимодействующих точечных тел через $m_1^{(g)}$ и $m_2^{(g)}$. Тогда для силы их гравитационного притяжения можно написать

$$F = C\,\frac{m_1^{(g)} m_2^{(g)}}{r^2}, \tag{70.1}$$

где C — числовой коэффициент, зависящий только от выбора единиц. Этому коэффициенту можно приписать произвольную размерность и произвольное числовое значение. Тогда, считая единицы для r и F установленными, мы установим также единицу гравитационной массы и ее размерность, а формула (70.1) даст принципиальный способ измерения гравитационных масс.

Пропорциональность силы гравитационного взаимодействия тел их гравитационным массам не является физическим законом. Мы так вводим понятие гравитационной массы, что указанная пропорциональность соблюдается *по определению. Физический закон*, *установленный Ньютоном*, *состоит в том*, *что сила гравитационного взаимодействия тел пропорциональна их инертным массам.* Отсюда следует, что *инертная масса тела пропорциональна его гравитационной массе.* Единицы этих масс можно выбрать так, чтобы они были не только пропорциональны, но и численно равны между собой. Поэтому этот фундаментальный физический закон называется *законом равенства или эквивалентности инертной и гравитационной масс.* Посмотрим, каковы его опытные основания и физические следствия.

2. Рассмотрим сначала свободное падение тел в поле тяжести Земли. По второму закону Ньютона $m^{(i)}\mathbf{a} = \mathbf{F}$, где $\mathbf{F}$ — сила тяжести. По смыслу под $m^{(i)}$ следует понимать инертную массу тела. Сила же тяжести может быть представлена в виде $\mathbf{F} = m^{(g)}\mathbf{g}$, где $m^{(g)}$ — гравитационная масса того же тела. Заметим, что сейчас мы рассматриваем движение относительно инерциальной системы отсчета и поэтому не вводим никаких сил инерции. Все силы являются «реальными» в ньютоновском смысле. В частности, сила тяжести $\mathbf{F}$ в нашем теперешнем рассмотрении есть сила только гравитационного притяжения между телом и Землей (центробежная сила в нее не входит). Второй закон Ньютона дает $m^{(i)}\mathbf{a} = m^{(g)}\mathbf{g}$, откуда

$$\mathbf{a} = \frac{m^{(g)}}{m^{(i)}}\,\mathbf{g}. \tag{70.2}$$

Так как инертная и гравитационная массы равны, то $\mathbf{a} = \mathbf{g}$. Все тела в поле тяжести падают с одним и тем же ускорением. Это экспериментальный факт, установленный впервые Галилеем, является подтверждением закона о равенстве инертной и гравитационной масс. Он справедлив и для любого гравитационного поля. *В одном и том же гравитационном поле все тела при свободном падении приобретают одинаковое ускорение.* Этим положением под названием обобщенного закона Галилея мы широко пользовались, начиная с § 65. Мы видим, что обобщенный закон *Галилея по своему содержанию совершенно эквивалентен принципу равенства инертной и гравитационной масс.*

Опыты Галилея имели малую точность. Значительно большей точности достигли Ньютон, а затем Бессель (1784—1846) в опытах с колебаниями маятника. Для периода малых колебаний математического маятника мы вывели формулу

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{70.3}$$

Если бы инертная и гравитационная массы не были равны между собой, то в этой формуле величину g следовало бы заменить на ускорение a, определяемое выражением (70.2). Тогда мы получили бы

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\frac{m^{(i)}}{m^{(g)}}}. \tag{70.4}$$

Только при $m^{(i)} = m^{(g)}$ формула (70.4) переходит в формулу (70.3). В опытах Ньютона и Бесселя было установлено, что период колебаний математического маятника не зависит от материала, из которого он изготовлен. Это подтверждает закон равенства инертной и гравитационной масс. Относительная точность, с какой это равенство было установлено в опытах Бесселя, составляет 1/60 000.

3. Однако рекордными по точности долгое время оставались исследования венгерского физика Роланда Этвеша (1848—1919), начатые в 1887 г. и продолжавшиеся до конца его жизни. Этвеш установил равенство инертной и гравитационной масс с относительной точностью $5 \cdot 10^{-9}$. По сравнению с опытами Ньютона точность была повышена примерно в сто тысяч, а по сравнению с опытами Фридриха Бесселя (1784—1846) — более чем в десять тысяч раз. Идея опытов Этнеша заключается в следующем. Вес тела складывается из двух различных сил: силы гравитационного притяжения Земли и центробежной силы инерции. Первая сила пропорциональна гравитационной массе, вторая равна $m^{(i)}\omega^2\mathbf{r}_\perp$, т. е. пропорциональна инертной массе $m^{(i)}$. Если бы инертная и гравитационная массы не были строго пропорциональны друг другу, то направление отвеса зависело бы от материала тела. Опыты Этвеша имели целью обнаружение этого эффекта. С указанной выше точностью они привели к отрицательному результату, что является доказательством справедливости закона равенства инертной и гравитационной масс. Чтобы достигнуть такой точности, надо было

оценивать изменения направления отвеса в $1{,}5 \cdot 10^{-6}$ дуговой секунды. Под таким углом был бы виден земному наблюдателю предмет в 3 мм, лежащий на поверхности Луны. Такой точности Этвешу и его сотрудникам удалось достигнуть при помощи *крутильных весов* и *гравитационных вариометров*. Хотя основные опыты были выполнены с гравитационными вариометрами, но мы опишем (конечно, схематически) опыты с крутильными весами, так как в идейном отношении они более просты.

На длинной тонкой нити подвешивался стержень, к концам которого можно было прикреплять грузы *1* и *2* (рис. 194 *б*), изготовленные из различных материалов, например из платины и меди. Стержень устанавливался перпендикулярно к меридиану рассматриваемого места. Пусть **g** означает напряженность земного гравитаци-

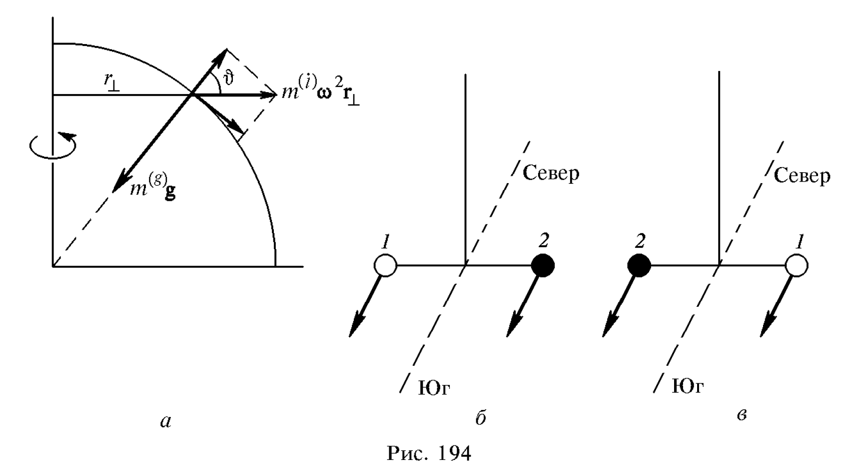


Рис. 194

онного поля, т. е. силу, с которой это поле действует на единицу гравитационной массы. На груз будут действовать две силы: гравитационная $m^{(g)}\mathbf{g}$ и центробежная $m^{(i)}\omega^2\mathbf{r}_\perp$. Последняя имеет вертикальную составляющую $m^{(i)}\omega^2\mathbf{r}_\perp \cos\vartheta$ (рис. 194 *а*), где ϑ — географическая широта рассматриваемого места. Поэтому если стержень (рычаг) равноплечий, то одно из условий равновесия грузов будет

$$m_1^{(g)}g - m_1^{(i)}\omega^2 r_\perp \cos\vartheta = m_2^{(g)}g - m_2^{(i)}\omega^2 r_\perp \cos\vartheta,$$

или

$$m_1^{(i)}(\alpha_1 g - \omega^2 r_\perp \cos\vartheta) = m_2^{(i)}(\alpha_2 g - \omega^2 r_\perp \cos\vartheta),$$

где α_1 и α_2 — отношение гравитационных масс к инертным для грузов *1* и *2* соответственно. Если бы $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то из полученного соотношения следовало бы, что $m_1^{(i)} \neq m_2^{(i)}$. В этом случае центробежные силы, действующие на грузы, а с ними и их горизонтальные состав-

ляющие, направленные к югу (рис. 194 *б* и *в*), не были бы одинаковыми; появился бы вращающий момент

$$M_1 = (m_1^{(i)} - m_2^{(i)}) \frac{l}{2} \omega^2 r_\perp \sin \vartheta$$

(l — длина стержня), стремящийся закрутить нить. В состоянии равновесия угол кручения $\varphi_1 = (1/f)M_1$, где f — модуль кручения. Если весь прибор повернуть на 180°, т. е. перейти из положения *б* в положение *в* (рис. 194), то вращающий момент и угол кручения изменят знаки ($M_2 = -M_1$, $\varphi_2 = -\varphi_1$). При этом нить закрутится на угол $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -(2/f)M_1$. Опыт Этвеша привел к отрицательному результату, т. е. он показал, что $\varphi = 0$, каковы бы ни были материалы, из которых изготовлены грузы. Следовательно, $\alpha_1 = \alpha_2$, что и доказывает равенство инертной и гравитационной масс.

4. *Одним из фундаментальных следствий теории относительности является связь между энергией и массой* $E = mc^2$. Здесь m означает инертную массу. Таким образом, *всякая энергия обладает инертной массой*. Закон эквивалентности инертной и гравитационной масс позволяет распространить это утверждение и на гравитационную массу. *Всякая энергия должна обладать также и гравитационной массой*. Высокая чувствительность опыта Этвеша позволила подвергнуть это заключение экспериментальной проверке. С этой целью Саузернс повторил опыт Этвеша с радиоактивными веществами. Опыт дал тот же результат: никакого различия между гравитационной и инертной массами обнаружено не было. Так как при радиоактивных превращениях энергия и инертная масса уменьшаются, то отсюда следует, что пропорционально уменьшается также и гравитационная масса. Таким образом, равенство инертной и гравитационной масс все время соблюдается.

5. Опыт Этвеша в усовершенствованном виде был повторен американским физиком Робертом Дикке (р. 1916) и его сотрудниками в 1961—1964 гг. Им удалось повысить точность результатов Этвеша более чем в 100 раз. Сравнивались грузы из меди и свинца, из золота и алюминия. С относительной точностью $3 \cdot 10^{-11}$ авторы констатировали равенство коэффициентов пропорциональности между гравитационной и инертной массами для этих материалов.

В идейном отношении опыт Дикке проще опыта Этвеша. В опыте Этвеша речь шла об эффектах, определяющихся совокупным действием гравитационного притяжения Земли и сил инерции, возникающих из-за ее осевого вращения. В опытах Дикке вместо Земли использовалось Солнце. Сравниваемые грузы *1* и *2* по-прежнему закреплялись на концах прямолинейного коромысла, подвешенного на тонкой нити (рис. 195 *а*). Для максимального уменьшения влияния посторонних возмущающих факторов это устройство помещалось в сосуд с высоким вакуумом. Прибор устанавливался в глубокой термостатированной шахте, удаленной от зданий. После установки

прибора шахта запечатывалась, а прибор контролировался дистанционно из удаленной приборной будки на протяжении нескольких месяцев подряд.

Сила гравитационного притяжения Земли и центробежная сила, возникающая из-за вращения Земли вокруг своего центра, в опытах Дикке принципиальной роли не играют. От этих сил можно отвлечься. Они в рассматриваемой точке земного шара постоянны и определяют лишь положение равновесия, в котором стремится установиться коромысло. Для опыта имеют значение сила гравитационного притяжения Солнца и поступательная сила инерции, связанная с ускоренным движением центра Земли по направлению к Солнцу (влиянием Луны можно пренебречь). Обозначим это ускорение через **a**. По самому определению гравитационной массы сила гравитационного притяжения Солнца, отнесенная к единице такой массы, для всех тел одна и та же. Это есть напряженность гравитационного поля Солнца, зависящая только от самого Солнца. Обозначим ее через **g**. Но если бы нарушался закон эквивалентности инертной и гравитационной масс, то сила гравитационного притяжения Солнца, отнесенная к единице инертной массы, была бы разной для различных тел. В этом случае возник бы вра-

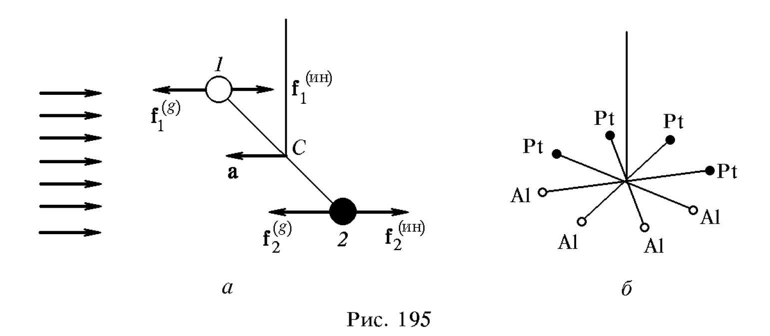


Рис. 195

щающийся момент, стремящийся закрутить нить, на которой подвешено коромысло. Если h_1 и h_2 — плечи коромысла, а последнее подвешено за центр масс C (рис. 195 *а*), то вращающий момент относительно точки C будет

$$M = (m_1^{(g)}g - m_1^{(i)}a)h_1 + (m_2^{(i)}a - m_2^{(g)}g)h_2.$$

По определению центра масс (точнее, следовало бы сказать центра инертных масс) $m_1^{(i)}h_1 = m_2^{(i)}h_2$. Поэтому, используя ранее введенные обозначения α_1 и α_2, получим

$$M = m_1^{(i)}h_1 g\alpha_1 - m_2^{(i)}h_2 g\alpha_2 = m_1^{(i)}h_1 g(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Плечи коромысла периодически меняются из-за видимого движения Солнца по небесному своду. Поэтому момент M также будет пери-

одически изменяться и притом с периодом в одни сутки. В результате возникли бы вынужденные колебания коромысла с таким же периодом, которые можно было бы обнаружить с помощью чувствительной аппаратуры. На фоне неизбежных случайных толчков, которым подвержена система, такие колебания обнаружены не были. Отсюда следует, что в пределах ошибок измерений $\alpha_1 = \alpha_2$, т. е. соблюдается закон эквивалентности.

6. Опыт Дикке был повторен в усовершенствованном виде В. Б. Брагинским и В. И. Пановым в 1971 г. Вместо одного коромысла применялся крутильный маятник, эквивалентный четырем коромыслам, соединенным вместе, как указано на рис. 195 *б*. Точность опыта была повышена еще примерно в 30 раз. Сравнивались платина и алюминий. Равенство коэффициентов пропорциональности между гравитационной и инертной массами для этих веществ было подтверждено с относительной точностью 10^{-12}. Это то же самое, как если бы мы взвесили корабль водоизмещением в десять тысяч тонн вместе с грузом с точностью до одной сотой грамма.

7. Дорелятивистская физика не придавала существенного значения равенству инертной и гравитационной масс, рассматривая это равенство как случайное совпадение. Основополагающее значение закона эквивалентности инертной и гравитационной масс было принято Эйнштейном. Закон эквивалентности послужил для Эйнштейна отправным пунктом при построении *общей теории относительности*, называемой иначе *релятивистской теорией гравитации*. Этот закон является главным опытным фактом, на котором основана общая теория относительности. Последняя была бы неверна и от нее следовало бы отказаться, если бы было обнаружено малейшее нарушение закона эквивалентности инертной и гравитационной масс. Вот почему повышение и без того исключительной точности, с которой проверяется этот закон, имеет важное принципиальное значение, а не является просто спортивным увлечением с целью побития рекорда и установления нового.

§ 71. ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ГРАВИТАЦИОННЫХ СИЛ И СИЛ ИНЕРЦИИ

1. Мы уже неоднократно отмечали, что все тела, независимо от их масс и химического состава, получают в данном гравитационном поле одинаковые ускорения. Поэтому в таком поле они движутся совершенно одинаково, если только одинаковы начальные условия. Тем же свойством обладают свободно движущиеся тела, если их движение рассматривать относительно какой-либо неинерциальной системы отсчета. Иначе говоря, указанным свойством обладают также силы инерции. Эта аналогия между силами тяготениями и силами инерции явилась отправной точкой при построе-

нии общей теории относительности, или релятивистской теории гравитации, Эйнштейна.

Рассмотрим по примеру Эйнштейна, что происходит в движущемся лифте. Допустим сначала, что лифт неподвижно висит на тросе или движется равномерно относительно Земли. Все тела в лифте подвергаются действию земного поля тяготения. Пассажир в лифте ощущает вес собственного тела, оказывает давление на пол лифта, подвергается со стороны поля равному и противоположно направленному противодавлению. Груз, подвешенный на пружине, растягивает ее силою своего веса. Все тела, предоставленные самим себе, свободно падают относительно лифта с одним и тем же ускорением $\mathbf{g}$ и т. д.

Вообразим теперь, что лифт настолько удален от Земли и прочих небесных тел, что он практически не подвергается с их стороны никаким гравитационным воздействиям. Пусть кто-то тянет за трос лифта, сообщая последнему постоянное ускорение $\mathbf{a} = -\mathbf{g}$. Гравитационного поля в лифте нет, зато есть сила инерции $-m\mathbf{a} = m\mathbf{g}$. Под действием таких сил все тела в лифте, если их ничем не удерживать, начнут «падать» с прежним ускорением $\mathbf{g}$. Груз, подвешенный на пружине, растянет ее, как если бы она обладала весом $m\mathbf{g}$. Пассажир в лифте будет оказывать на пол такое же давление, как и в предыдущем случае. Короче говоря, *все механические явления и движения в лифте будут в точности такими же, что и в неподвижном лифте, висящем в поле тяжести*. Эйнштейн распространил это утверждение не только на механические, но и на любые *физические явления*, как это он сделал также с галилеевским принципом относительности. Для такой гипотезы имеются веские основания. *В природе нет чисто механических явлений*. В основе каждого «механического» явления лежит громадное множество разнообразных *других явлений*, относящихся к различным разделам физики. Так, столкновение бильярдных шаров обычно рассматривают как типично механическое явление. Но существование самих шаров и их внутренняя структура определяются *квантовыми законами*, а упругие силы, развивающиеся во время столкновения, сводятся к силам *электростатического взаимодействия* заряженных частиц, из которых построены тела.

Итак, *все физические явления в равномерно ускоренном лифте будут происходить в точности так же, как и в неподвижном лифте, висящем в однородном поле тяжести*. Между тем дорелятивистская физика рассматривала оба случая как существенно разные. В первом случае явления объяснялись действием гравитационного поля, во втором — действием сил инерции. В первом случае лифт является инерциальной системой отсчета, в которой есть однородное поле тяготения. Во втором случае поля тяготения нет, зато есть силы инерции, так как лифт является инерциальной системой отсчета.

Если лифт в однородном поле тяжести движется вверх или вниз с ускорением $\mathbf{a}$, то на тело в лифте действует сила тяжести $m\mathbf{g}$ и

сила инерции $-m\mathbf{a}$. Результирующая сила $m(\mathbf{g}-\mathbf{a})$ состоит из двух слагаемых, совершенно различных по своей физической природе. Между тем все явления внутри лифта будут происходить так, как если бы в нем действовало однородное гравитационное поле с напряженностью $\mathbf{g}'=\mathbf{g}-\mathbf{a}$. В частности, когда лифт падает свободно, $\mathbf{g}'=0$, т. е. наступает «состояние невесомости». Допустим, что пассажир в лифте имеет возможность производить опыты только над телами внутри лифта и лишен возможности наблюдать внешний мир. Замечая, что все тела падают в лифте с одним и тем же ускорением, он не может на основании одного только этого факта решить, чем вызвано это ускорение: однородным гравитационным полем, ускоренным поступательным движением самого лифта, или, наконец, и тем и другим. Никакие опыты по свободному падению тел в лифте не могут отделить однородное гравитационное поле от однородного поля сил инерции. По предположению Эйнштейна, это невозможно сделать и с помощью любых физических опытов. Это предположение Эйнштейн возвел в постулат и выдвинул *принцип эквивалентности гравитационных сил и сил инерции.*

Согласно этому принципу *все физические явления в гравитационном поле происходят совершенно так же, как и в соответствующем поле сил инерции, если напряженности обоих полей в соответствующих точках пространства совпадают, а начальные условия одинаковы для всех тел замкнутой системы.*

2. *Принцип эквивалентности вовсе не утверждает, что всякое гравитационное поле может быть имитировано силами инерции, т. е. создано надлежащим ускоренным движением системы отсчета. Он не утверждает также, что любые силы инерции во всем пространстве можно заменить гравитационными. Оба эти утверждения верны, вообще говоря, только для однородных полей, т. е. таких полей, напряженность которых одна и та же во всех точках пространства.* Для пояснения этого вернемся к прежнему примеру с лифтом. Пусть лифт неподвижно висит в поле тяжести Земли. Располагая точным гравитометром, пассажир в лифте заметит, что направления отвеса в различных точках кабины лифта не совсем параллельны, их продолжения пересекаются приблизительно в центре Земли. Далее, он найдет, что земное гравитационное поле возрастает в направлении к центру Земли. Короче, пассажир в неподвижном лифте может установить, что земное гравитационное поле *неоднородно*. Напротив, поле сил инерции, возникающее в лифте при его ускоренном поступательном движении, *однородно*. Оно не может во всех точках пространства внутри кабины лифта подменить неоднородное ньютоново поле земной тяжести. Можно создать внутри кабины лифта и неоднородное поле сил инерции, приведя лифт во вращение. Однако такое поле возрастало бы при удалении от оси вращения, т. е. вело бы себя совсем иначе, чем гравитационное поле Земли. Ньютоново гравитационное поле точечной массы убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от

нее. Поле центробежных сил $\omega^2\mathbf{r}_\perp$, напротив, возрастает пропорционально расстоянию до оси вращения. Ясно, что *ньютоново гравитационное поле точечной массы не может быть получено никаким вращением системы отсчета.*

Однако в небольших объемах пространства, в которых гравитационное поле может считаться практически однородным, оно может быть приближенно имитировано ускоренным движением системы отсчета. Если хотят отметить это обстоятельство, то говорят, что принцип эквивалентности имеет *локальный характер.*

3. Кроме того, между ньютоновыми силами гравитационного притяжения и силами инерции имеется существенное различие, когда последние возникают во вращающихся системах отсчета. *Ньютоновы гравитационные силы не зависят от скоростей тел, на которые они действуют. Тем же свойством обладают поступательные и центробежные силы инерции, а также вообще все переносные силы инерции.* По своим физическим действиям переносные силы инерции совершенно эквивалентны ньютоновым гравитационным силам. Невозможно однозначно отделить ньютоно гравитационное поле от поля переносных сил инерции. Напротив, *силы Кориолиса ведут себя существенно иначе, чем ньютоновы гравитационные силы. На покоящиеся* (в рассматриваемой системе отсчета) *тела они не действуют. Они возникают только при движении тела и пропорциональны его скорости.* Тем не менее эквивалентность инертной и гравитационной масс делает целесообразным объединить гравитационное поле и поле всех сил инерции в *единое поле.* Это и делается в общей теории относительности. Для поля, получающегося в результате такого объединения, сохранено прежнее название — *гравитационное поле.* Сила инерции является частным случаем сил гравитационного поля, понимаемого в таком расширенном смысле. Общая теория относительности, или релятивистская теория гравитации, устанавливает уравнения гравитационного поля. Они называются *уравнениями Эйнштейна.* Закон всемирного тяготения Ньютона содержится в уравнениях Эйнштейна и верен только приближенно. Приближенный характер закона всемирного тяготения, впрочем, следует уже из того, что в основе этого закона лежит представление о мгновенном распространении взаимодействий. А такое представление имеет ограниченную область применимости.

4. В свете изложенного вернемся еще раз к вопросу об инерциальных системах отсчета. Пусть тело A настолько удалено от Солнечной системы, что ее гравитационным полем можно пренебречь. Тогда еще нельзя утверждать, что оно не подвержено действию никаких гравитационных полей. Мы не можем утверждать, что во Вселенной нет удаленных тел, создающих в месте нахождения тела A гравитационное поле $\mathbf{g}$ конечной напряженности. Убывание гравитационного поля из-за расстояния до этих тел может быть компенсировано возрастанием их масс. Однако если изучаются явления в

ограниченной области пространства S, то при не слишком больших размерах ее поле $\mathbf{g}$ может считаться однородным. Тогда если тело A свободно падает в гравитационном поле $\mathbf{g}$, то это поле будет *полностью компенсировано поступательными силами инерции.* Если тело A и не вращается (относительно удаленных масс), то оно не будет подвержено действию и остальных сил инерции. Система отсчета, связанная с таким невращающимся свободно падающим телом A, и будет инерциальной системой отсчета. Во всякой системе отсчета A', вращающейся или движущейся ускоренно относительно системы A появятся силы инерции. Но это движение есть не движение в «абсолютном пространстве», а *движение относительно удаленных тел Вселенной.* С этой точки зрения, принадлежащей австрийскому физику Эрнесту Маху (1838—1916), силы инерции возникают из-за вращений и ускоренных движений координатных систем относительно удаленных тел Вселенной. Это утверждение известно под названием *принципа Маха.*

Одно время точка зрения Маха казалась очень привлекательной. Ее в принципе разделял в первоначальных работах Эйнштейн. Однако в дальнейшем он от нее отошел. В современных космологических теориях принцип Маха не используется. Ввиду конечной скорости распространения взаимодействий всякое движение или изменение удаленных тел Вселенной может повлиять на процессы вблизи Земли не раньше чем через время, затрачиваемое светом на прохождение расстояния от этих тел до Земли. Принцип Маха этого не учитывает. Он не принимает во внимание силовые поля, существующие в галактическом и межгалактическом пространствах, а также наличие открытого в 1965 г. реликтового радиоизлучения, т. е. равновесного излучения, возникшего на ранней стадии развития Вселенной, а затем остывшего до температуры около 2,7 К и увеличившего длины волн из-за космологического расширения Вселенной. Здесь преждевременно обсуждать эти сложные и далеко еще не решенные вопросы.

§ 72. ГРАВИТАЦИОННОЕ СМЕЩЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ

1. В качестве примера применения принципа эквивалентности гравитационных сил и сил инерции рассмотрим явление *гравитационного смещения спектральных линий,* теоретически предсказанное Эйнштейном. Будем исходить из представления, что свет есть волны, которые в вакууме распространяются со скоростью $c \approx 300\,000$ км/с. Свет определенной спектральной линии характеризуется определенной частотой, или числом колебаний в секунду, которую мы будем обозначать через ν. Такой свет называется *монохроматическим,* т. е. *одноцветным.* Пусть монохроматический свет приходит к нам от какого-либо удаленного источника, причем в пространстве, через которое он распространяется, гравитационного поля нет. Обозначим через через ν_0 частоту световой волны, которую воспри-

нимает наблюдатель, покоящийся в какой-либо инерциальной системе отсчета. Если наблюдатель начнет двигаться навстречу световым лучам с постоянным ускорением a (рис. 196 *а*), то частота воспринимаемого света увеличится (эффект Доплера).

Простой расчет показывает, что с точностью до членов порядка $(v/c)^2$ относительное изменение воспринимаемой частоты определяется формулой

$$\frac{\nu-\nu_0}{\nu_0}=\frac{v}{c},$$

где v — скорость наблюдателя. За положительные направления $\mathbf{v}$ и $\mathbf{a}$ мы принимаем направления против распространения света. Если наблюдатель двигался в течение времени t, то $\mathbf{v}=\mathbf{a}t$. За это время свет проходит расстояние $l=ct=cv/a$, а потому изменение частоты за то же время определится формулой

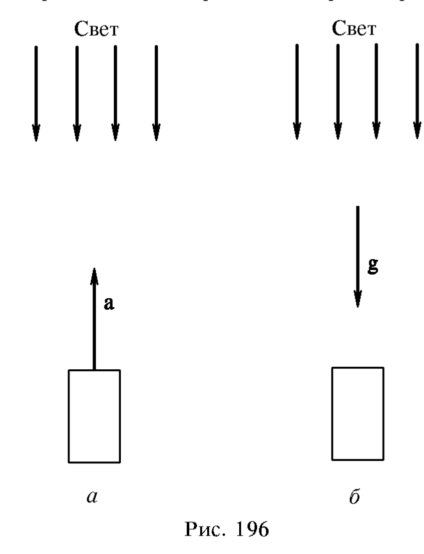


Рис. 196

$$\frac{\nu-\nu_0}{\nu_0}=\frac{al}{c^2}.$$

2. Допустим теперь, что наблюдатель в инерциальной системе отсчета неподвижен, но в ней имеется однородное гравитационное поле с напряженностью $\mathbf{g}$ (рис. 196 *б*). Если величину $\mathbf{g}$ подобрать равной $-\mathbf{a}$ ($\mathbf{g}=-\mathbf{a}$), то по принципу эквивалентности гравитационное поле вызовет в точности такое же изменение частоты света, что и в предыдущем случае. *При распространении света по направлению гравитационного поля* $\mathbf{g}$ *частота световой волны будет возрастать, а при распространении в противоположном направлении — убывать.* В этом и состоит явление гравитационного смещения спектральных линий, предсказанное Эйнштейном. Значение смещения определяется формулой

$$\frac{\nu-\nu_0}{\nu_0}=\frac{gl}{c^2}, \tag{72.1}$$

где l — расстояние, проходимое светом в поле тяготения.

При выводе формулы (72.1) предполагалось, что поле постоянно и однородно. Результат нетрудно обобщить на случай произвольного постоянного неоднородного гравитационного поля. С этой целью разобьем путь светового луча на бесконечно малые участки $d\mathbf{r}$. На протяжении каждого из таких участков гравитационное поле может считаться однородным. Если $d\nu$ — изменение частоты светового луча при прохождении участка $d\mathbf{r}$, то по формуле (72.1)

$$\frac{d\nu}{\nu}=\frac{\mathbf{g}\,d\mathbf{r}}{c^2},$$

так как составляющая вектора **g**, перпендикулярная к направлению распространения света, на изменение частоты не оказывает влияния. Если свет проходит конечный путь из начального положения 1 в конечное положение 2, то изменение частоты на этом пути найдется интегрированием полученного выражения, т. е. по формуле

$$\ln\frac{\nu_2}{\nu_1}=\frac{1}{c^2}\int \mathbf{g}\,d\mathbf{r}. \tag{72.2}$$

Интегрирование не обязательно проводить вдоль пути, по которому распространяется свет. Можно взять произвольный путь, соединяющий начальную точку 1 с конечной точкой 2. Гравитационные силы постоянных полей являются силами консервативными, так что интеграл от формы пути не зависит. Интеграл имеет смысл работы, которую совершили бы силы гравитационного поля над единичной массой при ее перемещении из положении 1 в положение 2. Эта работа называется *разностью гравитационных потенциалов* $\varphi_1-\varphi_2$ между точками 1 и 2. В этих обозначениях

$$\ln\frac{\nu_2}{\nu_1}=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{c^2}. \tag{72.3}$$

При малой разности потенциалов, когда

$$|\varphi_1-\varphi_2|\ll c^2,$$

формула переходит в

$$\frac{\nu_2-\nu_1}{\nu_1}=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{c^2}. \tag{72.4}$$

При распространении света от высшего гравитационного потенциала к низшему его частота увеличивается, при распространении в противоположном направлении — уменьшается.

В 1960 г. американским физикам Роберту Паунду (р. 1919) и Дж. Ребке удалось с уверенностью наблюдать с использованием так называемого *эффекта Мёссбауэра* (по имени немецкого физика—экспериментатора Рудольфа Мессбауэра (р. 1929 г.)) гравитационное смещение спектральных линий при распространении света даже в поле тяжести Земли. Проходимый путь (сверху вниз) составляет всего 20 м. В этом случае ожидаемое смещение $(\nu-\nu_0)/\nu_0\approx 2\cdot 10^{-14}$.

Измерения дали такой же результат. Это является подтверждением принципа эквивалентности гравитационных сил и сил инерции.

ГЛАВА X

МЕХАНИКА УПРУГИХ ТЕЛ

---

§ 73. ИДЕАЛЬНО УПРУГИЕ ТЕЛА

1. Все реальные тела *деформируемы*. Под действием приложенных сил они меняют свою форму или объем. Такие изменения называются *деформациями*. В случае твердых тел различают два предельных случая: *деформации упругие и деформации пластические. Упругими* называют деформации, исчезающие после прекращения действия приложенных сил. *Пластическими* или *остаточными деформациями* называют такие деформации, которые сохраняются в теле, по крайней мере частично, и после прекращения действия внешних приложенных сил. На пластических деформациях основана *холодная обработка металлов* — штамповка, ковка и пр. Является ли деформация упругой или пластической зависит не только от материала тела, но и от *приложенных сил*. Если сила (точнее, сила, отнесенная к единице площади, т. е. напряжение) не превосходит известной величины, называемой *пределом упругости*, то возникающая деформация будет упругой. Если же она превосходит этот предел, то возникающая деформация будет пластической. Предел упругости имеет различные значения для разных материалов. Она является не вполне четкой определенной величиной. Разделение тел на упругие и пластические также в какой-то степени условно. Строго говоря, все деформации после прекращения действия внешних сил исчезают не полностью, а поэтому являются пластическими. Однако если остаточные деформации малы, то во многих случаях их можно не принимать во внимание. Как велика должна быть остаточная деформация, чтобы можно было так поступать, зависит от конкретных условий. В некоторых случаях, например, можно пренебречь остаточными деформациями, если они не превосходят 0,1 % от максимальных значений, достигавшихся под действием приложенных сил. В других случаях этот предел должен быть снижен до 0,01 % и т. д.

2. В настоящей главе мы ограничимся изучением только упругих деформаций. При этом мы остановимся только на механике, но не на физике явлений. Механика описывает упругие свойства тел посредством некоторых эмпирически вводимых *упругих постоянных*, различных для различных тел и зависящих от их физического состояния (например, от температуры). Более глубоким является физический подход, рассматривающий явление деформаций с атомистической точки зрения. Этим занимается *теория твердого тела*. Она позволяет в принципе не только вывести основные уравнения механики деформируемых тел с атомистической точки зрения, но и

установить связь между упругими постоянными вещества и другими его физическими свойствами.

Тела мы будем считать *идеально упругими*. Так называются идеализированные тела, которые могут претерпевать только упругие, но не пластические деформации. Такими идеализациями можно пользоваться, когда силы, приложенные к реальным телам, не превосходят предела упругости. *Для идеально упругих тел существует однозначная зависимость между действующими силами и вызываемыми ими деформациями*. В случае пластических деформаций такой однозначной связи не существует. Это видно хотя бы из того, что до и после пластической деформации тело имеет различную форму, хотя в обоих случаях оно не подвергается действию внешних сил. Мы ограничимся изучением только *малых деформаций*. *Малыми* называются упругие деформации, подчиняющиеся закону Гука. Это приближенный закон, согласно которому *деформации пропорциональны силам, их вызывающим*.

3. Твердые тела разделяются на *изотропные* и *анизотропные*. *Изотропными* называются тела, свойства которых по всем направлениям одинаковы. *Анизотропными* называются тела, свойства которых в разных направлениях не одинаковы. Типичными представителями анизотропных тел являются *кристаллы*. Приведенные определения отличаются некоторой неопределенностью, поскольку в них явно не указано, о каких физических свойствах идет речь. Дело в том, что *тела могут вести себя как изотропные по отношению к одним свойствам и как анизотропные — по отношению к другим*. Так, все кристаллы *кубической системы* ведут себя как изотропные, если речь идет о распространении света в них. Однако они будут анизотропными, если интересоваться их упругими свойствами. В настоящей главе нас интересует изотропия или анизотропия тел по отношению к их упругим свойствам. Но мы ограничимся простейшим случаем, когда тела являются изотропными. Металлы обычно имеют *поликристаллическую структуру*, т. е. состоят из мельчайших беспорядочно ориентированных кристалликов. Каждый из таких кристалликов есть тело анизотропное. Но кусочек металла, содержащий множество их, ведет себя как изотропное тело, если всевозможные ориентации кристалликов представлены с одинаковой вероятностью. В результате пластической деформации хаотичность в ориентации кристалликов может нарушиться. Тогда после пластической деформации металл становится анизотропным. Такое явление наблюдается, например, при вытягивании или кручении проволоки.

§ 74. УПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ

1. Различные части деформированного тела взаимодействуют между собой на поверхностях раздела, вдоль которых они граничат

друг с другом. Рассмотрим произвольное деформированное тело или среду. Мысленно разделим его на две части: тело I и тело II, граничащие между собой вдоль поверхности AB (рис. 197). Так как тело I деформировано, то оно действует на тело II с некоторой силой. По той же причине тело II действует на тело I с такой же, но противоположно направленной силой. Однако для определения возникающих деформаций недостаточно знать суммарные силы, действующие в сечении AB. Надо еще указать, как эти силы распределены по этому сечению. Возьмем на поверхности AB бесконечно малую площадку dS. Пусть $d\mathbf{F}$ — сила, с которой на этой площадке тело II действует на тело I. *Сила, отнесенная к единице площади*, т. е. $\frac{d\mathbf{F}}{dS}$, *называется напряжением*, действующим в соответствующей точке на границе AB тела I. Напряжение, действующее в той же точке на границе тела II, будет таким же, но его направление противоположно.

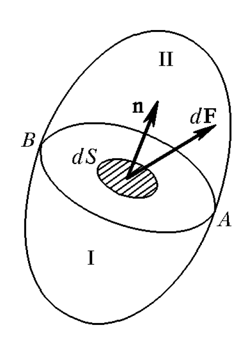


Рис. 197

2. Ориентацию площадки dS можно задать, указав направление нормали к ней. Условимся эту нормаль проводить *наружу* от поверхности тела, на которое действует сила $d\mathbf{F}$. Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор такой нормали, а через σ_n — соответствующее напряжение. Тогда $\boldsymbol{\sigma}_{-n}$ будет означать напряжение на поверхности AB тела II, с которым граничит тело I. В силу равенства действия и противодействия $\boldsymbol{\sigma}_n = -\boldsymbol{\sigma}_{-n}$. Вектор $\boldsymbol{\sigma}_n$ можно разложить на составляющую вдоль нормали $\mathbf{n}$ и составляющую, лежащую в касательной плоскости к площадке dS. Первая составляющая называется *нормальным*, а вторая — *тангенциальным* напряжениями, действующими на площадке dS. Как и всякий вектор, напряжение $\boldsymbol{\sigma}_n$ можно характеризовать тремя составляющими его вдоль координатных осей X, Y, Z прямоугольной системы координат. Эти составляющие будем обозначать соответственно через σ_{nx}, σ_{ny}, σ_{nz}. Первый индекс указывает направление внешней нормали к поверхности тела, на которой лежит площадка dS, а второй — направление оси, на которую проецируется напряжение $\boldsymbol{\sigma}_n$. В частности, $\boldsymbol{\sigma}_x$ означает напряжение на площадке, внешняя нормаль к которой параллельна положительному направлению оси X. Величины σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{xz} означают проекции вектора $\boldsymbol{\sigma}_x$ на координатные оси.

3. Для того чтобы определить напряжение в среде на произвольно ориентированной площадке в какой-либо точке ее, достаточно задать напряжение на трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через эту точку. Это справедливо как для покоящейся среды, так и для среды, движущейся с произвольным ускорением. Для доказательства поместим начало координат в рассматриваемую

точку среды и выделим из нее бесконечно малый элемент объема $OABC$, ограниченный координатными плоскостями и пересекающей их плоскостью ABC (рис. 198). Пусть $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к плоскости треугольника ABC. Тогда сила, действующая на грани ABC на выделенный элемент со стороны окружающей среды, будет $\boldsymbol{\sigma}_n S$, где S — площадь этой грани. Аналогично силы, действующие на трех боковых гранях, будут $\boldsymbol{\sigma}_{-x}S_x$, $\boldsymbol{\sigma}_{-y}S_y$, $\boldsymbol{\sigma}_{-z}S_z$, где S_x, S_y, S_z — площади этих граней. Помимо этих сил на выделенный элемент могут действовать *массовые* или *объемные* силы, например сила тяжести. Обозначим равнодействующую таких сил через $\mathbf{f}$. Сила $\mathbf{f}$ пропорциональна объему выделенного элемента. Если масса элемента m, а ускорение $\mathbf{a}$, то

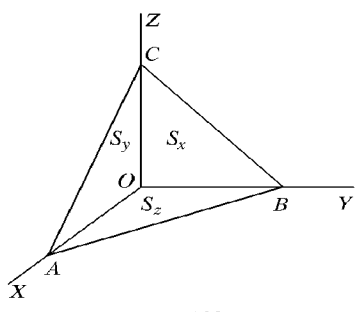


Рис. 198

$$m\mathbf{a} = \mathbf{f} + \boldsymbol{\sigma}_n S + \boldsymbol{\sigma}_{-x}S_x + \boldsymbol{\sigma}_{-y}S_y + \boldsymbol{\sigma}_{-z}S_z.$$

Выполним в этом соотношении предельный переход, стягивая элемент $OABC$ в точку. При таком предельном переходе члены $m\mathbf{a}$ и $\mathbf{f}$ можно отбросить. Они пропорциональны объему элемента $OABC$ и, следовательно, являются бесконечно малыми *высшего порядка* по сравнению с остальными членами, пропорциональными поверхности элемента. Как известно из геометрии, проекции площади S на координатные плоскости выражаются соотношениями

$$S_x = Sn_x, \quad S_y = Sn_y, \quad S_z = Sn_z.$$

Учтем далее, что $\boldsymbol{\sigma}_{-x} = -\boldsymbol{\sigma}_x$, $\boldsymbol{\sigma}_{-y} = -\boldsymbol{\sigma}_y$, $\boldsymbol{\sigma}_{-z} = -\boldsymbol{\sigma}_z$. Тогда в результате предельного перехода получится

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}_x n_x + \boldsymbol{\sigma}_y n_y + \boldsymbol{\sigma}_z n_z. \tag{74.1}$$

Так как координатные оси X, Y, Z можно выбрать произвольно, то это соотношение и доказывает теорему.

Таким образом, *напряжение в каждой точке упруго деформированного тела можно характеризовать тремя векторами* $\boldsymbol{\sigma}_x$, $\boldsymbol{\sigma}_y$, $\boldsymbol{\sigma}_z$ *или девятью их проекциями*

$$\begin{matrix} \sigma_{xx}, & \sigma_{xy}, & \sigma_{xz}, \\ \sigma_{yx}, & \sigma_{yy}, & \sigma_{yz}, \\ \sigma_{zx}, & \sigma_{zy}, & \sigma_{zz}. \end{matrix} \tag{74.2}$$

Совокупность этих девяти величин называется *тензором упругих напряжений*.

Вообще говоря, эти величины меняются от точки к точке среды, т. е. являются функциями координат. Только в статике в отсутствие массовых сил тензор упругих напряжений остается одним и тем же во всех точках среды.

4. *Тензор упругих напряжений симметричен*, т. е.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i,\, j = x,\, y,\, z). \tag{74.3}$$

Для доказательства рассмотрим элементарный параллелепипед вещества со сторонами dx, dy, dz (рис. 199). Момент сил M_z относительно оси Z, действующий на этот параллелепипед, равен

$$M_z = (\sigma_{xy}\, dy\, dz)\, dx - (\sigma_{yx}\, dx\, dz)\, dy = (\sigma_{xy} - \sigma_{yx})\, dV,$$

где dV — объем рассматриваемого элементарного параллелепипеда. По уравнению моментов

$$(\sigma_{xy} - \sigma_{yx})\, dV = I_z \frac{d\omega_z}{dt},$$

где I_z и ω_z — момент инерции и угловая скорость относительно оси Z. Но момент инерции I_z пропорционален произведению массы на квадрат линейных размеров рассматриваемого параллелепипеда, т. е. является бесконечно малой величиной *более высокого порядка*, чем объем параллелепипеда dV. Поэтому при стягивании параллелепипеда в точку правая часть $I_z \frac{d\omega_z}{dt}$ будет быстрее обращаться в нуль, чем левая. В пределе мы получим $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$. Аналогично доказываются и остальные два соотношения: $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$ и $\sigma_{zx} = \sigma_{xz}$.

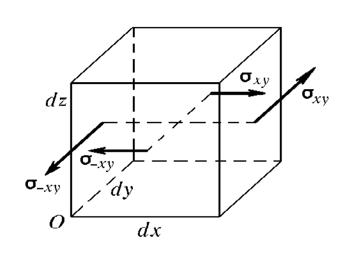


Рис. 199

5. Можно доказать, что *координатную систему* X, Y, Z *можно выбрать так, чтобы в этой системе обратить в нуль все недиагональные элементы тензора упругих напряжений, т. е.* $\sigma_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Не останавливаясь на доказательстве, заметим только, что это можно сделать потому, что тензор упругих напряжений σ_{ij} симметричен. Таким образом, в этой системе координат упругие напряжения в каждой точке тела характеризуются только величинами σ_{xx}, σ_{yy} и σ_{zz}. В целях краткости их можно обозначать с помощью одного индекса, т. е. σ_x, σ_y и σ_z. Соответствующие координатные оси называют *главными осями* тензора упругих напряжений.

§ 75. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЕЙ

1. Возьмем однородный стержень и приложим к его основаниям растягивающие или сжимающие силы F (рис. 200 *а* и *б*). Стержень будет деформирован, т. е. растянут или сжат. Мысленно проведем произвольное сечение C, перпендикулярное к оси стержня. Для равновесия стержня AC необходимо, чтобы на его нижнее основание C действовала сила $F_1 = F$. Это есть сила, с которой нижняя часть стержня BC тянет верхнюю или давит на нее. Такая сила возникает потому, что нижняя часть стержня деформирована. Верхняя часть стержня также деформирована и действует на нижнюю с силой, равной F_1 и противоположно направленной. Такие силы действуют в любом поперечном сечении растянутого или сжатого стержня. Таким образом, деформация стержня связана с возникновением упругих сил, с которыми каждая часть стержня действует на другую, с которой она граничит. Силу, отнесенную к единице площади поперечного сечения стержня, мы назвали напряжением. В рассматриваемом случае напряжение перпендикулярно к поперечному сечению стержня. *Если стержень растянут, то это напряжение называется натяжением* и определяется выражением

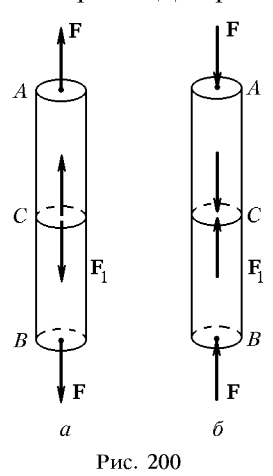


Рис. 200

$$T = \frac{F}{S}, \tag{75.1}$$

где S — площадь поперечного сечения стержня. *Если же стержень сжат, то напряжение называется давлением* и численно определяется той же формулой

$$P = \frac{F}{S}. \tag{75.2}$$

Давление можно рассматривать как отрицательное натяжение и наоборот, т. е.

$$P = -T. \tag{75.3}$$

Это замечание освобождает нас от необходимости рассматривать отдельно растяжение и сжатие.

2. Пусть l_0 — длина недеформированного стержня. После приложения силы F его длина получает приращение Δl и делается равной $l = l_0 + \Delta l$. Отношение

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \tag{75.4}$$

называется *относительным удлинением стержня*. В случае растягивающих сил оно положительно, в случае сжимающих сил — отрицательно. Относительное удлинение, взятое с противоположным знаком, называется *относительным сжатием*. Таким образом, по определению относительным сжатием называется величина $-(\Delta l)/l_0$. Она положительна в случае сжимающих сил и отрицательна в случае растягивающих.

Опыт показывает, что *для не слишком больших упругих деформаций натяжение T (или давление P) пропорционально относительному удлинению (или относительному сжатию)*

$$T = E\frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{или} \quad P = -E\frac{\Delta l}{l_0}, \tag{75.5}$$

где E — постоянная, зависящая только от материала стержня и его физического состояния. Она называется *модулем Юнга* по имени английского ученого Томаса Юнга (1773—1829). Формулы (75.5) выражают *закон Гука для деформаций растяжения и сжатия стержней*. Это приближенный закон. Для больших деформаций он может не оправдываться. Деформации, для которых приближенно выполняется закон Гука, называются *малыми деформациями*. Если в формуле (75.3) положить $\Delta l = l_0$, то получится $T = E$. Поэтому модуль Юнга часто определяют как натяжение, которое надо приложить к стержню, чтобы его длина удвоилась, если бы при такой деформации закон Гука оставался еще верным. Недостаток этого определения состоит в том, что при таких больших деформациях закон Гука почти для всех тел становится недействительным: тело либо разрушается, либо нарушается пропорциональность между деформацией и приложенным напряжением.

3. Более общим, чем закон Гука, является утверждение, что в *случае упругих деформаций натяжение T является однозначной функцией относительного удлинения ε: $T = T(\varepsilon)$*. Эта функция должна обращаться в нуль при $\varepsilon = 0$, так как с исчезновением деформации ε исчезает и напряжение T. Поэтому в разложении функции $T(\varepsilon)$ в ряд по степеням ε должен отсутствовать нулевой член. Это разложение должно иметь вид

$$T = E\varepsilon + A\varepsilon^2 + B\varepsilon^3 + \ldots,$$

причем коэффициенты E, A, B, ... являются постоянными, зависящими только от материала стержня и его физического состояния. Если относительное удлинение ε мало, то высшими степенями ε можно пренебречь. Тогда мы придем к закону Гука (75.5). При этом мы делаем относительную ошибку порядка $A\varepsilon^2/E\varepsilon \sim \varepsilon$. Эти общие соображения показывают, что *закон Гука и основанные на нем расчеты верны с относительной ошибкой порядка ε*. Поэтому во всех таких расчетах мы не только можем, но и должны отбросить слагаемые, которые по сравнению с основными членами являются

величинами порядка ε, ε^2 и т. д. Например, относительное удлинение ε можно определить не только выражением (75.4), но и выражением $(\Delta l)/l$. Дело в том, что разность этих двух выражений

$$\frac{\Delta l}{l_0} - \frac{\Delta l}{l} = \frac{(l-l_0)\Delta l}{l l_0} = \frac{(\Delta l)^2}{l l_0} \sim \varepsilon^2$$

второго порядка малости по ε, а потому ею следует пренебречь. Таким образом, закон Гука (75.5) можно также представить в виде

$$T = E\frac{\Delta l}{l}, \quad P = -E\frac{\Delta l}{l}, \tag{75.6}$$

или

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{T}{E}, \quad \frac{\Delta l}{l} = -\frac{P}{E}. \tag{75.7}$$

Это замечание, касающееся точности вычислений, разумеется, относится не только к деформациям растяжения и сжатия, но и ко всем малым деформациям, о которых будет идти речь ниже.

4. Пусть в стержне создано натяжение T_1. Оно вызовет относительное удлинение $\frac{\Delta_1 l}{l_0} = \frac{T_1}{E}$, и длина стержня сделается равной $l_1 = l_0 + \Delta_1 l$. Свойства материалов при деформациях, вообще говоря, изменяются. Поэтому можно было бы ожидать, что изменится и модуль Юнга. Однако если деформации малы (а только для таких деформаций и имеет смысл говорить о модуле Юнга), то с такими изменениями можно не считаться. Действительно, обозначим через E_1 модуль Юнга деформированного стержня. Если к деформированному стержню приложить дополнительное натяжение T_2, то его длина получит дополнительное приращение $\Delta_2 l$, причем $\frac{\Delta_2 l}{l_1} = \frac{T_2}{E_1}$. Принимая во внимание точность, с которой справедлив закон Гука, можно считать, что $\frac{\Delta_2 l}{l_1} = \frac{\Delta_1 l}{l_0}$. Имея еще в виду, что полное удлинение равно $\Delta l = \Delta_1 l + \Delta_2 l$, получим

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{T_1}{E} + \frac{T_2}{E_1}.$$

Но Δl не обязательно разлагать на составные части $\Delta_1 l$ и $\Delta_2 l$. Эту величину можно рассматривать как единое удлинение под действием результирующего натяжения $T = T_1 + T_2$. Поступая так, можно написать на основании закона Гука

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{T}{E} = \frac{T_1}{E} + \frac{T_2}{E}.$$

Сравнивая с предыдущим выражением, получим $E = E_1$, что и требовалось доказать.

Приведенное рассуждение справедливо не только для деформаций растяжения и сжатия, но и для любых малых деформаций. *Если деформации малы, то упругие постоянные тел не изменяются при деформациях.* Отсюда следует, что *если на тело действует несколько сил, то для вычисления результирующей деформации можно вычислить сначала деформации, вызываемые каждой силой в отдельности* (как если бы остальных сил не было вовсе), а *затем полученные деформации сложить.* Это важное положение называется *принципом суперпозиции малых деформаций.*

5. Для того чтобы деформировать тело, над ним надо совершить работу. В свою очередь, деформированное тело само может совершать работу. Оно обладает запасом потенциальной энергии. Эта энергия называется *упругой.* Она равна работе сил, затраченной на деформацию тела, при том существенном условии, что вся эта работа тратится только на приращение упругой энергии тела и не расходуется на увеличение кинетической энергии. Для того чтобы кинетическая энергия при деформации не возникала, надо деформацию производить достаточно медленно, постепенно увеличивая внешние силы, чтобы в любой момент времени каждая часть тела практически находилась в состоянии равновесия. Иначе говоря, при деформации внешние силы все время должны уравновешиваться возникающими при этом силами внутренних напряжений. Если это условие выполнено, то говорят, что тело совершает *квазистатический процесс.*

Возьмем для иллюстрации спиральную пружину, которая может служить моделью деформированного тела. Повесим ее за верхний конец. К нижнему концу подвесим груз, удерживая его рукой, чтобы пружина не растягивалась. Если груз внезапно отпустить, то возникнут колебания. Работа силы веса груза идет не только на растяжение пружины, но расходуется также на увеличение кинетической энергии груза и пружины. Это — процесс не квазистатический. Для вычисления упругой энергии пружины такой процесс не годится. Прикрепим теперь к нижнему концу пружины легкую чашечку и будем очень медленно нагружать ее песком. Колебания не возникают, пружина медленно и непрерывно удлиняется по мере увеличения нагрузки. Вся работа силы тяжести идет на увеличение потенциальной энергии деформируемой пружины. Такой процесс является квазистатическим, и им можно воспользоваться для вычисления упругой энергии пружины.

6. После этих замечаний легко вычислить упругую энергию растянутого стержня. Приложим к стержню растягивающую силу $f(x)$ и будем непрерывно и медленно увеличивать ее от начального значения $f = 0$ до конечного значения $f = F$. При этом удлинение стержня будет меняться от $x = 0$ до конечного значения $x = \Delta l$. По закону Гука $f(x) = kx$, где k — *коэффициент упругости,* который легко выразить через модуль Юнга. Вся работа в

рассматриваемом процессе пойдет на приращение упругой энергии U, а потому

$$U = \int_0^{\Delta l} f(x)\,dx = k \int_0^{\Delta l} x\,dx = \frac{1}{2}\,k(\Delta l)^2. \qquad (75.8)$$

Так как в конечном состоянии $x = \Delta l$, то $F = f(\Delta l) = k\Delta l$. Учитывая это, получим

$$U = \frac{1}{2}\,F\Delta l. \qquad (75.9)$$

Если бы к недеформированному стержню мы сразу приложили постоянную силу F, то при удлинении его на Δl была бы совершена вдвое большая работа $A = F\Delta l$. Так как запас упругой потенциальной энергии в стержне получился бы тем же самым, то ясно, что только половина работы A расходуется на приращение упругой энергии стержня. Вторая половина этой работы тратится на кинетическую энергию упругих колебаний и волн, которые всегда возбуждаются в стержне при неквазистатическом воздействии на него. При квазистатическом воздействии колебания и волны не возникают. Вот почему в формулах (75.8) и (75.9) появился числовой коэффициент 1/2.

Найдем *объемную плотность упругой энергии*, т. е. *упругую энергию, и приходящуюся на единицу объема растянутого* (*или сжатого*) *стержня*. Она найдется делением выражения (75.9) на объем стержня $V = Sl$. Это дает

$$u = \frac{1}{2}\,\frac{F}{S}\,\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{2}\,T\varepsilon. \qquad (75.10)$$

Если воспользоваться законом Гука, то эту формулу нетрудно привести к виду

$$u = \frac{1}{2}\,E\varepsilon^2 = \frac{T^2}{2E} = \frac{P^2}{2E}. \qquad (75.11)$$

7. Опыт показывает, что *под действием растягивающей или сжимающей силы F изменяются не только продольные, но и поперечные размеры стержня. Если сила F — растягивающая, то поперечные размеры стержня уменьшаются. Если она сжимающая, то они увеличиваются.* Пусть a_0 — толщина стержня до деформации, a — после деформации. За толщину можно принять для круглого стержня его диаметр, для прямоугольного — одну из сторон его прямоугольного основания и т. д. Если сила F — растягивающая, то величина $-\dfrac{\Delta a}{a_0} \approx -\dfrac{\Delta a}{a}$ называется *относительным поперечными сжатием* стержня ($\Delta a = a - a_0$). Отношение относительного поперечного сжатия к соответствующему относительному

продольному удлинению называется *коэффициентом Пуассона* по имени французского ученого Симеона Пуассона (1781—1840):

$$\mu = -\frac{\Delta a}{a} \Big/ \frac{\Delta l}{l} = -\frac{\Delta a}{\Delta l}\frac{l}{a}. \qquad (75.12)$$

Коэффициент Пуассона зависит только от материала тела и является одной из важных постоянных, характеризующих его упругие свойства. Случай сжимающих сил не обязательно выделять особо, так как сжимающую силу можно рассматривать как растягивающую, взятую с противоположным знаком.

Модуль Юнга E и коэффициент Пуассона μ полностью характеризуют упругие свойства изотропного материала. Все прочие упругие постоянные могут быть выражены через E и μ.

8. Заметим, наконец, что все модули и коэффициенты упругости, с которыми мы имели и будем иметь дело, следовало бы для точности называть *изотермическими модулями* и *коэффициентами*. Они характеризуют деформации тел в предположении, что температура их поддерживается постоянной. Это обычно имеет место в случае статических деформаций. Но если деформации динамические (например, волны в упругих средах), то они могут происходить настолько быстро, что разности температур, возникшие при деформации, не успевают выравниваться в результате теплообмена. Важнейшим является предельный случай, когда между различно нагретыми частями среды теплообмен совсем не происходит. Соответствующие процессы, модули и коэффициенты упругости называются *адиабатическими*. Соотношения между изотермическими и адиабатическими модулями упругости будут рассмотрены в т. II.

ЗАДАЧИ

1. Найти относительное удлинение вертикально подвешенного стержня под действием собственного веса P. Площадь поперечного сечения равна S.

Ответ. $(l - l_0)/l_0 = P/(2SE)$.

2. Упругий стержень массой m, длиной l и площадью поперечного сечения S движется в продольном направлении с ускорением a (одинаковым для всех точек стержня). Найти упругую энергию деформации, возникающую вследствие ускоренного движения.

Ответ. $U = m^2a^2l/(6ES)$.

3. Какой максимальной кинетической энергией может обладать маховик, объем которого $V = 1$ м^3, если прочность материала на разрыв $T = 10^{10}$ дин/см^2. Всю массу маховика считать сосредоточенной в его ободе (тонком по сравнению с радиусом маховика). Показать, что при неизменной прочности материала маховика максимальная кинетическая энергия зависит только от объема, но не от массы маховика.

Ответ. $K = {}^1\!/_2\, VT = 5 \cdot 10^8$ Дж.

4. Тонкий стержень длиной $2l$ равномерно вращается вокруг перпендикулярной к нему оси, проходящей через центр стержня, с угловой

скоростью ω. Показать, что натяжение T, возникающее в стержне при таком вращении, удовлетворяет уравнению

$$\frac{dT}{dx} = -\rho\omega^2 x,$$

где ρ — плотность материала, а x — расстояние от оси вращения. Интегрируя это уравнение, найти распределение натяжения в стержне. В каком месте стержня натяжение максимально и чему оно равно? Показать, что максимальная кинетическая энергия, которую можно сообщить стержню при неизменной прочности его материала, зависит только от объема стержня V, но не от его массы. Вычислить максимальную кинетическую энергию для $V = 3 \cdot 10^4$ см^3, если максимальное натяжение, которое может выдержать стержень, равно $T_{\text{макс}} = 10^{10}$ дин/см^2.

Ответ. $T = {}^1\!/_2\, \rho\omega^2(l^2 - x^2)$. Натяжение максимально в центре и равно $T_{\text{макс}} = {}^1\!/_2\, \rho\omega^2 l^2$.

$$K_{\text{макс}} = \frac{1}{3} V T_{\text{макс}} = 10^7 \text{ Дж}.$$

(Ср. с задачей 3 к § 19.)

5. Стержень поперечного сечения S растягивается силой F, параллельной его оси. Под каким углом α к оси наклонено сечение, в котором тангенциальное напряжение τ максимально? Найти это напряжение.

Ответ. $\alpha = 45°$, $\tau = F/2S$.

6. Резиновый цилиндр с высотой h, весом P и площадью основания S поставлен на горизонтальную плоскость. Найти энергию упругой деформации цилиндра, возникающей под действием его собственного веса. Во сколько раз изменится энергия упругой деформации рассматриваемого цилиндра, если на верхнее основание его поставить второй такой же цилиндр?

Ответ. $U = P^2h/(6ES)$. Во втором случае упругая энергия увеличится в 7 раз.

§ 76. ДЕФОРМАЦИИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТРЕХ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ СИЛ

1. Допустим, что однородное изотропное тело имеет форму прямоугольного параллелепипеда, к противоположным граням которого приложены силы F_x, F_y, F_z, нормальные к этим граням. Соответствующие им натяжения обозначим через T_x, T_y, T_z (рис. 201). Определим деформации, которые возникнут под действием этих сил. Будем предполагать деформации малыми. Тогда для решения задачи можно воспользоваться принципом суперпозиции малых деформаций.

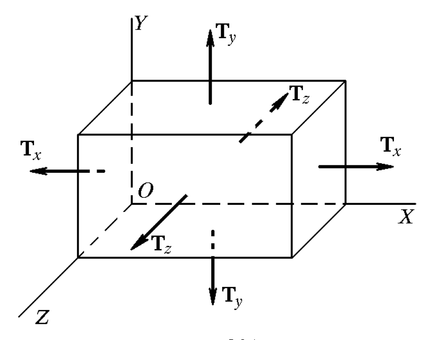


Рис. 201

Направим координатные оси параллельно ребрам параллеле-

пипеда. Пусть x, y, z — длины этих ребер. Если бы действовала только сила F_x, то ребро x получило бы приращение $\Delta_1 x$, определяемое соотношением $\frac{\Delta_1 x}{x} = \frac{T_x}{E}$. Если бы действовала только сила F_y, то размеры параллелепипеда, перпендикулярные к оси Y, сократились бы. В частности, ребро x при этом получило бы отрицательное приращение $\Delta_2 x$, которое можно вычислить по формуле $\frac{\Delta_2 x}{x} = -\mu \frac{T_y}{E}$. Наконец, относительное приращение ребра x под действием одной только силы F_z было бы равно $\frac{\Delta_3 x}{x} = -\mu \frac{T_z}{E}$. Если все силы действуют одновременно, то согласно принципу суперпозиции малых деформаций результирующее удлинение ребра x будет равно $\Delta x = \Delta_1 x + \Delta_2 x + \Delta_3 x$. Аналогично вычисляются удлинения параллелепипеда и вдоль остальных двух направлений Y и Z. В результате для удлинений всех трех ребер параллелепипеда можно написать

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &\equiv \frac{\Delta x}{x} = \frac{T_x}{E} - \frac{\mu}{E}(T_y + T_z), \\ \varepsilon_y &\equiv \frac{\Delta y}{y} = \frac{T_y}{E} - \frac{\mu}{E}(T_z + T_x), \\ \varepsilon_z &\equiv \frac{\Delta z}{z} = \frac{T_z}{E} - \frac{\mu}{E}(T_x + T_y). \end{aligned} \tag{76.1}$$

2. При квазистатическом растяжении параллелепипеда вдоль оси X совершается работа $A_1 = \frac{1}{2} S_x T_x \Delta x$, где $S_x = yz$ — площадь грани, перпендикулярной к оси X. Эту работу можно представить в виде $A_1 = \frac{1}{2} xyz \cdot T_x \frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{2} V T_x \varepsilon_x$, где $V = xyz$ — объем параллелепипеда. Аналогично запишутся работы при квазистатических растяжениях в направлениях координатных осей Y и Z. Сложив эти три работы и разделив результат на объем параллелепипеда, получим следующее выражение для плотности упругой энергии в рассматриваемом случае:

$$u = \frac{1}{2}(T_x \varepsilon_x + T_y \varepsilon_y + T_z \varepsilon_z). \tag{76.2}$$

С помощью формул (76.1) это выражение приводится к виду

$$u = \frac{1}{2E}\left[T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 - 2\mu(T_x T_y + T_y T_z + T_z T_x)\right]. \tag{76.3}$$

Если из трех натяжений T_x, T_y, T_z только одно отличается от нуля, то эти формулы переходят в более простые формулы (75.10) и (75.11). Согласно формулам (75.11) *плотность упругой энергии и пропорциональна квадрату натяжения T (или давления P)*. В общем случае, как показывает формула (76.3), плотность упругой энергии является квадратичной однородной функцией T_x, T_y, T_z (или P_x, P_y,

P_z). При заданных натяжениях (или давлениях) она обратно пропорциональна модулю упругости E. Чем жестче пружина, тем меньше при неизменном натяжении ее упругая сила. Идеально твердые тела (для которых $E = \infty$) совершенно не обладают упругой энергией, какие бы силы натяжения и давления на них не действовали.

Натяжения T_x, T_y, T_z выражаются через ε_x, ε_y, ε_z линейно, как это следует из формул (76.1). Поэтому плотность упругой энергии является квадратичной однородной функцией деформаций ε_x, ε_y, ε_z. В частном случае ($\varepsilon_x = \varepsilon$, $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$) она пропорциональна *квадрату деформации*. При заданных деформациях ε_x, ε_y, ε_z плотность упругой энергии *и* пропорциональна модулю упругости E. Чем жестче пружина, тем больше ее упругая энергия (при неизменной деформации).

ЗАДАЧА

Определить относительное изменение объема полого латунного шара радиусом $R = 5$ см, в который накачан воздух до давления 11 атм (наружное давление 1 атм). Толщина сферической оболочки $d = 1$ мм. Модуль Юнга латуни $E = 10^{12}$ дин/см^2, коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}3$.

Решение. В силу симметрии касательное напряжение τ, действующее в оболочке, одно и то же и одинаково во всех направлениях. Возьмем малый элемент оболочки, имеющий форму прямоугольника. При вычислении относительного изменения площади этого элемента под действием касательных напряжений τ можно отвлечься от кривизны элемента, приняв его за плоскую прямоугольную пластинку. Тогда вычисление дает

$$\frac{\Delta S}{S} = 2(1-\mu)\frac{\tau}{E}$$

(изменение площади, вызванным нормальным давлением, пренебрегаем). Поскольку поверхность шара S пропорциональна $V^{2/3}$, где V — объем шара, относительное изменение объема будет $\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2}\frac{\Delta S}{S}$. Так как поверхность искривлена, то натяжение τ создаст разность нормальных давлений. Для нее нетрудно получить $2\tau d/R$ (см. *формулу Лапласа* в учении о поверхностном натяжении, том II). Эта разность должна быть уравновешена разностью давлений газа ΔP по разные стороны оболочки. В результате получим

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2}\frac{(1-\mu)R}{Ed}\,\Delta P \approx 5\cdot 10^{-4}.$$

§ 77. ВСЕСТОРОННЕЕ И ОДНОСТОРОННЕЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

1. Рассмотрим частный случай, когда все натяжения T_x, T_y, T_z равны и отрицательны. В этом случае на параллелепипед со всех сторон действует постоянное давление $P = -T_x = -T_y = -T_z$. Как видно из

формул (76.1), все три относительные деформации ε_x, ε_y, ε_z равны между собой и определяются выражением

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{P}{E}(1-2\mu). \tag{77.1}$$

Их легко выразить через относительное изменение объема параллелепипеда при деформации. Действительно, взяв логарифмические производные от обеих частей равенства $V = xyz$, получим

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z},$$

или

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \tag{77.2}$$

Поэтому формулу (77.1) можно представить в виде

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{P}{K}, \tag{77.3}$$

где постоянная K определяется выражением

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}. \tag{77.4}$$

Эта постоянная называется *модулем всестороннего сжатия*. Формула (77.3) применима к телам произвольной, а не только прямоугольной формы. Для доказательства достаточно заметить, что произвольное тело можно мысленно разделить на малые части, каждая из которых имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Эти части находятся под постоянным внешним давлением. Относительные изменения их объемов, а следовательно, и относительное изменение объема всего тела одинаковы и определяются формулой (77.3).

Выражение (76.3) для плотности упругой энергии в случае *деформации всестороннего сжатия* переходит в

$$u = \frac{3(1-2\mu)}{2E}P^2 = \frac{P^2}{2K}. \tag{77.5}$$

Так как величина u существенно положительна, то должно быть $1 - 2\mu > 0$, т. е.

$$\mu < \frac{1}{2}. \tag{77.6}$$

2. Рассмотрим другой важный случай — *деформацию одностороннего растяжения или сжатия*. Пусть однородный стержень может свободно растягиваться или сжиматься в направлении его оси (которую мы примем за координатную ось X), а его поперечные размеры изменяться не могут. Этот случай имеет важное значение в теории распространения продольных волн в неограниченной упру-

гой среде (см. § 83). Можно мысленно вырезать часть среды, имеющую форму стержня, направленного вдоль распространения волн. Такой «стержень» может сжиматься или расширяться в продольном направлении. Однако изменениям его поперечных размеров препятствует окружающая среда. Форма поперечного сечения стержня не имеет значения. Возьмем стержень с прямоугольным поперечным сечением, чтобы можно было воспользоваться формулами (76.1). Пусть вдоль стержня действует постоянное натяжение T_x. Поперечные напряжения T_y и T_z найдутся из условия неизменности размеров стержня в направлениях координатных осей Y и Z. Полагая в формулах (76.1) $\Delta y = \Delta z = 0$, получим

$$T_y - \mu(T_z + T_x) = 0, \quad T_z - \mu(T_x + T_y) = 0.$$

Отсюда

$$T_y = T_z = \frac{\mu}{1-\mu} T_x, \tag{77.7}$$

$$\varepsilon_x = \frac{T_x}{E}\left(1 - \frac{2\mu^2}{1-\mu}\right). \tag{77.8}$$

Введем обозначение

$$E' = E\,\frac{1-\mu}{1-\mu-2\mu^2} = E\,\frac{1-\mu}{(1+\mu)\,(1-2\mu)}, \tag{77.9}$$

или

$$E' = \left[\frac{2}{3(1+\mu)} + \frac{1}{3(1-2\mu)}\right]E. \tag{77.10}$$

Тогда

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{T_x}{E'}. \tag{77.11}$$

Это соотношение аналогично соотношениям (75.7). Постоянная E' называется *модулем одностороннего растяжения.*

ЗАДАЧА

Прямоугольная пластинка зажата между вертикальными плоскостями, перпендикулярными к оси X, так что в направлении этой оси частицы пластинки смещаться не могут (рис. 202). В направлении оси Z пластинка подвергается равномерному одностороннему давлению P. Определить давление P_x, которому подвергается пластинка со стороны плоскостей, между которыми она зажата. Найти выражение для

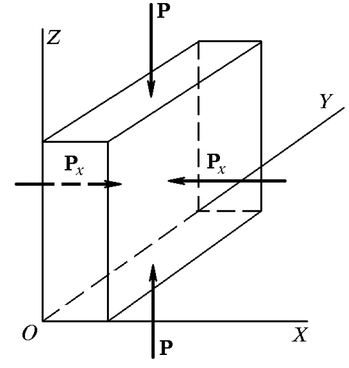


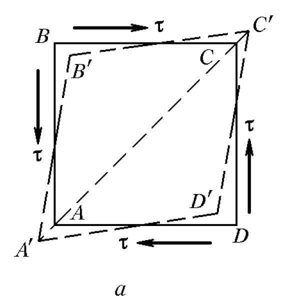
Рис. 202

плотности упругой энергии u, а также относительное сжатие пластинки в направлении оси Z и относительное расширение в направлении оси Y.

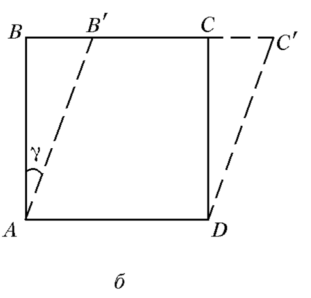
Ответ. $P_x = \mu P$, $\frac{\Delta y}{y} = \frac{\mu P}{E}(1 + \mu)$, $\frac{\Delta z}{z} = -\frac{P}{E}(1 - \mu^2)$, $u = \frac{P^2}{2E}(1 - \mu^2)$.

§ 78. СДВИГ

1. Возьмем куб из однородного и изотропного вещества. Приложим к противоположным граням его AD и BC равные и противоположно направленные касательные силы (рис. 203 *а*). Они образуют пару сил, под действием которых куб начинает вращаться. Для устранения вращения приложим такие же касательные силы к граням AB и CD. Тогда куб вращаться не будет, а будет только деформироваться. Необходимость приложения касательных напряжений к



а



б

Рис. 203

граням AB и CD непосредственно следует также из симметрии тензора упругих напряжений (см. § 74).

Опыт показывает, что под действием приложенных напряжений квадрат $ABCD$ переходит в ромб $A'B'C'D'$. При этом длина диагонали AC увеличивается, а диагонали BD — уменьшается. Объем тела, как будет показано ниже, при такой деформации практически изменяться не будет. Относительные изменения объема будут величинами более высокого порядка малости, чем относительные изменения длин диагоналей AC и BD. В теории малых деформаций такими изменения пренебрегают. Высшего порядка малости будут и изменения длин сторон квадрата $ABCD$. Поэтому куб после деформации можно повернуть так, чтобы новое основание $A'D'$ совместилось с прежним основанием AD (рис. 203 *б*). Отсюда видно, что рассматриваемая деформация состоит в том, что все слои куба, параллельные основанию AD, сдвигаются в одном и том же направлении, параллельном тому же основанию. Поэтому эта деформация называется *сдвигом*. Сдвиг пропорционален расстоянию сдвигаемого слоя от основания AD. Угол γ между гранью AB до деформации и той же гранью AB' после деформации назы-

вается *углом сдвига*. Конечно, ту же деформацию можно получить путем сдвига параллельно грани AB или CD на тот же угол γ. Мы предполагаем, конечно, что угол γ мал ($\gamma \ll 1$) и пользуемся законом Гука. Для деформации сдвига этот закон можно записать в виде

$$\tau = G\gamma, \tag{78.1}$$

где τ — касательное напряжение, действующее на гранях куба. Постоянная G называется *модулем сдвига* и зависит от материала, из которого изготовлен куб.

2. Найдем выражение для плотности упругой энергии при деформации сдвига. Закрепив неподвижно основание AD (рис. 203 *б*), будем производить сдвиг квазистатически. Тогда вся работа, затрачиваемая на сдвиг, пойдет на увеличение упругой энергии тела. Совершаемая работа, очевидно, пойдет на увеличение упругой энергии тела. Совершаемая работа, очевидно, равна $A = 1/2\ \tau S\ \Delta x$, где Δx — смещение грани BC при сдвиге, а S — площадь этой грани. Если a — длина ребра куба, то $\Delta x = a\gamma$, а потому $A = 1/2\ \tau S\ a\gamma = 1/2\ V\tau\gamma$, где V — объем куба. Таким образом, объемная плотность упругой энергии выражается формулой

$$u = \frac{1}{2}\,\tau\gamma = \frac{\tau^2}{2G}. \tag{78.2}$$

3. Тангенциальные напряжения, действующие параллельно граням куба, можно свести к совокупности натяжения и давления, равных по модулю и действующих во взаимно перпендикулярных направлениях. Действительно, проведем диагональное сечение куба AC (плоскость, перпендикулярной к плоскости рис. 203 *а*). Сила F, действующая на часть куба ACD на плоскости AC, будет нормальна к этой плоскости и направлена внутрь рассматриваемой части. Это и есть сила нормального давления. Определим это давление. Если длина ребра куба есть a, то сила F, очевидно, равна

$$F = a^2(\tau \sin 45^\circ + \tau \cos 45^\circ) = \sqrt{2}\,a^2\tau.$$

Площадь диагонального сечения AC есть $a^2\sqrt{2}$. Разделив F на эту площадь, получим искомое давление $P = \tau$. Итак, в диагональном сечении AC и во всякой плоскости, ему параллельной, напряжение сводится к нормальному давлению, численно равному τ. Рассуждая аналогично, можно доказать, что в диагональном сечении BD и во всякой плоскости, параллельной ему, действует нормальное натяжение T, также численно равное τ.

4. На основании изложенного ясно, что *сдвиг эквивалентен растяжению тела в некотором направлении и сжатию в перпендикулярном направлении.* Вырежем, например, мысленно из нашего куба прямоугольный параллелепипед с поперечным сечением $PQRS$ (рис. 204). В направлении диагонали куба AC он будет растянут натяжением $T = \tau$, в перпендикулярном направлении BD — сжат дав-

лением $P = \tau$. В направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка, размеры параллелепипеда останутся неизменными. Направим ось X параллельно ребрам PQ и SR, а ось Y — параллельно ребрам QP и PS. Тогда, подставляя в формулы (76.1) $T_x = \tau$, $T_y = \tau$, $T_z = 0$, получим $\varepsilon_z = 0$, $\varepsilon_x + \varepsilon_y = 0$. В силу соотношения (77.2) $\Delta V = 0$. Деформация не сопровождается изменением объема тела — утверждение, которое упоминалось выше без доказательства.

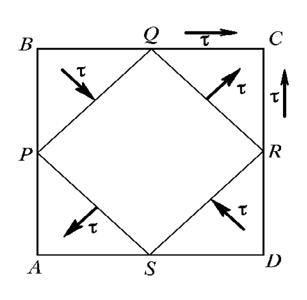


Рис. 204

5. Таким же путем из формулы (76.3) получаем для плотности упругой энергии при сдвиге

$$u = \frac{1+\mu}{E}\tau^2. \qquad (78.3)$$

Эта величина должна совпадать с (78.2), так как значение u не может зависеть от способа вычисления. Сравнивая оба выражения, получим

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \qquad (78.4)$$

Эта формула устанавливает связь между модулем Юнга E, коэффициентом Пуассона μ и модулем сдвига G. Используя ее, а также формулы (77.10) и (77.4), получим

$$E' = K + \frac{4}{3}G. \qquad (78.5)$$

§ 79. КРУЧЕНИЕ

1. Деформации, о которых шла речь до сих пор, были деформациями *однородными*, т. е. такими, когда все бесконечно малые элементы тела деформированы одинаково. *Деформации кручения и изгиба*, к изучению которых мы обращаемся, *являются деформациями неоднородными*. Это значит, что в этих случаях деформации внутри тела меняются от точки к точке.

Возьмем однородную проволоку, закрепим ее верхний конец, а к нижнему концу приложим закручивающие силы, создающие вращающий момент M относительно продольной оси проволоки. Проволока закрутится — каждый радиус нижнего основания ее повернется вокруг продольной оси на угол φ. Такая деформация называется *кручением*. Закон Гука для деформации кручения записывается в виде

$$M = f\varphi, \qquad (79.1)$$

где f — постоянная для данной проволоки величина, называемая ее *модулем кручения*. В отличие от ранее введенных модулей E, K,

E', G и коэффициента μ, *модуль кручения зависит не только от материала, но и от геометрических размеров проволоки.*

2. Выведем выражение для модуля кручения f. Сначала сделаем это для цилиндрической трубки радиусом r и длиной l, предполагая, что толщина δr стенки трубки очень мала по сравнению с радиусом r. Площадь основания трубки есть $2\pi r\delta r$. Момент сил, действующий на это основание, будет $M = 2\pi r\delta r\cdot\tau r$, где τ — касательное напряжение в том же основании. При квазистатическом закручивании проволоки на угол φ совершается работа $A = ½\, M\varphi = M^2/2f$. Разделив ее на объем трубки $V = 2\pi rl\delta r$, найдем плотность упругой энергии при деформации кручения

$$u = \frac{\pi\tau^2 r^3\delta r}{fl}. \tag{79.2}$$

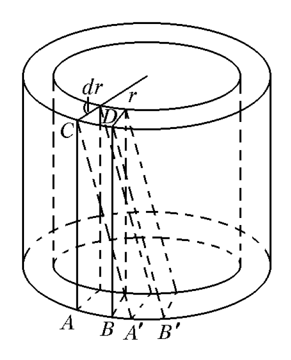


Рис. 205

Ту же величину можно выразить иначе. Вырежем мысленно из трубки бесконечно короткую часть, изображенную на рис. 205. В результате деформации кручения бесконечно малый элемент трубки $ABDC$ перейдет в положение $A'B'DC$. Это есть сдвиг. Таким образом, деформацию кручения можно рассматривать как неоднородный сдвиг. Плотность упругой энергии при сдвиге дается выражением (78.2). Приравнивая его выражению (79.2), находим искомое соотношение

$$f = \frac{2\pi G}{l}\, r^3\delta r. \tag{79.3}$$

Если стенка трубки имеет конечную толщину, то модуль f найдется интегрированием последнего выражения по r. Это дает

$$f = \frac{\pi G}{2l}\,(r_2^4 - r_1^4), \tag{79.4}$$

где r_1 — внутренний радиус трубки, а r_2 — наружный. Для сплошной проволоки радиуса r

$$f = \frac{\pi G}{2l}\, r^4. \tag{79.5}$$

3. Экспериментально модуль кручения можно измерить, наблюдая крутильные колебания тяжелого тела, подвешенного к нижнему концу проволоки. Эти колебания будут гармоническими с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}} \tag{79.6}$$

(см. § 42). Если момент инерции тела I известен, то, измерив период колебаний T, можно вычислить по этой формуле модуль кручения f.

ЗАДАЧИ

1. Две проволоки одинаковой длины сделаны из одного и того же материала, но диаметр второй из них вдвое больше, чем первой. В одном из опытов нижнее основание каждой проволоки было закручено относительно ее верхнего основания на один и тот же угол. В другом опыте проволоки были сварены своими основаниями так, что ось одной из них стала продолжением оси другой; затем нижнее основание получившейся составной проволоки было закручено относительно верхнего на некоторый угол. Найти отношения упругих энергий проволок в обоих случаях.

Ответ. 1) $U_1/U_2 = 1/16$. 2) $U_1/U_2 = 16$.

2. Шар, подвешенный на проволоке, совершает крутильные колебания с периодом T вокруг вертикальной оси. Найти период колебаний того же шара T', если проволоку, на которой он был подвешен, заменить цилиндрической трубкой той же длины и массы с внешним радиусом R и внутренним радиусом r и изготовленной из того же материала.

Ответ. $T' = T\sqrt{\dfrac{R^2-r^2}{R^2+r^2}}$.

3. Определить удлинение спиральной пружины, если растягивающие силы действуют вдоль ее оси. Шаг спирали считать пренебрежимо малым по сравнению с радиусом витка R. Модуль кручения проволоки, из которой изготовлена спираль, считать известным.

Решение. Произведем мысленный разрез проволоки пружины в произвольной точке A плоскостью, проходящей через ось пружины (рис. 206 *а*). Пусть $\mathbf{F}_1$ — сила, с которой нижняя часть пружины действует на верхнюю в месте разреза. Для равновесия необходимо, чтобы $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}$, где $\mathbf{F}$ — растягивающая сила, действующая на верхнюю часть пружины. Так как силы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}_1$ образуют пару, то момент этой пары не зависит от выбора точки, относительно которой он берется. Этот момент перпендикулярен к плоскости разреза и равен $M = FR$. Из-за малости шага витка можно считать, что момент в точке A направлен вдоль оси проволоки. Чтобы рассматриваемая часть пружины находилась в равновесии, необходимо,

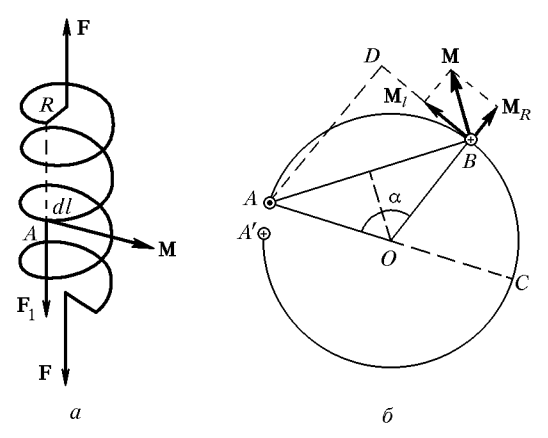


Рис. 206

чтобы возникло кручение проволоки вокруг ее оси, компенсирующее момент **M**. Когда растягивающие силы F действуют вдоль оси пружины, модуль момента M не меняется вдоль проволоки, а потому кручение ее будет равномерным. Пусть dl — элемент длины проволоки. Под действием момента M он закрутится на угол $d\varphi = M/f_1$, где f_1 — модуль кручения рассматриваемого элемента. Обозначим через f модуль кручения всей проволоки (если ее выпрямить). Так как модуль кручения обратно пропорционален длине проволоки l_0, то $f = f_1 \frac{dl}{l_0}$, а потому $d\varphi = \frac{M}{f}\frac{dl}{l_0}$. В результате закручивания элемента dl на угол $d\varphi$ нижний конец проволоки опустится на $dx = R d\varphi = \frac{MR}{f}\frac{dl}{l_0} = \frac{FR^2}{f}\frac{dl}{l_0}$. Интегрируя по всей длине проволоки, найдем удлинение пружины

$$x = \frac{FR^2}{f}. \tag{79.7}$$

Введем жесткость пружины по формуле $F = kx$. Тогда

$$k = \frac{f}{R^2}. \tag{79.8}$$

4. Рассмотреть ту же задачу для случая, когда растягивающие силы действуют не вдоль оси пружины, а вдоль одной из образующих цилиндрической поверхности, на которую она намотана.

Решение. Мысленно выделим произвольный участок проволоки AB (рис. 206 *б*). Силы, действующие на его концы, перпендикулярны к плоскости рисунка (параллельны продольной оси пружины). Каждая из этих сил равна внешней силе F, приложенной к пружине. Силу, направленную к нам, изобразим точкой, от нас — крестиком. Момент **M** сил, приложенных к выделенному участку, перпендикулярен к хорде AB и равен $M = 2FR\sin(\alpha/2)$. Разложим этот момент на составляющую M_l вдоль проволоки и составляющую M_R, перпендикулярную к ней. Если пружина содержит много витков, то составляющую M_R можно не учитывать. Она вызывает изгиб проволоки вокруг оси, параллельной радиусу OB. Но легко видеть, что такой момент изгибает участок AC в одну сторону, а участок CA' — в противоположную, так что в целом при большом числе витков изгиб практически не влияет на удлинение пружины. Момент M_l равен $M\sin(\alpha/2) = 2\,FR\sin^2(\alpha/2)$. Элемент проволоки длиной dl он закрутит на угол $d\varphi = \frac{M_l}{f_1} = \frac{M_l}{f}\frac{dl}{l_0}$ и сместит свободный конец пружины на величину

$$dx = AD\cdot d\varphi = AB\sin\frac{\alpha}{2}\cdot d\varphi = \frac{4FR^2}{fl_0}\sin^4\frac{\alpha}{2}\,dl = \frac{4FR^3}{fl_0}\sin^4\frac{\alpha}{2}\,d\alpha.$$

В отличие от предыдущего случая, кручение проволоки неоднородно. Интегрируя по всей длине пружины и считая число витков целым, получим

$$x = \frac{3}{4}\frac{FR^2}{f}.$$

§ 80. ИЗГИБ

1. Рассмотрим изгиб однородного бруса (балки) произвольного поперечного сечения, которое, однако, должно оставаться одинаковым на протяжении всей длины бруса. Пусть до деформации брус имел прямолинейную форму. Проведя сечения AB и $A'B'$, нормальные к оси бруса, мысленно вырежем из него бесконечно малый элемент $AA'B'B$ (рис. 207 *а*), длину которого обозначим через l_0. Ввиду бесконечной малости выделенного элемента можно считать, что в результате изгиба прямые AA', NN', BB' и все прямые, им параллельные, перейдут в дуги окружности с центрами, лежащими на оси O, перпендикулярной к плоскости рисунка (рис. 207 *б*). Эта ось называется *осью изгиба*. Наружные волокна, лежащие выше линии NN', при изгибе удлиняются, волокна, лежащие ниже линии NN', укорачиваются. Длина линии NN' остается неизменной. Эта линия называется *нейтральной линией*. Проходящее через нее сечение (недеформированного) бруса плоскостью, перпендикулярной к плоскости рис. 207 *а*, называется *нейтральным сечением*. Таким образом, все наружные волокна будут растянуты,

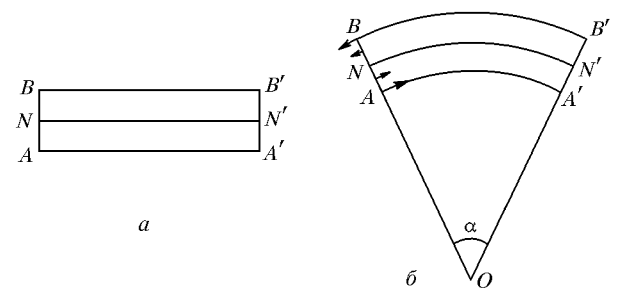


Рис. 207

все внутренние — сжаты. Пусть R — радиус кривизны нейтральной линии NN'. Тогда $l_0 = R\alpha$, где α — центральный угол, опирающийся на дугу NN'. Рассмотрим волокно бруса, находящегося на расстоянии ξ от нейтрального сечения. (Величина ξ положительна, если волокно находится выше нейтрального сечения (рис. 207 *б*), и отрицательна, если оно находится ниже.) Если брус не слишком толст, так что $|\xi| \ll R$, то длина рассматриваемого волокна будет $l = (R + \xi)\alpha$, а удлинение $\Delta l = l - l_0 = \xi\alpha$. Следовательно, натяжение, действующее вдоль рассматриваемого волокна, $\tau = E\frac{\Delta l}{l_0} = E\xi\frac{\alpha}{l_0}$, или

$$\tau = E\frac{\xi}{R}. \qquad (80.1)$$

Натяжение, таким образом, меняется линейно с расстоянием ξ. Ниже нейтрального сечения оно отрицательно, т. е. является давлением. Сумма сил натяжения и давления, действующих в сечении AB, может быть и отличной от нуля. Однако в этом случае на изгиб бруса будет накладываться растяжение или сжатие его, одинаковое для всех волокон. Оно может быть учтено особо и исключено из рассмотрения, когда речь идет об изгибе в чистом виде. Поэтому мы будем считать, что сумма всех сил натяжения, действующих в каждом нормальном сечении бруса, равна нулю, т. е. $\int \tau\, dS = 0$,

или в силу (80.1) $\int \xi \, dS = 0$, где dS — элемент площади рассматриваемого поперечного сечения. Интегрирование ведется по всему поперечному сечению бруса. Отсюда видно, что нейтральная линия и нейтральное сечение проходят через центр тяжести поперечного сечения бруса. Из соотношения $\int \tau \, dS = 0$ следует, что момент сил натяжения M_τ, действующих на сечение AB, не зависит от того, относительно какой оси он берется. Для вычисления M_τ проще всего взять ось, перпендикулярную к плоскости рисунка и проходящую через точку N. Очевидно,

$$M_\tau = \int \xi\tau \, dS = \frac{E}{R} \int \xi^2 \, dS,$$

или

$$M_\tau = \frac{E}{R} I, \tag{80.2}$$

где введено обозначение

$$I = \int \xi^2 \, dS. \tag{80.3}$$

Величина I называется *моментом инерции* поперечного сечения бруса по аналогии с соответствующей величиной, вводимой при рассмотрении вращения тела вокруг неподвижной оси. Однако в отличие от последней величины, имеющей размерность массы, умноженной на квадрат длины, (80.3) есть чисто геометрическая величина с размерностью четвертой степени длины.

Можно воспользоваться формулами для моментов инерции, выведенными в § 36, заменив всюду массу m на площадь поперечного сечения S. Если поперечное сечение бруса имеет форму прямоугольника с шириной a и высотой b, то

$$I = \frac{ab^3}{12}. \tag{80.4}$$

Для кругового поперечного сечения радиуса r

$$I = \frac{\pi}{4} r^4. \tag{80.5}$$

Для цилиндрической трубы с внутренним диаметром r_1 и наружным r_2

$$I = \frac{\pi}{4} (r_2^4 - r_1^4). \tag{80.6}$$

Направим ось X вдоль нейтральной линии недеформированного бруса. Ось Y направим к ней перпендикулярно и расположим в плоскости изгиба. Тогда уравнение нейтральной линии изогнутого бруса можно представить в виде $y = y(x)$. По известной формуле

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Если изгиб мал ($y' \ll 1$), то квадратом производной можно пренебречь. В этом приближении

$$M_\tau = EIy''. \tag{80.7}$$

2. Вырежем произвольную (конечную или бесконечную) часть бруса, мысленно проведя в нем два нормальных сечения. В состоянии равновесия

момент упругих сил натяжения, действующих на торцах вырезанной части, должен быть уравновешен противоположно направленными моментами всех прочих внешних сил, действующих на рассматриваемую часть. Это дает метод решения задач на изгиб. Он иллюстрируется примерами, приводимыми ниже, а также задачами к этому параграфу.

Пример 1. Однородный стержень AB лежит на двух симметрично расположенных опорах C и D (рис. 208). К концам стержня A и B приложены равные и одинаково направленные силы F. Определим форму стержня в состоянии равновесия, пренебрегая весом самого стержня. Из симметрии ясно, что в равновесии опоры C и D будут давить на стержень с одинаковыми силами F_1 и F_1, каждая из которых равна F. Проведем в стержне нормальное сечение через произвольно расположенную точку O. Достаточно рассмотреть равновесие одной из частей стержня, например части OB. Упругие натяжения в сечении O создают вращающий момент M_τ, определяемый формулой (80.2). Пара сил F_1 и F создает противоположно направленный момент $M = Fa$, где a — расстояние между линиями действия сил F_1 и F. Как и M_τ, момент M не зависит от положения оси, относительно которой он берется. Кроме того, момент M не зависит от положения точки O. Он одинаков вдоль всего стержня. Уравнение равновесия $M_\tau = M$ принимает вид $IE/R = Fa$. Из него следует, что радиус кривизны R одинаков во всех точках нейтральной линии стержня. Следовательно, в состоянии равновесия стержень будет иметь форму дуги окружности, как это изображено на рис. 208 штриховыми линиями.

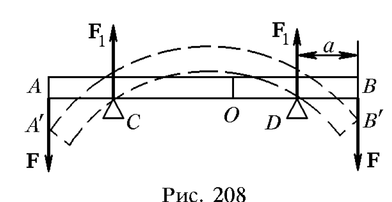


Рис. 208

Для демонстрации можно взять деревянную доску и вколотить в нее гвозди в точках A', B', C, D. Если между этими гвоздями заложить гибкую стальную линейку, то она примет форму дуги окружности. Это дает практический способ черчения окружностей, когда обычный чертежный циркуль оказывается непригодным (например, в случае окружностей очень большого радиуса).

Пример 2. Определим стрелу прогиба балки, жестко закрепленной в стене одним из своих концов (рис. 209). На другой конец балки действует сосредоточенная сила F. Весом самой балки будем пренебрегать. Стрелой прогиба мы называем смещение свободного конца балки под действием приложенной силы F.

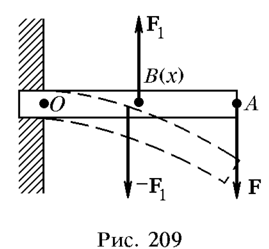


Рис. 209

Поместим начало координат в точке O, в которой нейтральная линия балки пересекается с плоскостью стены. Через произвольную точку $B(x)$ (с координатой $x = OB$) проведем нормальное сечение. Для равновесия необходимо, чтобы сила F_1, действующая на часть BA со стороны части OB, была направлена вверх и равнялась F. Вместе с F она образует пару сил с моментом $M = F(l - x)$, где l — длина балки. Момент сил натяжения возьмем в приближенном виде (80.7), считая, что прогиб мал. Это приводит к уравнению

$$EIy'' = F(l - x).$$

(Ось y направлена в сторону вогнутости, т. е. вниз. При таком условии вторая производная y'' положительна, и обе части последнего соотношения имеют одинаковые знаки.) Интегрируя это уравнение один раз, получим

$$y' = \frac{F}{EI}\,x\left(l - \frac{x}{2}\right) + C.$$

Постоянная интегрирования C равна нулю, так как при $x = 0$, т. е. в точке O, касательная к нейтральной линии горизонтальна. Интегрируя вторично и учитывая, что в точке O (т. е. при $x = 0$) $y = 0$, найдем

$$y = \frac{Fx^2}{2EI}\left(l - \frac{x}{3}\right). \qquad (80.8)$$

Полагая здесь $x = l$, находим стрелу прогиба

$$\lambda = \frac{Fl^3}{3El}. \qquad (80.9)$$

Пример 3. Определим стрелу прогиба центра балки, лежащей на двух опорах, если к ее середине O приложена сосредоточенная сила F, направленная вниз (рис. 210). Весом балки, как и в предыдущем примере, пренебрежем. Вследствие симметрии сила F распределится между опорами поровну. Поместим начало координат в точку A нейтральной линии, расположенную над левой опорой. Отсечем мысленно слева часть балки, проведя нормальное сечение через произвольную точку $C(x)$ (с координатой x), расположенную левее центра O ($x < l/2$, где l — длина балки). Справа на отсеченную часть балки будет действовать сила $F/2$, направленная вниз. Момент внешних сил, действующих на отсеченную часть, будет $M = (F/2)x$. Уравнение равновесия принимает вид

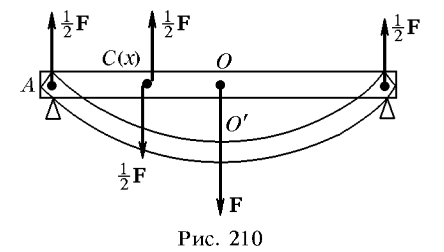


Рис. 210

$$EIy'' = -\frac{F}{2}\,x\quad\left(x \leqslant \frac{l}{2}\right). \qquad (80.10)$$

Теперь ось Y направлена вниз, т. е. в сторону выпуклости балки. Производная y'' отрицательна. По этой причине правая часть взята со знаком минус. Интегрируя полученное уравнение и учитывая, что $y' = 0$ при $x = l/2$, $y = 0$ при $x = 0$, найдем

$$y = \frac{Fx}{48EI}\,(3l^2 - 4x^2)\quad\left(x \leqslant \frac{l}{2}\right). \qquad (80.11)$$

Полагая здесь $x = l/2$, находим стрелу прогиба

$$\lambda = \frac{Fl^3}{48EI}. \qquad (80.12)$$

Этот результат можно также получить из формулы (80.9). Действительно, в точке O' касательная к нейтральной линии изогнутой балки горизонтальна (рис. 210). Если мысленно разрезать балку нормальным сечением, проведенным через O', на две равные части, то каждая половина будет эквивалентна балке, жестко закрепленной одним концом в точке O' и подверженной на свободном конце действию сосредоточенной силы $F/2$, направ-

ленной вверх. Следовательно, стрела прогиба центра балки найдется из формулы (80.9), если в ней сделать замену $F \to F/2$, $l \to l/2$. Это дает

$$\lambda = \frac{1}{3EI}\frac{F}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^3 = \frac{Fl^3}{48EI},$$

т. е. прежний результат (80.12).

Пример 4. Определим стрелу прогиба центра однородной балки с жестко закрепленными концами под действием сосредоточенной силы F, приложенной к ее середине (рис. 211). Снова будем пренебрегать весом балки. Когда балка свободно лежала на двух опорах (рис. 210), влияние последних сводилось к силам $F/2$ и $F/2$, с которыми точечные опоры давили на балку. В случае балки с жестко закрепленными концами результирующая сил реакций опоры, действующих на какой-либо конец балки, по-прежнему равна $F/2$. Но помимо этого силы реакции создают вращающий момент M, действующий на балку. Поэтому вместо уравнения (80.10) надо писать

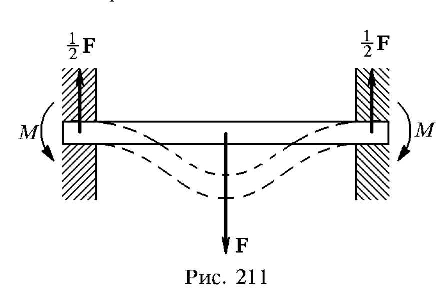


Рис. 211

$$EIy'' = -\frac{F}{2}x + M \quad \left(x \leqslant \frac{l}{2}\right), \tag{80.13}$$

считая вращательный момент M неизвестным и подлежащим определению. Уравнение надо решить при условиях: 1) $y' = 0$ при $x = 0$; 2) $y' = 0$ при $x = l/2$; 3) $y = 0$ при $x = 0$. Это дает

$$M = \frac{1}{8}Fl,$$

$$y = \frac{1}{16}\frac{Fx^2}{EI}\left(l - \frac{4}{3}x\right), \tag{80.14}$$

$$\lambda = \frac{1}{192}\frac{Fl^3}{EI}.$$

Пример 5. Рассмотрим теперь изгиб балки под действием собственного веса P, предполагая, что один конец ее закреплен в стене, а другой свободен (рис. 212). Для равновесия всей балки необходимо, чтобы стена действовала на конец балки O с силой, направленной вверх и равной ее весу P. Проведем нормальное сечение через произвольную точку $B(x)$ нейтральной линии (с координатой $OB = x$). В примере 2 при решении аналогичной задачи мы исходили из условия равновесия части балки BA. Так же можно было бы поступить и при решении рассматриваемой задачи. Однако мы хотим теперь воспользоваться условием равновесия другой части балки, OB, чтобы показать, как поступать в этом случае. Пусть F — сила, действующая на правый конец рассматриваемой части балки OB со стороны части BA. Вес части

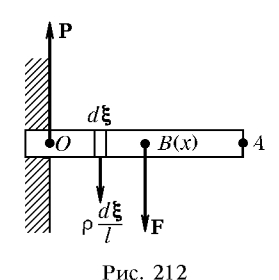


Рис. 212

OB равен Px/l. Для равновесия этой части необходимо условие $P = F + Px/l$ или $F = P(1 - x/l)$. На элемент балки $d\xi$ действует сила веса $P\frac{d\xi}{l}$. Момент M_1 всех вертикальных сил, действующих на часть OB, не зависит от положения оси, относительно которой он берется. Возьмем в качестве таковой ось, проходящую через конец O. Получим

$$M_1 = Fx + \int_0^x P\xi\,\frac{d\xi}{l} = Px - P\,\frac{x^2}{2l}.$$

Сюда надо добавить еще момент горизонтальных сил упругих напряжений, действующих на закрепленный конец O. Обозначая этот момент через M_2, для полного момента сил, действующих на часть OB, может написать

$$M = Px - P\,\frac{x^2}{2l} + M_2. \tag{80.15}$$

Постоянную M_2 можно найти из условия равновесия всей балки OA. На ее свободном конце не действуют никакие силы и упругие напряжения. Поэтому, полагая в (80.15) $x = l$, мы найдем полный момент сил, действующих на всю балку. В равновесии он должен равняться нулю, т. е. $Pl - P\,\frac{l^2}{2l} + M_2 = 0$. Отсюда $M_2 = -Pl/2$. Это дает

$$M = Px - P\,\frac{x^2}{2l} - P\,\frac{l}{2}. \tag{80.16}$$

Уравнение равновесия части балки OB принимает вид

$$EIy'' = -Px + P\,\frac{x^2}{2l} + P\,\frac{l}{2}.$$

Решая его при условиях: 1) $y' = 0$ при $x = 0$; 2) $y = 0$ при $x = 0$, получим

$$y = \frac{P}{4EI}\,lx^2 - \frac{P}{6EI}\,x^3 + \frac{P}{24EI}\,\frac{x^4}{l}. \tag{80.17}$$

Полагая здесь $x = l$, находим стрелу прогиба свободного конца балки

$$\lambda = \frac{P}{8EI}\,l^3. \tag{80.18}$$

Если на свободный конец балки действует еще внешняя сила F, направленная вниз, то вместо формул (80.16) и (80.18) нетрудно получить

$$M = F(x - 1) + Px - P\,\frac{x^2}{2l} - \frac{Pl}{2}, \tag{80.19}$$

$$\lambda = \frac{l^3}{EL}\left(\frac{F}{3} + \frac{P}{8}\right). \tag{80.20}$$

Результирующий прогиб, таким образом, равен сумме прогибов, получающихся при раздельном и независимом действии сил F и P. Этот результат справедлив для любых малых деформаций, а не только для деформаций изгиба, что непосредственно следует из принципа суперпозиции.

Пример 6. Упругий стержень AB длиной l сдавливается с концов двумя равными и противоположно направленными силами F, действующими вдоль одной прямой (рис. 213). Концы стержня, закрепленные в шарнирах,

могут свободно перемещаться по направлению действия сил. При известной нагрузке F стержень начинает изгибаться в сторону. Это показывает, что помимо сжатого состояния стержня возможны и другие равновесные состояния его. На рис. 213 изображен стержень в таком изогнутом состоянии. Направим ось X вдоль продольной оси недеформированного стержня, а ось Y — вбок в сторону изгиба. Уравнение равновесия изогнутого стержня имеет вид

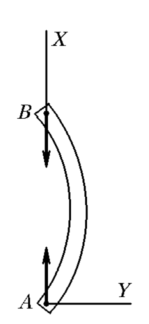


Рис. 213

$$y'' + k^2 y = 0, \tag{80.21}$$

где введено обозначение

$$k^2 = \frac{F}{EI}. \tag{80.22}$$

Общее решение этого уравнения есть

$$y = C \cos kx + D \sin kx,$$

где C и D — постоянные интегрирования. Если начало координат поместить на одном из концов стержня, то должно быть $C = 0$. Это следует из того, что при $x = 0$ ордината должна обращаться в нуль. На другом конце, т. е. при $x = l$, ордината y также равна нулю. Значит, должно также быть $D \sin kl = 0$ *). Если $\sin kl \neq 0$, то $D = 0$, а потому $y = 0$. В этом случае стержень может быть только сжат, но не изогнут. Если же $\sin kl = 0$, т. е. $kl = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$, то прямолинейная равновесная форма стержня хотя и является теоретически возможной, но, как легко доказать, она будет неустойчивой. Стержень принимает форму дуги синусоиды в соответствии с уравнением $y = D \sin kx$, причем постоянная D зависит от прогиба, т. е. в конце концов от нагрузки. Значения l и F, соответствующие наименьшему корню ($kl = \pi$),

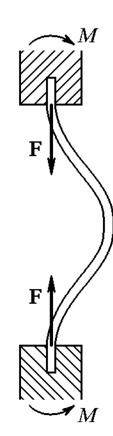


Рис. 214

$$l = \frac{\pi}{k} = \pi\sqrt{\frac{EI}{F}} \quad \text{и} \quad F = \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \tag{80.23}$$

называются соответственно *критической длиной и предельной нагрузкой* при продольном изгибе. Эти величины можно рассматривать как предельные значения длины или нагрузки, при которых стержень начнет изгибаться в сторону, если только до этого он не был разрушен действующими силами.

Если оба конца стержня жестко закреплены (рис. 214), то надо учесть дополнительные моменты сил, действующие на концах стержня, подобно тому, как это делалось в примере 4. Вместо уравнения (80.21) теперь надо решать уравнение

$$y'' + k^2 y = k^2 C,$$

где C — постоянная, подлежащая определению. Общее решение этого уравнения:

$$y = A \cos kx + B \sin kx + C.$$

*) Строго говоря, под l здесь следует понимать не длину стержня, а расстояние вдоль прямой между концами изогнутого стержня. Это расстояние, очевидно, меняется с изменением нагрузки и является величиной, подлежащей определению. Однако при малых деформациях такое уточнение несущественно, и под l можно понимать длину самого стержня.

Условие $y=0$ при $x=0$ дает $A+C=0$. Из второго условия $y'=0$ при $x=0$ получаем $B=0$, так что

$$y=A\,(\cos kx-1).$$

Надо еще потребовать, чтобы y и y' обращались в нуль и на другом конце стержня. Это даст два новых условия: 1) $\cos kl=1$; 2) $\sin kl=0$. Из них получаем $kl=2\pi,\ 4\pi,\ \dots$ Критическая длина в этом случае в два, а предельная нагрузка в четыре раза больше, чем в предыдущем:

$$l=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{EI}{F}},\quad F=\frac{4\pi^2EI}{l^2}. \tag{80.24}$$

Если один конец стержня жестко закреплен, а другой закреплен в шарнире, то для тех же величин получаем

$$l=\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{EI}{F}},\quad F=\frac{\pi^2EI}{4l^2}. \tag{80.25}$$

ЗАДАЧИ

1. Определить стрелу прогиба центра однородной балки под действием собственного веса P, если балка лежит своими концами на двух опорах.

Ответ. $\lambda=\dfrac{5}{384}\dfrac{Pl^3}{EI}$.

2. То же для балки, обоими концами жестко закрепленной в стене.

Ответ. $\lambda=\dfrac{1}{384}\dfrac{Pl^3}{EI}$.

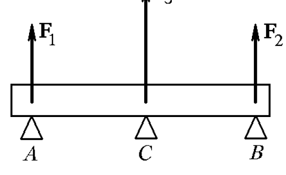


Рис. 215

3. Определить распределение веса P балки, лежащей на трех опорах A, B, C (рис. 215). Средняя опора C расположена посередине между крайними опорами A и B и смещена на величину λ вниз относительно горизонтальной плоскости, в которой лежат крайние опоры.

Решение. При равновесии $F_1+F_2+F_3=P$, причем в силу симметрии $F_1=F_2$. Мысленно уберем опоры, заменив их силами F_1, F_2, F_3, с которыми они давили на балку. Кроме того, закрепим балку посередине. От этого деформации балки не изменятся. Воспользуемся формулами (80.9) и (80.18). Под действием силы F_1 левый конец балки поднимется относительно средней опоры на величину $y_1=\dfrac{F_1}{3EI}\left(\dfrac{l}{2}\right)^3$. Под действием собственного веса тот же конец опустится вниз на $y_2=\dfrac{P}{2}\dfrac{1}{8EI}\left(\dfrac{l}{2}\right)^3$. Общее поднятие вверх будет y_1-y_2. По условию оно равно λ. В результате получим

$$F_1=F_2=\frac{3}{16}P+\frac{24EI\lambda}{l^3},\quad F_3=\frac{5}{8}P-\frac{48EI\lambda}{l^3}.$$

Когда все три опоры находятся на одной высоте, то

$$F_1=F_2=\frac{3}{16}P,\quad F_3=\frac{5}{8}P.$$

В этом случае распределение веса балки между тремя опорами не зависит от ее упругих свойств, хотя без учета последних задача становится неопределенной (ср. § 44). Эта зависимость объясняется тем, что мы не учитывали деформацию самих опор.

4. Та же задача (см. рис. 215), но опора C не находится посередине между опорами A и B ($AC = a$, $CB = b$).

Решение. Поместим начало координат в нейтральном сечении над опорой A, направив ось X вправо, а ось Y — вниз. Написав уравнение равновесия для частей $AC(x \leqslant a)$ и $CB(x \geqslant a)$ и интегрируя их при условиях $y = 0$ при $x = 0$ и $x = a + b \equiv l$, а также $y = \lambda$ при $x = a$, получим

$$y = \frac{\lambda}{a}\, x + \frac{F_1 x}{6EI}\,(a^2 - x^2) - \frac{Px}{24EIl}\,(a^3 - x^3) \quad (x \leqslant a),$$

$$y = \frac{\lambda}{b}\,(l - x) + \frac{F_2(l-x)}{6EI}\,[b^2 - (l - x)^2] - \frac{P(l-x)}{24EIl}\,[b^3 - (l - x)^3] \quad (x \geqslant a).$$

Далее, надо потребовать, чтобы в точке C у балки не было излома, т. е. чтобы первые производные обоих выражений в точке $x = a$ совпадали. Наконец, надо учесть, что при равновесии суммы всех внешних сил и их моментов, действующих на балку в целом, равны нулю. В результате получим

$$F_1 = \frac{3EI}{a^2 b}\,\lambda + \frac{P}{8}\,\frac{3a^2 + ab - b^2}{a(a+b)},$$

$$F_2 = \frac{3EI}{ab^2}\,\lambda + \frac{P}{8}\,\frac{3b^2 + ab - a^2}{b(a+b)},$$

$$F_3 = -\,\frac{3EI(a+b)}{a^2 b^2}\,\lambda + \frac{P}{8}\,\frac{3ab + a^2 + b^2}{ab}.$$

5. Цилиндрический стержень и трубка одинаковой длины и массы, изготовленные из одного и того же материала, лежат своими концами на двух опорах и прогибаются под действием собственного веса. Определить отношение их стрел прогиба λ_1/λ_2, если радиус стержня равен r, а наружный радиус трубки R.

Ответ. $\lambda_1/\lambda_2 = (2R^2 - r^2)/r^2$.

6. Если на две опоры положить концами бумажный лист, то он прогибается и падает под действием собственного веса. Если же лист скатать в сплошной цилиндр или свернуть в трубку, склеив его края, то получившиеся тела ведут себя как твердые. Их можно даже нагружать без заметного прогиба. Вычислив моменты инерции I_1, I_2, I_3 соответствующих поперечных сечений, объяснить явление. Длина листа бумаги (расстояние между опорами) l, ширина a, толщина h.

Ответ. $I_1 = \frac{1}{12}\, ah^3$, $I_2 = \frac{1}{4\pi}\,(ah)^2$, $I_3 = \frac{1}{8\pi^2}\, a^3 h$.

7. Из круглого бревна диаметром D требуется изготовить балку прямоугольного поперечного сечения, чтобы ее изгиб был минимальным. Определить ширину a и толщину h такой балки.

Ответ. $a = \frac{D}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}\, D$. Задача сводится к исследованию экстремума выражения ab^3 при дополнительном условии $a^2 + b^2 = \mathrm{const}$.

§ 81. СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ УПРУГИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СТЕРЖНЯХ

1. Если в каком-либо месте упругой среды возникла деформация, то по прекращении внешних воздействий она не остается на месте, а распространяется в среде во всех направлениях. В таких случаях говорят о распространении в среде *упругих возмущений* или *волн*. Примерами могут служить звуковые волны в твердых телах, жидкостях или газах. Закрепим, например, в горизонтальном положении длинный железный стержень. Если ударить молотком по одному концу стержня, то на этом конце возникает деформация сжатия, которая начинает распространяться вдоль стержня с большой скоростью. Чтобы обнаружить такую деформацию, наденем на стержень проволочную катушку, концы которой присоединим к осцил-

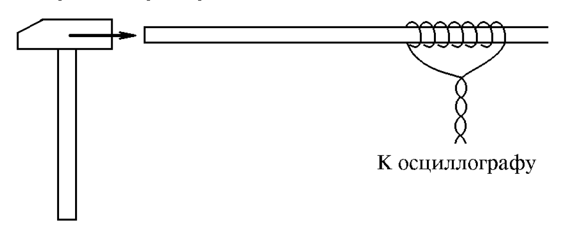


Рис. 216

лографу (рис. 216). Железный стрежень всегда намагничен, хотя бы потому, что он находится в магнитном поле Земли. Пока нет возмущения, магнитный поток через катушку остается постоянным, и электрический ток через нее не идет. Но если возмущение достигает той части стержня, на которую надета катушка, то магнитный поток через нее изменяется. Возникает индукционный электрический ток, фиксируемый осциллографом.

Проследить за распространением упругого возмущения вдоль стержня довольно затруднительно из-за большой скорости распространения и малости самого возмущения. Но это легко сделать на модели, взяв вместо стержня длинную спиральную пружину из мягкой проволоки, подвешенную горизонтально на нескольких нитях. Если по одному концу пружины нанести легкий удар, то видно, как деформация сжатия распространяется вдоль пружины. Если же конец пружины был оттянут, то возникает *деформация растяжения*, также распространяющаяся с определенной скоростью вдоль пружины.

2. Важным является вопрос о *скорости распространения упругих возмущений*. Рассмотрим этот вопрос сначала для упругих возмущений, распространяющихся вдоль стержня. Начнем с модели. Пусть имеется прямолинейный ряд, состоящий из одинаковых твердых идеально упругих шаров, соприкасающихся между собой. Ряд таких шаров неограниченно простирается вправо (рис. 217).

Модель не предназначена непосредственно для решения вопроса о скорости распространения упругих возмущений в стержне. Но она позволяет простейшим образом составить представление о распределении скорости движения вещества в стержне, когда в нем распространяется возмущение, возникшее в результате действия определенной силы. Нанеся удар по первому шару, сообщим ему некоторую скорость v (рис. 217 *а*). Первый шар ударится о второй. При упругом ударе шары просто обмениваются скоростями: первый шар остановится, а второй придет в движение с той же скоростью v (см. § 28). Затем второй шар передаст движение третьему, а сам остановится и т. д. Движение будет передаваться от шара к шару. В результате возникает возмущение, распространяющееся вдоль ряда шаров. Скорость распространения такого возмущения обозначим через c. Ее нельзя смешивать со скоростью v того шара, который в рассматриваемый момент движется. Изменим теперь постановку опыта. В тот момент, когда при столкновении со вторым шаром первый шар остановится, нанесем по нему второй удар, чтобы он приобрел прежнюю скорость v. Тогда в этот момент первые два шара будут иметь одну и ту же общую скорость v. Затем при ударе о третий шар второй шар передаст ему свою скорость, а сам остановится. Первый шар при столкновении со вторым сделает то же самое. В результате движение перейдет от первых двух шаров ко второму и третьему. Затем оно будет передано третьему и четвертому шарам и т. д. Короче говоря, вдоль ряда шаров побежит возмущение, в котором в каждый момент движутся какие-то два шара, соприкасающиеся между собой, а остальные покоятся (рис. 217 *б*). Допустим теперь, что всякий раз, как первый шар передает свое движение второму шару, он получает удар, в результате которого его скорость v восстанавливается. Состояние движения представлено на схематическом рис. 217 *в*. Все шары, расположенные левее некоторой границы, движутся с одной и той же скоростью v, а шары, расположенные правее этой границы, находятся в состоянии покоя. Сама граница перемещается вправо со скоростью c, так что в движение вовлекаются все новые и новые шары.

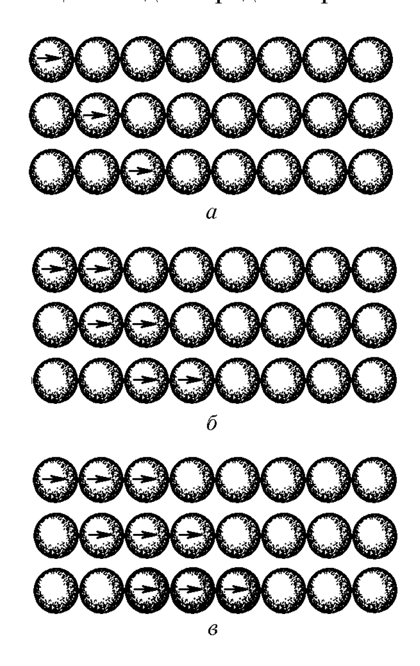


Рис. 217

Очевидно, ничто не изменится, если вместо шаров взять прямолинейный ряд, состоящий из упругих цилиндриков, соприкасающихся между собой своими основаниями (рис. 218). Это замечание позволяет легко выполнить предельный переход к сплошной среде. Допустим, что длины цилиндриков неограниченно уменьшаются, а число их неограниченно растет. Вместе с тем удары, которым подвергается первый цилиндрик, становятся все чаще и чаще, а сила каждого удара — все слабее и слабее. В пределе получится сплошной стержень, на свободный конец которого действует постоянная сила F (рис. 219). От реального стержня наша модель отличается тем, что она не оказывает сопротивления на разрыв. Но это несущественно, когда рассматривается вопрос о распространении возмущения сжатия, поскольку сопротивлением на сжатие модель обладает. Можно было бы усовершенствовать модель, введя между цилиндриками пружинки пренебрежимо малой массы, связывающие их между собой. Но при рассмотрении возмущений сжатия в этом нет необходимости. Мгновенное состояние движения стержня, возникшее под действием постоянной силы F, может быть охарактеризовано следующим образом. Вещество стержня, находящееся левее некоторой границы B, движется с одной и той же постоянной скоростью v, а вещество правее этой границы находится в покое. Сама граница B перемещается вправо с постоянной скоростью c. В акустике, как правило, имеют дело с так называемыми *малыми возмущениями*. В этих случаях скорость вещества v бывает очень мала по сравнению со скоростью распространения возмущения c. Нарушение этого условия наблюдается только в случае очень сильных возмущений, называемых *ударными волнами*, которые здесь рассматриваться не будут. Мы ограничимся исследованием распространения только малых возмущений.

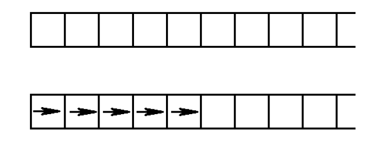


Рис. 218

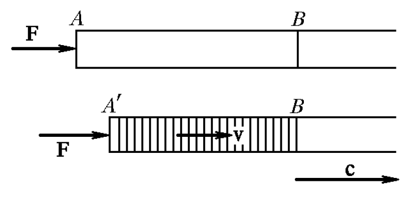


Рис. 219

3. Вычислим скорость распространения *малых продольных возмущений* в стержне, возникших в результате действия постоянной силы давления $\mathbf{F}$, приложенной в некоторый момент к его свободному концу (рис. 219). Этот момент в дальнейшем принимается за нулевой, т. е. за начало отсчета времени. В возмущенной области стержня все вещество в любой момент времени t движется с постоянной скоростью v, а сам стержень в указанной области всюду деформирован одинаково. Если m — масса деформированной части стержня в момент t, то его импульс в тот же момент будет mv. При-

ращение импульса стержня за время dt, т. е. $d(mv)$, равно импульсу силы $F\,dt$ за то же время. Это дает

$$\frac{d(mv)}{dt} = F\ ^{*)}. \qquad (81.1)$$

За время t возмущение проходит путь $l = ct$, так что масса возмущенной области стержня будет $m = \rho Sct$, где S — площадь поперечного сечения стержня, а ρ — его плотность. Строго говоря, под S и ρ в этом выражении следовало бы понимать значения этих величин для *невозмущенного стержня*. Однако в пределах принятой здесь точности расчета в соотношениях подобного рода нет необходимости учитывать разницу между значениями ρ, S и аналогичных величин в возмущенном и невозмущенном состояниях. Это необходимо делать только при рассмотрении сильных возмущений. Подставив в формулу (81.1) $m = \rho Sct$, $F = PS$, где P — давление в возмущенной области стержня, получим

$$P = \rho cv. \qquad (81.2)$$

Давление P связано с относительным сжатием стержня соотношением $P = E\varepsilon$. Для нахождения ε заметим, что к моменту времени t правый конец сжатой области стержня B еще не успел переместиться, тогда как левый свободный конец его A' двигался в течение времени t и переместился на расстояние vt. В результате длина возмущенной области стержня по сравнению со своей исходной длиной укоротится на $\Delta l = vt$. Поэтому

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{v}{c}, \qquad (81.3)$$

$$P = \frac{Ev}{c}. \qquad (81.4)$$

Исключая P из формул (81.2) и (81.4), получим

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \qquad (81.5)$$

Этой формулой и определяется скорость распространения упругих возмущений в рассматриваемом случае.

4. Работа, совершаемая силой F за время t, равна $A = Fvt = PS\varepsilon ct = P\varepsilon V$, где V — объем возмущенной части стержня. С другой стороны, потенциальная энергия, запасенная при сжатии,

*) Если раскрыть производную, то получится

$$m\frac{dv}{dt} = F - v\frac{dm}{dt}. \qquad (81.1a)$$

Это соотношение является частным случаем уравнения (21.2). Достаточно заметить, что возмущенную часть стержня можно рассматривать как тело с переменной массой, причем $v_{\text{отн}} = -v$. Формулу (81.2), которая выводится ниже, можно получить и из уравнения (81.1a), заметив, что в рассматриваемом случае

$$\frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{dm}{dt} = S\rho c.$$

$U = \frac{1}{2} P\varepsilon V$. Таким образом, $U = \frac{1}{2} A$. Только половина работы идет на увеличение потенциальной энергии стержня. Другая половина тратится на приращение кинетической энергии. *В каждый момент времени кинетическая энергия равна потенциальной.* Этим свойством, как будет показано в следующем параграфе, обладает любое малое возмущение, распространяющееся в *одном направлении.*

5. Если в некоторый момент времени сила F прекратит свое действие, то в стержне образуется возмущенная область, ограниченная с обеих сторон. Это нетрудно понять, воспользовавшись прежней моделью из прямолинейного ряда соприкасающихся упругих шаров (см. рис. 217) и выполнив затем предельный переход к сплошному стержню. Таким же путем нетрудно убедиться, что обе границы возмущенной области должны распространяться в одном направлении и с одной и той же скоростью. Последняя определяется формулой (81.5). Для доказательства достаточно в возмущенной области провести произвольное сечение (рис. 220), все время состоящее из одних и тех же частиц. Очевидно, такое сечение будет двигаться вправо со скоростью вещества v. Оно играет роль свободного конца стержня. На него оставшаяся часть деформированного стержня, расположенная левее, давит с силой $F = PS$. Поэтому к части стержня, расположенной правее рассматриваемого сечения, полностью применимо наше прежнее рассуждение. Из него следует, что граница возмущений области B будет распространяться вправо со скоростью c, определяемой формулой (81.5).

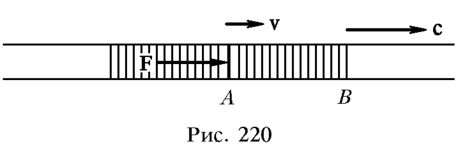


Рис. 220

6. Рассуждение не меняется существенно, если вместо постоянной силы давления к концу стержня приложить в некоторый момент времени постоянную силу натяжения. Разница состоит только в том, что по стержню вместо возмущения сжатия побежит *возмущение разрежения.* Скорость распространения такого возмущения по-прежнему будет определяться формулой (81.5). Модель, состоящая из соприкасающихся упругих шаров, в этом случае, конечно, неприменима. Но ее можно заменить моделью, в которой соприкасающиеся шары связаны между собой бесконечно короткими пружинками пренебрежимо малой массы.

7. В предыдущих рассуждениях предполагалось, что возмущение в стержне вызывается *постоянной силой*, приложенной к его концу в какой-то момент времени. Обобщение на случай *переменной силы* не представляет труда. Обратимся к нашей прежней модели, состоящей из ряда упругих шаров, но скрепленных пружинками пренебрежимо малой массы. Если по первому шару наносить удары различной силы в определенный моменты времени, то и сообщаемые ему скорости будут различными. В соответствии с этим распределение скоростей можно представить прежними схематическими рисунками (см. рис. 217). Однако скорость v будет меняться от шара к шару. Выполнив предель-

ный переход к непрерывному стержню, получим возмущение, распространяющееся в определенном направлении, в котором скорость вещества непрерывно меняется от точки к точке. Может изменяться даже направление скорости v, если сила, приложенная к концу стержня, меняет свое направление. Возмущенная область будет ограничена с обеих сторон, если возбуждающая сила действует ограниченное время. Докажем, что для рассматриваемого возмущения остаются справедливыми формулы (81.2) и (81.3), а следовательно, и формула (81.5). На рис. 221 возмущенная область заштрихована и представлена в два бесконечно близких момента времени t и $t + dt$. За время dt возмущенная область перемещается на расстояние $c\,dt$. Проведем в возмущенной области произвольное сечение A, состоящее из одних и тех же частиц

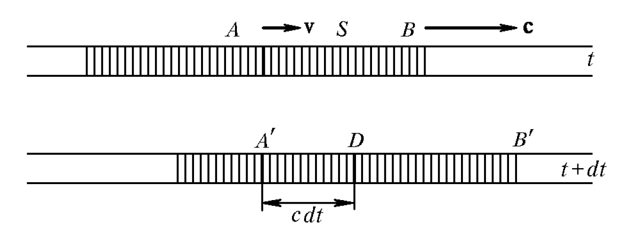


Рис. 221

вещества. Оно перемещается вправо со скоростью v, которую имеют частицы вещества в сечении A в момент времени t. За время dt частицы переместятся в A', пройдя малое расстояние $v\,dt$, которым мы пренебрегаем. Само возмущение переместится на много большее расстояние $c\,dt$. Найдем приращение импульса вещества, расположенного правее выделенного сечения A. Возмущение из точки A переместится в точку D, пройдя расстояние $c\,dt$. Вещество, расположенное правее D, в момент $t + dt$ будет обладать в точности таким же движением, каким обладало в момент t вещество, расположенное правее A. Поэтому ясно, что искомое приращение импульса будет равно импульсу, локализованному между сечениями A' и D, т. е. $Sc\,dt\,\rho v$. Оно равно импульсу сил давления $PS\,dt$, действующих в течение времени dt в сечении A. Приравнивая оба выражения, получаем формулу (81.2). Так же легко получить формулу (81.3). Рассмотрим бесконечно малую возмущенную область $A'D$ (рис. 221). Ее первоначальная длина была равна $l = c\,dt$. Но возмущение достигло сечения A' на время dt раньше, чем сечения D. Благодаря этому путь, пройденный веществом, связанным с сечением A', будет на $v\,dt$ длинее пути, пройденного веществом, связанным с сечением D. Значит, укорочение области $A'D$ в результате деформации равно $\Delta l = v\,dt$. Разделив Δl на l, получим формулу (81.3).

Плотность кинетической энергии в возмущенной области $w_{\text{кин}} = \frac{1}{2}\rho v^2$. Плотность потенциальной энергии $w_{\text{пот}} = \frac{E}{2}\varepsilon^2 =$

$= \frac{E}{2}\frac{v^2}{c^2}$. Подставив сюда выражение для c из формулы (81.5), получим $w_{\text{пот}} = {}^1\!/\!_2\, \rho v^2$. Таким образом, $w_{\text{кин}} = w_{\text{пот}}$. *Во всяком бегущем упругом возмущении, т. е. возмущении, распространяющемся в определенном направлении, полная энергия распределяется поровну между кинетической и потенциальной.*

§ 82. ПРИМЕНЕНИЯ ПРИНЦИПА СУПЕРПОЗИЦИИ

1. Мы пользовались уже *принципом суперпозиции в статике*. Но этому принципу подчиняется также *распространение малых возмущений*. Пусть в среде распространяется какое-либо возмущение. Смещение какой-либо частицы среды из положения равновесия в этом возмущении обозначим через $\mathbf{s}_1(\mathbf{r}_0, t)$. Вектор $\mathbf{r}_0$ означает радиус-вектор рассматриваемой точки в состоянии покоя, т. е. до того момента, когда до нее дошло возмущение. Пусть $\mathbf{s}_2(\mathbf{r}_0, t)$ — смещение во втором возмущении в той же среде. Какое возмущение возникнет в среде, если в ней возбудить оба эти возмущения? Принцип суперпозиции утверждает, что результирующее смещение будет

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{s}_1(\mathbf{r}_0, t) + \mathbf{s}_2(\mathbf{r}_0, t).$$

Это означает, что *всякое возмущение, существующее в среде, не влияет на распространение другого возмущения. Каждое возмущение распространяется так, как если бы других возмущений в среде не было*. Примером могут служить волны на поверхности воды. Если на спокойную поверхность пруда бросить два камня, то из точек падения будут распространяться круговые волны. Там, где они накладываются одна на другую, возникает довольно сложное результирующее движение. Но каждая волна после прохождения через область наложения остается в точности такой же, какой она была бы при отсутствии другой волны. Разумеется, принцип суперпозиции справедлив не только для двух, но для произвольного числа возмущений, накладывающихся друг на друга. Принцип суперпозиции в том виде, в каком он сформулирован выше, следовало бы назвать *принципом суперпозиции смещений*. Но он справедлив и для *скоростей частиц*, поскольку скорости получаются дифференцированием смещений по времени. Он верен и для *упругих напряжений*, поскольку последние линейно выражаются через деформации, т. е. смещения. Принцип суперпозиции можно рассматривать как опытный факт. Он является также следствием *линейности уравнений* (относительно смещений), которым описываются малые возмущения. *Для сильных возмущений принцип суперпозиции не справедлив.*

2. В предыдущем параграфе было показано, что полная энергия *бегущего возмущения* распределяется поровну между кинетической

и потенциальной. Необходимость такого результата выступает особенного отчетливо, если к вопросу подойти с точки зрения принципа суперпозиции. Для определенности рассмотрим возмущения, распространяющиеся вдоль стержня, хотя наши рассуждения имеют общий характер. Пусть в начальный момент времени некоторая область стержня деформирована, но все вещество внутри этой области находится в покое. Вся начальная энергия стержня будет чисто потенциальной. Обозначим ее через E. Если убрать внешние силы, создавшие начальную деформацию, то из возмущенной области вдоль стержня в противоположных направлениях побегут два возмущения. Если первоначальное возмущение было симметрично, то, очевидно, полная энергия E разделится поровну между обоими возмущениями, возникшими из него. Покажем теперь, что в каждом из этих двух бегущих возмущений кинетическая энергия равна потенциальной. Для этого рассмотрим оба возмущения в начальный момент времени, когда они полностью перекрываются. Если P_1 и P_2 — давления, а v_1 и v_2 — скорости вещества в обоих возмущениях, то по принципу суперпозиции в начальный момент $P_1 + P_2 = P$, $v_1 + v_2 = 0$, где P — давление в возмущенной области в тот же момент времени. В силу симметрии $P_1 = P_2 = 1/2\,P$. Такое же соотношение между давлением в соответствующих точках сохранится и в каждый последующий момент времени. В частности, оно останется справедливым и тогда, когда оба возмущения разойдутся, т. е. перестанут накладываться друг на друга. Тогда уже имеет смысл говорить о разделении полной энергии между возмущениями, возникшими из начальной возмущенной области. Так как потенциальная энергия пропорциональна квадрату давления, то потенциальная энергия в каждом из бегущих возмущений будет $E/4$, а потенциальная энергия обоих возмущений вместе — $E/2$. Для сохранения энергии необходимо, чтобы другая половина полной энергии перешла в кинетическую. Понятно, что и кинетическая энергия распределится поровну между обоими бегущими возмущениями. Таким образом, в каждом бегущем возмущении кинетическая и потенциальная энергии будут одинаковы и равны $E/4$.

3. Приведенное рассуждение, поскольку оно основано на соображениях симметрии, не вызывает возражений, если начальное распределение деформации само обладает требуемой симметрией. Но рассуждение остается применимым и в тех случаях, когда это условие не выполняется. Чтобы убедиться в этом, достаточно мысленно разбить начальную возмущенную область на бесконечно малые области. Внутри каждой из таких бесконечно малых областей давление можно считать постоянным, а его распределение можно изобразить в виде бесконечно узкого прямоугольника. Таким образом, начальное распределение давления в каждой из бесконечно малых возмущенных областей будет обладать требуемой симметрией. По принципу суперпозиции возмущения, исходящие из каждой беско-

нечно малой области, совершенно не зависят от того, возмущены или нет другие бесконечно малые области. Поэтому к этим возмущениям полностью применимы рассуждения, приведенные выше. За время t возмущения из рассматриваемой бесконечно малой области

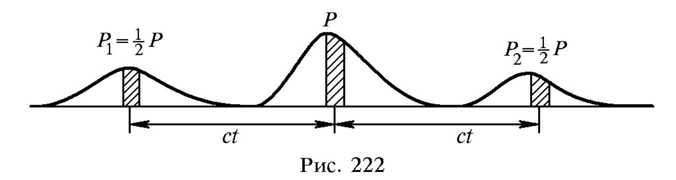


Рис. 222

распространяются на расстояние ct. Если возмущения, возникшие из всей возмущенной области в момент t уже не перекрываются, то не будут перекрываться и возмущения, возникшие из отдельных бесконечно малых возмущенных областей (рис. 222). Для них остается справедливым соотношение $P_1 - P_2 = ½ P$. Отсюда следует, что *в каждом из бегущих возмущений, возникших из возмущенной области, равны не только полные кинетические и потенциальные энергии, но и их плотности.*

4. В приведенном рассуждении предполагалось, что оба бегущих возмущения возникли из начальной деформированной области, находившейся в *состоянии покоя.* Те же рассуждения, понятно, можно было бы провести и для возмущений, возникших из недеформированных областей, частицам которых в начальный момент времени сообщены скорости, произвольным образом распределенные по этим областям (см. задачу 1 к этому параграфу).

5. Итак, *для того чтобы возмущение было бегущим, необходимо, чтобы плотности кинетической и потенциальной энергий в нем были одинаковы.* Вопрос в том, в какую сторону будет распространяться возмущение, легко решается с помощью энергетических соображений. Пусть, например, возмущенная область AB распространяется вправо (рис. 221). Проведем в ней произвольное сечение S. Чтобы возмущение распространялось вправо, необходимо, чтобы часть стержня AS совершала *положительную работу* над частью SB, т. е. должно быть $Pv > 0$, если условиться считать скорости частиц стержня положительными, когда она направлены вправо. Если $v > 0$, то должно быть $P > 0$, т. е. напряжение в сечении S должно иметь *характер давления.* Если же $v < 0$, то должно быть $P < 0$, т. е. напряжение в сечении S должно сводиться к *натяжению* $T = -P$. Чтобы возмущение распространялось влево, необходимо выполнение условия $Pv < 0$.

Если равенство кинетической и потенциальной энергий в возмущении не имеет места, то возмущение разделится на *два возмущения,* распространяющихся в противоположных направлениях. В общем случае эти возмущения будут уносить разные энергии. Например, если всюду в начальной возмущенной области $Pv > 0$, то

энергия, уносимая вправо, будет больше энергии, уходящей влево. При $Pv < 0$ соотношение между этими энергиями будет обратным. Если же $Pv = 0$, то оба возмущения унесут одинаковые энергии.

6. Из изложенного следует, что в бегущей волне сжатия частицы стержня движутся в *том же направлении*, в каком распространяется само возмущение. Если же возмущение носит характер растяжения, то эти направления *противоположны*. Предположим сначала, что возмущение является сжатием и распространяется вдоль стержня слева направо. Исследуем, что произойдет, когда оно достигнет правого конца стержня. Будем предполагать, что правый конец стержня свободен, т. е. не закреплен. Тогда с приходом возмущения частицы на конце стержня приобретут скорости, направленные вправо. Так как конец стержня свободен, то остановиться эти частицы могут лишь тогда, когда со стороны стержня на них подействуют силы, направленные влево. А для этого стержень у правого конца должен оказаться растянутым. Сжатие на конце стержня переходит *в растяжение*. Последнее вызовет в стержне возмущение растяжения, которое будет распространяться в нем влево (рис. 223). Все происходит так, как если бы в некоторый момент времени был оттянут свободный конец стержня и в нем создана деформация растяжения. В возмущении, распространяющемся налево, поскольку оно является возмущением растяжения, частицы среды должны иметь скорости, направленные вправо. Эти скорости частицы приобретают под влиянием сил натяжения, с которыми на них действуют растянутые части стержня, лежащие правее. Мы видим, что *от свободного конца стержня возмущение сжатия отражается и переходит в возмущение растяжения. Аналогично ведет себя и возмущение растяжения. Оно также отражается от свободного конца и переходит в возмущение сжатия* (рис. 224). В обоих случаях при отражении от свободного конца стержня знак деформации меняется на противоположный, тогда как знак скорости вещества v сохраняется неизменным.

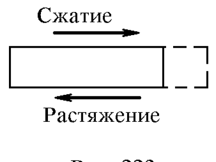


Рис. 223

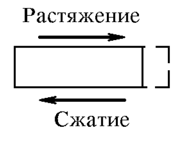


Рис. 224

Иначе ведет себя возмущение при отражении от закрепленного конца стержня. В общем случае возмущение распадается на два: одно возвращается назад в виде отраженного возмущения, другое проходит в среду, с которой граничит закрепленный конец стержня. Только в предельном случае, когда эта среда бесконечно жесткая, возмущение отражается целиком. Рассмотрим этот предельный случай. Когда возмущение достигает границы, то сжатие (растяжение) продолжает оставаться сжатием (растяжением), так как конец стержня закреплен и смещаться не может. Но силы, действующие на этот конец со стороны среды, с которой он граничит, меняют направление скоростей частиц на противоположные. Знаки деформа-

ций при отражении сохраняются, а знаки скоростей изменяются. В результате возмущение сжатия отражается также в виде возмущения сжатия, а возмущение растяжения — в виде возмущения растяжения.

ЗАДАЧИ

1. В упругом стержне создана такая начальная деформация сжатия, что скорости всех частиц в деформированной области направлены в одну сторону (например, вправо), причем в каждой точке плотность потенциальной энергии в α раз превосходит плотность кинетической энергии. Определить, какая доля первоначальной энергии будет унесена возмущением, распространяющимся вправо, а какая доля — возмущением, распространяющимся влево.

Решение. Для простоты введем такие единицы, чтобы плотности кинетической и потенциальной энергий выражались формулами $w_{\text{кин}} = v^2$, $w_{\text{пот}} = P^2$. Представим начальные значения P и v в виде

$$P = P_1 + P_2, \quad v = v_1 + v_2.$$

Пусть каждое из начальных возмущений P_1, v_1 и P_2, v_2 порождает возмущение, бегущее в одном направлении. Тогда $P_1^2 = v_1^2$, $P_2^2 = v_2^2$. Если первое возмущение бежит вправо, а второе — влево, то $P_1 v_1 > 0$, $P_2 v_2 < 0$. Учитывая это, получаем

$$P_1 = v_1, \quad P_2 = -v_2$$

и далее

$$P_1 = v_1 = \frac{P+v}{2}, \quad P_2 = -v_2 = \frac{P-v}{2}.$$

Отношение энергий, уносимых возмущениями, равно

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 = \left(\frac{P+v}{P-v}\right)^2 = \frac{1+2\frac{P}{v}+\left(\frac{P}{v}\right)^2}{1-2\frac{P}{v}+\left(\frac{P}{v}\right)^2},$$

или

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{1+2\sqrt{\alpha}+\alpha}{1-2\sqrt{\alpha}+\alpha} = \left(\frac{\sqrt{\alpha}+1}{\sqrt{\alpha}-1}\right)^2.$$

Если в начальном возмущении вся энергия либо кинетическая ($\alpha = 0$), либо потенциальная ($\alpha = \infty$), то $E_1 = E_2$.

2. Стальной цилиндр $l = 10$ м, движущийся вдоль своей оси со скоростью v, сталкивается торцом с таким же неподвижным цилиндром, ось которого является продолжением оси первого цилиндра. Рассматривая упругие возмущения, возбуждаемые при ударе, определить время соударения цилиндров. При каких значениях скорости v наступают пластические деформации цилиндра или их разрушение? Для стали $E = 2 \cdot 10^{12}$ дин/см^2, $\rho = 7{,}8$ г/см^3, предел упругости $P_0 = 2 \cdot 10^9$ дин/см^2.

Решение. В момент соприкосновения цилиндр A движется со скоростью v, цилиндр B покоится, оба цилиндра не деформированы (рис. 225, положение *1*). После того как произойдет удар, от места удара в обе стороны побегут волны сжатия со скоростью c относительно цилиндров (положение *2*). Частицы обоих цилиндров в области сжатия движутся в одну и ту же сторону со скоростью $v/2$. Это следует из закона сохранения импульса. Когда возмущения дойдут до концов цилиндров, все вещество будет двигаться с общей скоростью $v/2$ (положение *3*). Масса движущегося вещества удвоилась, скорость уменьшилась вдвое, так что закон сохранения импульса соблюдается. Кинетическая энергия по сравнению с начальной уменьшилась вдвое. Половина энергии перешла в потенциальную — оба цилиндра равномерно сжаты и прижимаются друг к другу. Затем начинается отражение возмущений от свободных концов цилиндра (положение *4*). Возмущения сжатия переходят в возмущения разрежения. При этом на левом конце давление со стороны смежных областей останавливает частицы вещества, а на правом — ускоряет. Слева возникает недеформированная область, в которой вещество покоится, справа — недеформированная область, в которой вещество движется вправо со скоростью v. Чтобы убедиться в этом, перейдем в систему отсчета, движущуюся вправо со скоростью $v/2$. В начальный момент (положение *3*) оба цилиндра в этой системе отсчета покоятся и равномерно сжаты. При отражении на обоих концах возникают возмущения разрежения: от левого конца разрежение пойдет вправо со скоростью c, от правого — влево с той же скоростью. У свободных концов стержней образуются недеформированные области. Скорости вещества в этих областях (относительно движущейся системы отсчета) должны быть направлены наружу, так как движение в них возникает под действием сил сжатия, направленных в те же стороны. В силу симметрии скорости вещества в обеих недеформированных областях одинаковы по модулю, но направлены противоположно. Обозначим через v' скорость вещества в правой недеформированной области. (Очевидно, она положительна.) Тогда скорость вещества в левой недеформированной области будет $-v'$. Чтобы найти v', перейдем снова в неподвижную системы отсчета. Относительно этой системы скорости вещества в недеформированных областях будут $v/2 - v'$ и $v/2 + v'$. Когда возмущения встретятся в месте соприкосновения цилиндров, деформации исчезнут, и оба цилиндра будут двигаться как целые со скоростями $v/2 - v'$ и $v/2 + v'$. Кинетическая энергия этого движения будет

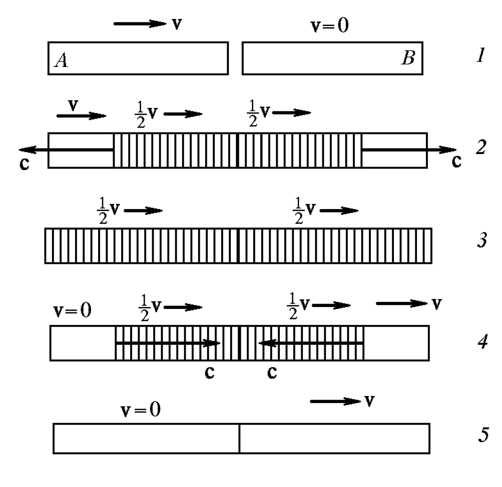


Рис. 225

$$\frac{m}{2}\left(\frac{v}{2} - v'\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{v}{2} + v'\right) = \frac{mv^2}{4} + mv'^2.$$

Но эта величина должна быть равна $mv^2/2$. Отсюда следует, что $v'^2 = v^2/4$, а потому $v' = v/2$. Таким образом, когда обе волны разрежения сойдутся в центре, первый цилиндр остановится и деформирован не будет, второй будет двигаться вправо со скоростью v также в недеформированном состоянии (положение *5*). Как и следовало ожидать, цилиндры обменялись скоростями. Начиная с этого момента контакт между цилиндрами прекратится. Поэтому время соударения цилиндров найдется как промежуток времени, затрачиваемый на прохождение возмущения по одному из цилиндров (любого) туда и обратно:

$$\tau_{\text{уд}} = \frac{2l}{c} = 2l\sqrt{\frac{\rho}{E}} \approx 4\cdot 10^{-5}\ \text{с}.$$

Найдем теперь относительное сжатие цилиндров при деформации. После соприкосновения левый конец цилиндра B приобрел скорость $v/2$, правый конец продолжал покоится в течение времени $\frac{1}{2}\,\tau_{\text{уд}}$. За это время левый конец переместился на расстояние $x = \frac{1}{4}\,\tau_{\text{уд}} v$. Относительное сжатие цилиндра будет

$$\frac{x}{l} = \frac{v}{2c},$$

а давление $P = E\,\frac{v}{2c}$. Чтобы не возникало пластических деформаций или разрушений, должно быть $P < P_0$, т. е.

$$v < \frac{2cP_0}{E} = \frac{2P_0}{\sqrt{E\rho}} \approx 10\ \text{м/с}.$$

§ 83. СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ

1. Возмущения в стержне, рассмотренные в § 81, мы назвали продольными. Это не совсем точно. Каждая деформация сжатия стержня сопровождается увеличением поперечных размеров его. В случае деформации растяжения поперечные размеры стержня сокращаются. Для количественного описания этих явлений был введен коэффициент Пуассона. Следовательно, частицы в стержне движутся не совсем параллельно его оси: наряду с продольной составляющей скорости они имеют и *поперечную составляющую*. Чтобы сделать возмущение чисто *продольным*, надо лишить частицы стержня возможности перемещаться в поперечных направлениях, т. е. «закрепить» боковую поверхность стержня. Такой случай осуществляется в неограниченной среде при распространении в ней продольных возмущений. Если в такой среде мысленно вырезать произвольный «стержень» с осью, параллельной направлению распространения возмущения (которое в случае продольных возмущений параллельно смещениям частиц), то частицы, находящиеся на боковой поверхности его, удерживаемые соседними частями среды, не будут претерпевать никаких боковых смещений. Все смещения будут происходить только параллельно оси «стержня». Рассуждения,

проведенные в предыдущих параграфах, применимы и в рассматриваемом случае. Надо только модуль Юнга E заменить *модулем одностороннего растяжения* E'. В результате для скорости распространения продольных возмущений в неограниченной среде получится выражение

$$c_{\parallel} = \sqrt{\frac{E'}{\rho}}, \tag{83.1}$$

или в силу соотношений (77.9) и (78.5)

$$c_{\parallel} = \sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{K+{}^4\!/_3\,G}{\rho}}. \tag{83.2}$$

2. В неограниченной твердой среде наряду с продольными могут распространяться также *поперечные возмущения*. Так называются возмущения, в которых частицы среды смещаются *перпендикулярно* к направлению распространения возмущения. Скорость распространения поперечных возмущений может быть найдена совершенно так же, как и соответствующая скорость для продольных возмущений. Для этого в среде мысленно вырежем произвольный «стержень», ось которого параллельна направлению распространения возмущения, т. е. перпендикулярна к направлениям смещения частиц (рис. 226). Если к основанию такого «стержня» в начальный момент времени приложить постоянное касательное напряжение τ, то в стержне возникнет *деформация сдвига*, распространяющаяся со скоростью, которую мы обозначим $c_{\perp}$. Рассуждая так же, как и в § 81, найдем, что касательное напряжение τ связано с $c_{\perp}$ и скоростью частиц стержня v соотношением

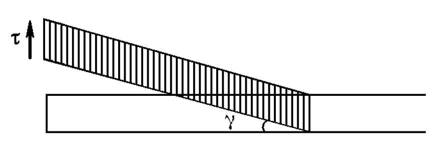


Рис. 226

$$\tau = \rho c_{\perp} v. \tag{83.3}$$

Здесь $\tau = G\gamma$, где γ — угол сдвига. Последний легко найти из следующих соображений. За время t свободный конец стержня перемещается на расстояние vt, в то время как само возмущение проходит путь $c_{\perp}t$. Поскольку $v \ll c_{\perp}$, отсюда следует

$$\gamma = \frac{v}{c_{\perp}}. \tag{83.4}$$

Из этих соотношений легко получить

$$c_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \tag{83.5}$$

3. Поперечные возмущения, если они малы, подчиняются принципу суперпозиции. Поэтому в поперечном возмущении, распространяющемся в определенном направлении, плотности кинетической и потенциальной энергий одинаковы. Вопрос о направлении распро-

странения поперечного возмущения решается с помощью энергетических соображений совершенно так же, как и для продольных возмущений.

4. Так как $K > 0$, то из формул (83.2) и (83.5) следует

$$c_{\parallel} > c_{\perp}. \tag{83.6}$$

Поэтому если в неограниченной среде возникло какое-либо возмущение, то, вообще говоря, оно разделится на продольное и поперечное, причем продольное возмущение придет в точку наблюдения быстрее поперечного. Необходимость такого разделения непосредственно следует из принципа суперпозиции малых возмущений, согласно которому продольное и поперечное возмущения должны распространяться независимо *друг от друга.*

Вообще, скорости продольных и поперечных возмущений в неограниченной среде и скорость «продольных» возмущений в стержне связаны соотношением

$$c_{\parallel} > c > c_{\perp}. \tag{83.7}$$

Неравенство $c > c_{\perp}$ непосредственно следует из формул (81.5), (83.5) и (78.4), так как в силу последней формулы $G < E$. Неравенство же $c_{\parallel} > c$ может быть получено без всяких вычислений. Действительно, если стержень удлиняется только продольно направленной силой, то происходит также его поперечное сжатие. Для устранения последнего к боковой поверхности стрежня надо приложить нормальные поперечные натяжения. Тогда в стержне будут распространяться только чисто продольные возмущения со скоростью $c_{\parallel}$. Но приложенные боковые натяжения будут уменьшать продольное удлинение. При наличии боковых натяжений стержень становится как бы жестче по отношению к деформации растяжения. Это и ведет к увеличению скорости распространения продольных возмущений.

В качестве примера вычислим скорости распространения упругих возмущений в железе или стали. Из опытов найдено: $E = 21{,}2 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $G = 8{,}2 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\mu = 0{,}29$, $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Используя эти данные, получим

$$c = \sqrt{E/\rho} = 5{,}2 \cdot 10^3 \text{ м/с},$$

$$c_{\parallel} = c\sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}} = 6 \cdot 10^3 \text{ м/с},$$

$$c_{\perp} = \sqrt{G/\rho} = 3{,}4 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

ЗАДАЧИ

1. Показать, что скорость распространения крутильных колебаний вдоль стержня совпадает со скоростью поперечных возмущений $c_{\perp}$.

Решение. Для общности будем считать, что стержень представляет собой цилиндрическую трубку с внутренним радиусом r_1 и наружным радиусом r_2. Пусть к основанию трубки приложены постоянные касательные напряжения, создающие вращающий момент M относительно ее геометрической оси. В трубке возникнет деформация кручения, скорость распространения которой обозначим через c. В возмущенной области вещество будет вращаться с постоянной угловой скоростью ω. Если момент M действовал в течение времени t, то, очевидно,

$$Mt = I\omega,$$

где I — момент инерции возмущенной области. С другой стороны, $M = f\varphi = f\omega t$. Это дает $ft^2 = I$. Подставляя сюда $I = {}^1\!/_2\, \pi\rho l(r_2^4 - r_1^4)$, $t = l/c$ (l — длина возмущенной области) и пользуясь соотношением (79.4), получим

$$\rho c^2 = G.$$

2. Найти выражение для скорости продольных звуковых возмущений, распространяющихся в безграничной двумерной тонкой пластинке (см. задачу к § 77). Показать, что эта скорость меньше скорости продольных возмущений в неограниченной среде и больше скорости распространения «продольных» возмущений в стержне.

Ответ. $c' = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\mu^2)}}$. Неравенство $c' > c$ можно доказать без вычисления совершенно так же, как это было сделано для неравенства $c_{\parallel} > c$.

§ 84. СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В НАТЯНУТОМ ШНУРЕ

1. Возможность распространения поперечных возмущений в твердых телах обусловлена присущей им поперечной упругостью, т. е. способностью тел сопротивляться всякому изменению формы, происходящему без изменения объема. Поперечная упругость может быть создана искусственно и в случае таких тел, у которых в естественном состоянии она отсутствует. Примером может служить гибкий шнур или веревка. Если шнур не натянут, то поперечные возмущения в нем распространяться не могут. Если же закрепить один конец шнура, а к другому подвесить груз, перекинув шнур через блок, то в шнуре возникнет постоянное натяжение, обозначаемое в дальнейшем T. Такой шнур обладает *упругостью формы*, и в нем могут распространяться поперечные возмущения. Скорость таких возмущений можно вычислить по формуле (83.5). Но для этого надо решить вопрос, какая величина в натянутом шнуре играет роль модуля сдвига G. Рассмотрим небольшой участок AB натянутого и изо-

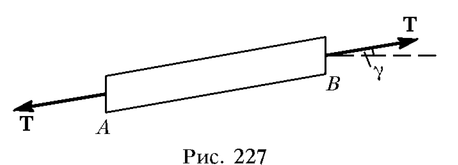


Рис. 227

гнутого шнура (рис. 227). Будем предполагать, что деформации натянутого шнура, связанные с поперечными смещениями его частиц, малы. Тогда можно пренебречь изменениями натяжения T, обусловленными изгибом шнура при таких малых деформациях. В этом приближении натяжения T, действующие на концы участка AB вдоль его оси, одни и те же. Их составляющие, касательные к основаниям участка AB, равны $T\sin\gamma \approx T\gamma$. Поэтому на основаниях рассматриваемого участка будут действовать касательные напряжения $\tau = (T/S)\gamma$, где S — площадь поперечного сечения шнура. Деформацию участка AB можно рассматривать как сдвиг под действием таких касательных напряжений. Сравнивая поэтому предыдущее выражение с формулой $\tau = G\gamma$, находим, что роль модуля сдвига играет величина $G = T/S$. Подставим это выражение в формулу (83.5) и введем обозначение $\delta = \rho S$. Тогда для скорости распространения поперечных возмущений в шнуре получим

$$c = \sqrt{\frac{T}{\delta}}. \qquad (84.1)$$

Величина δ равна массе, приходящейся на единицу длины шнура. Она называется *линейной плотностью* шнура.

2. Если возмущение в шнуре распространяется в одном направлении, то в таком возмущении плотности кинетической и потенциальной энергий в любой момент времени, конечно, будут одинаковы. Направление распространения возмущения можно определить из энергетических соображений. Для этого помимо формы шнура в рассматриваемый момент времени надо еще задать скорость каждой его точки. Так, например, возмущение, представленное на рис. 228, распространяется вправо. Вертикальными стрелками обозначены скорости частиц шнура в рассматриваемый момент времени.

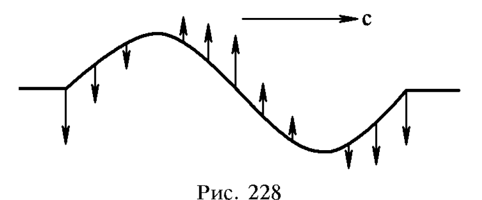


Рис. 228

Если мысленно провести в шнуре какое-либо поперечное сечение, то угол между силой натяжения, действующей на правую часть шнура, и ее скоростью в рассматриваемом сечении будет острым. Напротив, сила натяжения, действующая на левую часть шнура, составляет с соответствующей скоростью тупой угол. Это значит, что над правой частью шнура сила натяжения совершает положительную, а над левой — отрицательную работу. Поэтому-то возмущение и распространяется вправо. Если изменить на противоположные направления скоростей всех частиц, то возмущение пойдет влево.

3. Формулу (84.1) можно получить также следующим, очень поучительным способом. Пусть в шнуре возбуждено поперечное возмущение, распространяющееся, например, вправо (рис. 228) со скоростью c. Рассмотрим явление в системе отсчета, равномерно движущейся вправо со скоростью c. В этой системе отсчета возмущение будет стоять на месте, а весь шнур — двигаться влево со скоростью c.

В возмущенной области на это движение будут накладываться малые поперечные колебания частиц шнура. Ось шнура является траекторией движущихся частиц, находящихся на этой оси. Если на шнур надеть надлежащим образом изогнутую цилиндрическую трубку, неподвижную в рассматриваемой движущейся системе отсчета, то наличие такой трубки никак не отразится на движении шнура. Шнур будет просто протягиваться через трубку, нигде не касаясь ее стенок. Для того чтобы это имело место, необходимо тянуть шнур с вполне определенной скоростью c. При малых возмущениях скорости поперечных движений частиц шнура v малы по сравнению с c. В выражении для полной скорости частиц $\sqrt{c^2+v^2}$ квадратом малой величины v можно пренебречь. В этом приближении полная скорость частиц считается одной и той же на протяжении всей его длины и равной c. Однако в области трубки, где шнур изогнут, его частицы движутся ускоренно. Их ускорения направлены нормально к траектории и определяются выражением $a = c^2/R$. Для создания таких ускорений нужна сила, действующая нормально к траектории. Она возникает из-за изгиба шнура. Найдем ее значение. Выделим мысленно бесконечно малый элемент изогнутого шнура AB, длину которого обозначим через s (рис. 229). Его можно рассматривать как бесконечно малую дугу окружности радиуса R. На концы этого элемента действуют продольные натяжения T_1 и T_2. Их абсолютные величины в пределах принятой точности расчета одинаковы ($T_1 = T_2 = T$). Но направления немного отличаются друг от друга. Благодаря этому и появляется результирующая сила, направленная нормально к элементу AB. Она равна

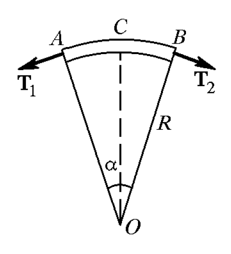


Рис. 229

$$F = 2T\sin\frac{\alpha}{2} \approx T\alpha = T\frac{s}{R}.$$

Приравнивая эту силу массе элемента AB, умноженное на его ускорение, получим

$$T\frac{s}{R} = s\delta\frac{c^2}{R},$$

откуда снова получается формула (84.1).

§ 85. СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКА В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

1. Жидкости и газы обладают только *объемной упругостью*, но не упругостью формы. Поэтому в них могут распространяться только продольные возмущения, но не могут распространяться возмущения поперечные. Скорость распространения продольных возмущений в жидкой или газообразной среде можно вычислить по формуле

(81.5). Но для этого надо решить, чтó в этом случае играет роль модуля Юнга E. Вообразим, что жидкая или газообразная среда заключена в гладкую прямолинейную трубу постоянного поперечного сечения. Трением между средой и стенками трубы пренебрежем. Стенки трубы будут препятствовать поперечному движению среды, нисколько не мешая продольному движению. Газ или жидкость в такой трубе можно рассматривать как стержень, вдоль которого распространяются продольные возмущения. Отличие от твердых тел состоит в том, что газы могут существовать *только под давлением*. При отсутствии такового всякий газ неограниченно расширился бы. Поэтому необходимо предполагать, что в невозмущенном состоянии давление внутри газа отлично от нуля. Обозначим его через P_0. Так же будем поступать в случае жидкости. Если давление внутри газа получит приращение и сделается равным $P = P_0 + \Delta P$, то изменится и объем рассматриваемой массы газа.

Определим, как изменение объема газа ΔV связано с приращением его давления ΔP. При этом мы будем предполагать, что ΔP малó по сравнению с P_0: $\Delta P \ll P_0$. Если газ заключен в трубе, один из концов которой закрыт неподвижным поршнем, то при изменении давления на поршень на величину ΔP длина газового столба изменится на Δl. Величина $-(\Delta l/l)$ есть относительное сжатие столба газа. При малых сжатиях

$$\Delta P = -A\frac{\Delta l}{l},$$

где A — постоянная. С другой стороны, формулу (75.5) для стержня можно переписать в виде $\Delta P = -E\frac{\Delta(\Delta l)}{l}$, где $\Delta(\Delta l)$ — приращение длины стержня при изменении давления на ΔP. По смыслу оно совпадает с тем, что в случае газового столба мы обозначили через Δl. Поэтому, меняя обозначение, модуль Юнга можно определить также с помощью формулы

$$\Delta P = -E\frac{\Delta l}{l}. \tag{85.1}$$

Из нее видно, что в случае газового столба $A = E$. Длина столба газа l пропорциональна его объему V, и предыдущую формулу можно записать в виде

$$\Delta P = -E\frac{\Delta V}{V}. \tag{85.2}$$

В этом виде формула сохраняет смысл для любой формы сосуда, в котором заключен газ, тогда как формула (85.1) относится только к газам в сосудах цилиндрической формы.

Будем считать, что давление газа зависит только от его объема V. Тогда для малых изменений объема

$$\Delta P = \frac{dP}{dV}\Delta V$$

или

$$\Delta P = \left(-V\frac{dP}{dV}\right)\left(-\frac{\Delta V}{V}\right).$$

Сравнивая эту формулу с предыдущей, видим, что в газах (и жидкостях) роль модуля Юнга играет величина

$$E = -V\frac{dP}{dV}. \tag{85.3}$$

Вместо объема тела V удобнее ввести плотность ρ. Величина $V\rho$ есть масса тела, остающаяся постоянной при всех изменениях. Из соотношения $V\rho = \mathrm{const}$ путем дифференцирования находим

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho},$$

а потому

$$E = \rho\frac{dP}{d\rho}. \tag{85.4}$$

Подставляя это выражение в формулу (81.5), получаем для скорости звука в газах и жидкостях

$$c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}. \tag{85.5}$$

2. Применим формулу (85.5) к вычислению скорости звука в газах. Впервые это было сделано Ньютоном. Он принял, что изменения давления и плотности газа в звуковой волне подчиняются *закону Бойля—Мариотта* (Роберт Бойль (1627—1691) — знаменитый английский физик и химик, Эдм Мариотт (1620—1684) — французский физик): $P = A\rho$, где $A = \mathrm{const}$. Отсюда $dP/d\rho = A = P/\rho$. В результате получается *формула Ньютона*

$$c_{\text{Н}} = \sqrt{\frac{P}{\rho}}. \tag{85.6}$$

Здесь скорость звука обозначена через $c_{\text{Н}}$, чтобы подчеркнуть, что речь идет о скорости звука, вычисляемой по формуле Ньютона.

Преобразуем формулу (85.6) к другому виду, более удобному в численных расчетах. Как известно, объем, давление и абсолютная температура T идеальных газов связаны соотношением

$$PV = RT, \tag{85.7}$$

где R — постоянная. Если газ взят в количестве одного моля, то постоянная R будет иметь одно и то же числовое значение для всех газов. Она называется *универсальной газовой постоянной* и равна $R = 8{,}31\cdot10^7$ эрг$\cdot K^{-1}\cdot$моль$^{-1}$. Напомним, что *молем* называется количество вещества, масса которого в граммах численно равна молекулярной массе этого вещества μ. Отсюда следует, что плотность ρ связана с объемом V моля идеального газа соотношением $\mu = \rho V$. В результате получаем

$$P = \frac{RT}{\mu}\rho, \tag{85.8}$$

$$c_{\text{Н}} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}. \tag{85.9}$$

Вычислим по этой формуле скорость звука в воздухе при 0 °С ($T = 273$ К). Воздух есть смесь различных газов, основными частями которой являются азот ($\mu = 28$) и кислород ($\mu = 32$). Среднюю молекулярную массу такой смеси примем равным $\mu = 28{,}8$. Подставляя в формулу (85.9) числовые значения, получим $c_{\text{Н}} = 280$ м/с. Опыт дает $c = 330$ м/с. Налицо значительное расхождение между теорией и опытом. Причина этого расхождения долгое время оставалась непонятной. Она была установлена Лапласом (1749—1827) лишь в начале XIX века. Закон Бойля—Мариотта относится к таким изменениям давления и объема газа, при которых его *температура остается постоянной*. Между тем звуковая волна состоит из следующих друг за другом *сжатий* и *разрежений* газа. Над сжатыми областями производится внешняя работа, которая идет на *повышение их температуры*. Разреженные области сами совершают внешнюю работу и благодаря этому охлаждаются. Так как сжатия и разрежения совершаются очень быстро, то температуры между ними не успевают выравниваться: сжатые области всегда теплее разреженных. Наличие этой разности температур повышает перепад давления между сжатиями и разрежениями и ведет к увеличению скорости звука в газах. Это обстоятельство и не было учтено формулой Ньютона. Ньютон при вычислении скорости звука подставил в формулу (81.5) *изотермический модуль* упругости E, а надо было пользоваться *адиабатическим модулем* (см. § 79). Количественное исследование вопроса будет дано в томе II нашего курса.

ГЛАВА XI

МЕТОДЫ ПОДОБИЯ И РАЗМЕРНОСТИ

---

§ 86. РАЗМЕРНОСТЬ И СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ

1. До сих пор мы ничего не говорили о *размерности физических величин*. Мы пользовались этим понятием, предполагая, что читатель имеет некоторое представление об относящихся сюда вопросах. В задачах, которые мы рассматривали, этого было достаточно. *Метод размерности* весьма эффективен в более сложных вопросах, например в гидродинамике, где полная теоретическая трактовка затруднительна. С привлечением добавочных соображений весьма общего характера или опытных данных он приводит, и притом быстро и просто, к важным результатам, дающим предварительную, хотя и неполную, ориентировку в рассматриваемом круге явлений. Поэтому необходимо познакомиться с этим методом.

Понятие размерности возникает в связи с построением систем единиц. В принципе можно было бы (так и поступали раньше) для каждой физической величины установить свою единицу, никак не связанную с единицами других величин. Но тогда в уравнения, выражающие физические законы, вошло бы множество числовых коэффициентов. Их значения не укладывались бы ни в какую простую и легко запоминаемую схему, а определялись бы случайным выбором единиц. Такое множество числовых коэффициентов весьма сильно усложняло бы формулы. Запоминание их было бы нелегкой и в сущности бесполезной нагрузкой для памяти. Во избежание этого в физике уже давно отказались от независимого выбора единиц для всех физических величин, а стали применять системы единиц, построенные по определенному принципу.

2. Принцип этот заключается в следующем. Некоторые физические величины условно принимаются за *основные* или *первичные*, т. е. такие, для которых единицы устанавливаются произвольно и независимо. Так, например, в механике применяется система LMT, в которой за основные величины принимаются длина (L), масса (M) и время (T). *Выбор основных величин и их число произвольны.* Это — вопрос соглашения. Например, в технической механике до недавнего времени применялась система LFT. Основными величинами в ней были длина (L), сила (F) и время (T). В так называемой *Международной системе единиц* (сокращенно СИ) за основные приняты семь величин: длина, масса, время, температура, сила электрического тока, сила света и количества вещества. Величины, не являющиеся основными, называются *производными* или *вторичными*. Для них едини-

цы устанавливаются из требования, чтобы числовые коэффициенты, входящие в физические законы или формулы, служащие определением рассматриваемых величин, принимали определенные, заранее выбранные значения. Например, скорость равномерно движущейся материальной точки есть величина особого рода, пропорциональная пройденному пути s и обратно пропорциональная времени t, затрачиваемому на прохождение этого пути. При независимом выборе единиц для s, t и v следует писать $v = Cs/t$, где C — числовой коэффициент, значение которого определяется выбором единиц. Если фиксировать значение этого коэффициента, то единицы для s, t и v перестанут быть независимыми. Для простоты полагают $C = 1$ и пишут $v = s/t$. Если за основные величины принять путь s и время t, то скорость v становится величиной производной. За единицу скорости мы обязаны принять скорость такого равномерного движения, когда за единицу времени проходится единица длины. Говорят, что скорость имеет размерность длины, деленной на время. Символически это записывается так: $[v] = \mathrm{LT}^{-1}$. Аналогично пока единицы выбираются независимо для ускорения a можно написать $a = C\,\dfrac{dv}{dt}$. Полагая $C = 1$, мы делаем ускорение a величиной производной, имеющей размерность скорости, деленной на время, или размерность длины, деленной на квадрат времени. После этого за единицу ускорения мы обязаны принять ускорение такого равномерно ускоренного движения, когда за каждую единицу времени скорость возрастает на единицу. В произвольных единицах второй закон Ньютона пишется в виде $F = Cma$. Фиксируя числовой коэффициент C, мы делаем силу F величиной производной и устанавливаем для нее единицу. Например, при $C = 1$ получаем $F = ma$. После этого сила получает размерность массы, умноженной на ускорение: $[F] = [ma] = \mathrm{MLT}^{-2}$. Формула $F = ma$ обязывает нас за единицу силы принять такую силу, которая массе в одну единицу сообщает ускорение, равное единице.

3. Размерность физической величины еще не определяет, как велика ее единица. Она устанавливает только связь между единицами различных физических величин. *Размерность дает правило, позволяющее определить, как меняется единица производной физической величины при изменении масштабов основных величин.* Это правило, выраженное в виде математической формулы, называется *формулой размерности*. Допустим, например, что за единицу длины принят километр, а за единицу времени — минута. Единицей ускорения в такой системе единиц будет км/мин^2. Спрашивается, как изменится единица ускорения, если за единицу длины принять сантиметр, а за единицу времени — секунду. Формула размерности позволяет быстро ответить на этот вопрос. Мы пишем прежде всего 1 км $= 10^5$ см, 1 мин $= 60$ с и далее

$$1\ \text{км/мин}^2 = \frac{10^5\ \text{см}}{60^2\ \text{с}^2} = \frac{1000}{36}\ \text{см/с}^2.$$

Отсюда видно, что единица ускорения 1 км/мин^2 крупнее единицы 1 см/с^2 в 1000/36 раз. В соответствии с этим числовое значение ускорения, измеренное в км/мин^2, окажется меньше числового значения того же ускорения в 1000/36 раз, если его измерить в см/с^2.

§ 87. ФОРМУЛА РАЗМЕРНОСТИ

1. Термин «система единиц» употребляется в двух смыслах. В широком смысле система единиц характеризуется выбором основных величин и формулами, определяющими производные величины через основные, причем *масштабы основных величин не фиксируются*. Примером может служить система LMT, в которой основными величинами являются длина, масса и время. Другим примером является применявшаяся ранее электротехническая система LMTI, в которой за основные величины принимаются длина, масса, время и сила электрического тока I. Система единиц в узком смысле дополнительно характеризуется также *определенным выбором масштабов основных единиц*. Примерами могут служить системы СГС и МКСА. Первая есть частный случай системы LMT, когда за единицы длины, массы и времени приняты сантиметр, грамм и секунда. Вторая является частным случаем электротехнической системы LMTI. В ней единицами длины, массы, времени и силы тока являются соответственно метр, килограмм, секунда и ампер. В теории размерности термин «система единиц» понимается в широком смысле.

Понятие размерности возникает в связи с требованием, чтобы в одной и той же системе единиц количественные соотношения между различными физическими величинами выражались *одними и теми же* формулами, независимо от того, как велики единицы основных физических величин. Этим требованием определяется общий вид «*формул размерности*» физических величин. Допустим, что имеется несколько физических величин, связанных между собой. Для простоты можно ограничиться случаем двух величин, одна из которых принимается за основную, а другая — за производную. Числовые значения их x и y связаны уравнением $y = f(x)$. Определим общий вид функции $f(x)$. Если единицу основной величины x уменьшить в α раз, то числовое значение этой величины увеличивается в такое число раз и сделается равным $X = \alpha x$. При этом единица производной величины y уменьшится, а ее числовое значение увеличится в β раз и станет равным $Y = \beta y$. Мы требуем, чтобы числовые значения X и Y были связаны тем же уравнением, что и числа x и y, т. е. $Y = f(X)$ или $\beta y = f(\alpha x)$. Этому условию можно удовлетворить при любых значениях α, если надлежащим образом подобрать β. Задача сводится к нахождению β как функции аргумента α. На этот вопрос и отвечает «формула размерности».

Прежде чем его решать, изменим постановку вопроса. Пусть две физические величины связаны соотношением $y = f(x)$. Будем менять сами физические величины, оставляя их единицы неизменными. Допустим, что величины x и y увеличились соответственно в α и β раз и сделались равными $X = \alpha x$ и $Y = \beta y$. Спрашивается, какому условию должны удовлетворять числа α и β, чтобы связь между новыми значениями физических величин X и Y была та же, что и между старыми значениями x и y, т. е. $Y = f(X)$. На этот вопрос отвечает *теория подобия*. Вопрос опять сводится к исследованию уравнения $\beta y = f(\alpha x)$. Мы видим, что теории размерности и подобия отличаются друг от друга только формой постановки вопроса. По существу они не отличаются одна от другой. Теория подобия позволяет исследовать количественные соотношения между различными параметрами реальных физических систем на их уменьшенных или увеличенных моделях. Так поступают, например, в авиационной технике, помещая в аэродинамические трубы уменьшенные копии реальных летательных аппаратов. Изучив поведение моделей реальных систем, можно с помощью теории подобия или размерности сделать выводы о поведении самих систем в реальных условиях. Теория размерности сводит вопрос о подобии физических явлений в указанном выше смысле к *анализу размерностей* физических величин.

2. После этих предварительных замечаний установим общий вид формулы размерности. Как разъяснено выше, мы должны требовать, чтобы из уравнения $y = f(x)$ вытекало уравнение $Y = f(X)$, где $X = \alpha x$, $Y = \beta y$. Аргумент x и параметр α могут независимо принимать любые значения. Задача состоит в том, чтобы по заданному значению α найти значение β. Путем дифференцирования при фиксированных α и β находим

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), \quad \frac{dY}{dX} = f'(X).$$

Вторую из этих формул запишем в виде

$$\frac{\beta}{\alpha}\frac{dy}{dx} = f'(X).$$

Поделив ее почленно на первую формулу и заменив α и β выражениями $\alpha = \frac{X}{x}$, $\beta = \frac{Y}{y} = \frac{f(X)}{f(x)}$, получим

$$x\frac{f'(x)}{f(x)} = X\frac{f'(X)}{f(X)}.$$

Слева стоит функция только x, справа — та же функция только X. Обозначив ее через F, имеем $F(x) = F(X)$. Но в силу произвольности и параметра α аргументы x и $X = \alpha x$ могут независимо принимать любые значения. Поэтому равенство $F(x) = F(X)$ должно выполняться тождественно, каковы бы ни были x и X. Это значит, что $F(x)$ есть постоянная. Обозначив эту постоянную че-

рез m, получим дифференциальное уравнение

$$x\frac{f'(x)}{f(x)} = m,$$

или

$$\frac{df(x)}{f(x)} = m\frac{dx}{x}.$$

Отсюда находим

$$f(x) = f_0 x^m,$$

где f_0 — постоянная интегрирования. Таким образом, $y = f_0 x^m$. Аналогично $Y = f_0 X^m$ или $\beta y = f_0(\alpha x)^m$. Исключая почленным делением x и y, находим

$$\beta = \alpha^m. \qquad (87.1)$$

Это и есть формула размерности. Мы видим, что требование независимости функциональной связи между x и y от выбора масштаба единицы основной физической величины x может быть удовлетворено только тогда, когда размерность выражается формулой *степенного вида.*

Приведенные рассуждения без труда обобщаются на случай, когда рассматриваемая физическая величина зависит от нескольких основных физических величин. Для этого в рассуждениях надо только фиксировать единицы всех основных физических величин, за исключением одной из них. Таким путем нетрудно показать, что формула размерности должна быть *степенного вида относительно всех основных физических величин.* Допустим, например, что число основных величин выбрано равным трем, и за них приняты длина (L), масса (M) и время (T). Тогда размерность любой физической величины y представится формулой

$$[y] = \mathrm{L}^p\mathrm{M}^q\mathrm{T}^r, \qquad (87.2)$$

где p, q, r — постоянные числа. Формула (87.2) означает, что если единицы длины, массы и времени уменьшить соответственно в α, β и γ раз, то единица производной величины y уменьшится в $\alpha^p\beta^q\gamma^r$ раз, а следовательно, ее числовое значение увеличится в такое же число раз.

3. Если посмотреть на размерности физических величин, фактически встречающих в физике, то нетрудно заметить, что во всех случаях числа p, q, r оказываются рациональными. Это не обязательно с точки зрения теории размерности, а является результатом соответствующих определений физических величин. Так, например, скорость вводится по формуле $v = s/t$ и поэтому имеет размерность длины, деленной на время. Для нее $p = 1$, $q = 0$, $r = -1$. Но в принципе теория размерности допускает введение величин с иррациональными значе-

ниями p, q, r, например величины $(1/t)s^{\sqrt{2}}$. Для такой величины было бы $p=\sqrt{2}$. Подобные величины не вводятся в физику не по каким-то принципиальным соображениям, а просто потому, что в них нет надобности. Теория размерности здесь ни при чем.

4. Часто размерность физической величины отождествляют с ее единицей в соответствующей системе единиц. Так, например, говорят, что скорость имеет размерность см/с, а сила — г·см/с^2. Хотя это и нелогично, но особой беды в этом нет. Всегда, если есть необходимость, единицы такого типа позволяют перейти к формулам размерности, в которых масштабы единиц основных величин не фиксированы.

5. В зависимости от выбора основных величин, а также от вида формул, связывающих эти величины с производными, одна и та же физическая величина получает в разных системах единиц не только различные числовые значения, но и различные размерности. Так, например, в системе LMT размерность силы устанавливается из второго закона Ньютона $f = Cma$, в котором коэффициент C условно считается безразмерным и полагается равным единице. Тогда сила получает размерность $\mathrm{LMT^{-2}}$. Но так поступать не обязательно. Можно коэффициенту C приписать произвольную размерность и придать произвольное числовое значение. Тогда получится новая система единиц, в которой сила будет иметь уже другую размерность. Например (и так иногда делают), в уравнении $f = G\dfrac{m_1m_2}{r^2}$, выражающем закон всемирного тяготения Ньютона, приравнивают гравитационную постоянную G единице и считают эту величину безразмерной. Тогда сила f получает размерность $\mathrm{M^2L^{-2}}$, а во втором законе Ньютона $f = Cma$ появляется коэффициент C с размерностью $\mathrm{ML^{-3}T^2}$.

Разные физические величины могут иметь одинаковые размерности даже в одной и той же системе единиц. Примерами могут служить в механике работа и кинетическая энергия или работа и момент сил (система MLT, а в учении об электричестве и магнетизме — емкость и индуктивность, имеющие в так называемой гауссовой системе единиц размерность длины. В таких случаях и единицам этих физических величин часто дают одинаковые наименования, хотя по существу это совершенно разные вещи. Одинаковая размерность двух различных физических величин в какой-либо системе единиц говорит не об их тождестве, а только о том, что в рассматриваемой системе масштабы единиц этих величин меняются одинаково при изменении масштабов единиц основных физических величин. В других системах единиц размерности тех же физических величин могут и не совпадать.

Несовпадение размерностей одной и той же величины в разных системах единиц иногда истолковывают как некоторое логическое противоречие, требующее объяснения. Оно подало повод к постановке вопроса об «истинной» размерности физических величин. На основании изложенного нет никакой необходимости доказывать, что физи-

ческой величине самой по себе не свойственна никакая размерность. Последняя появляется лишь после установлений той или иной системы единиц, а вопрос об «истинной» размерности физических величин, по меткому замечанию Макса Планка, имеет не более смысла, чем вопрос об «истинном» названии какого-либо предмета.

6. *Безразмерными комбинациями физических величин* называются такие комбинации, которые в рассматриваемой системе единиц имеют нулевую размерность. Их числовые значения не меняются при изменении масштабов единиц основных величин. Легко привести примеры таких комбинаций. Если величина y имеет размерность величины x в степени α, то очевидно, y/x^α будет безразмерной комбинацией, составленной из x и y.

Общий метод нахождения безразмерных комбинаций можно разъяснить на примере системы единиц, построенной на основе трех величин: длины (L), массы (M) и времени (T). Пусть n величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в этой системе имеют размерности соответственно

$$\mathrm{L}^{p_1}\mathrm{M}^{q_1}\mathrm{T}^{r_1},\ \mathrm{L}^{p_2}\mathrm{M}^{q_2}\mathrm{T}^{r_2},\ \ldots,\ \mathrm{L}^{p_n}\mathrm{M}^{q_n}\mathrm{T}^{r_n}.$$

Требуется составить из них безразмерную комбинацию. На основании теоремы, доказанной в п. 2, искомая комбинация должны иметь вид $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$. Ее размерность будет

$$(\mathrm{L}^{p_1}\mathrm{M}^{q_1}\mathrm{T}^{r_1})^{\alpha_1}(\mathrm{L}^{p_2}\mathrm{M}^{q_2}\mathrm{T}^{r_2})^{\alpha_2}\ldots(\mathrm{L}^{p_n}\mathrm{M}^{q_n}\mathrm{T}^{r_n})^{\alpha_n},$$

т. е. $\mathrm{L}^p\mathrm{M}^q\mathrm{T}^r$, где

$$\begin{aligned} p &= p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \ldots + p_n\alpha_n, \\ q &= q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 + \ldots + q_n\alpha_n, \\ r &= r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \ldots + r_n\alpha_n. \end{aligned} \tag{87.3}$$

Для того чтобы комбинация была безразмерной, необходимо и достаточно, чтобы $p = q = r = 0$. Это приводит к системе трех однородных уравнений

$$\begin{aligned} p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \ldots + p_n\alpha_n &= 0, \\ q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 + \ldots + q_n\alpha_n &= 0, \\ r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \ldots + r_n\alpha_n &= 0 \end{aligned} \tag{87.4}$$

с неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Одно из этих неизвестных всегда можно выбрать произвольно, так как безразмерная комбинация остается безразмерной, если ее возвести в произвольную степень. Фиксируем, например, α_1. Тогда получится три уравнения для определения $n-1$ неизвестных, за которые удобно принять отношения $\alpha_2/\alpha_1, \alpha_3/\alpha_1, \ldots, \alpha_n/\alpha_1$. Если эти уравнения независимы, то $(n-1)-3 = n-4$ отношений

можно выбрать произвольно. Три остальных определятся из уравнений (87.4). В результате найдутся $n-4$ независимых безразмерных комбинаций. Всякая функция этих безразмерных комбинаций будет также безразмерной комбинацией. Если же три уравнения (87.4) не независимы, то число независимых безразмерных комбинаций увеличится. Например, если в системе (87.4) независимы только два уравнения, то независимых безразмерных комбинаций будет $n-3$ и т. д.

§ 88. ПРАВИЛО РАЗМЕРНОСТИ

1. Все применения теории размерностей основаны на двух теоремах. Одна из них выражается формулой (87.2), устанавливающей общий вид размерности физических величин. Другая теорема утверждает, что всякое количественное соотношение между различными физическими величинами может быть выражено в виде функциональной связи между *безразмерными комбинациями этих величин.*

Для доказательства предположим, что между величинами $a, b, c, x_1, x_2, x_3, \ldots$ имеется функциональная связь $f(a, b, c, x_1, x_2, x_3, \ldots) = 0$. Примем величины a, b, c за основные, а остальные величины $x_1, x_2, x_3, \ldots$ — за производные. (Мы взяли число основных величин равным трем, но это несущественно.) Пусть размерности производных величин будут $[x_1] = [a^{p_1}b^{q_1}c^{r_1}]$, $[x_2] = [a^{p_2}b^{q_2}c^{r_2}]$, ... Уменьшим единицы основных величин в α, β, γ раз соответственно. Тогда они примут значения $\alpha a, \beta b, \gamma c$, а производные величины — значения $\alpha^{p_1}\beta^{q_1}\gamma^{r_1}x_1$, $\alpha^{p_2}\beta^{q_2}\gamma^{r_2}x_2, \ldots$ Рассматриваемая функциональная связь запишется в виде

$$f(\alpha a, \beta b, \gamma c, \alpha^{p_1}\beta^{q_1}\gamma^{r_1}x_1, \alpha^{p_2}\beta^{q_2}\gamma^{r_2}x_2, \ldots) = 0,$$

причем α, β, γ можно выбирать произвольно. Выберем их так, чтобы $\alpha a = \beta b = \gamma c = 1$. Это означает переход от жестко фиксированных единиц к меняющейся системе единиц, в которой числовые значения основных физических величин в рассматриваемом вопросе принимаются равными единице. При таком выборе

$$f\left(1, 1, 1, \frac{x_1}{a^{p_1}b^{q_1}c^{r_1}}, \frac{x_2}{a^{p_2}b^{q_2}c^{r_2}}, \ldots\right) = 0.$$

Но это уравнение в качестве переменных аргументов содержит только безразмерные комбинации физических величин. Его можно записать в виде

$$F\left(\frac{x_1}{a^{p_1}b^{q_1}c^{r_1}}, \frac{x_2}{a^{p_2}b^{q_2}c^{r_2}}, \ldots\right) = 0, \tag{88.1}$$

где F — новая функция. Теорема доказана.

2. Доказанной теореме можно придать другую форму. Разрешим уравнение (88.1) относительно одного из аргументов, например первого, и результат умножим на знаменатель этого аргумента. Получим

$$x_1 = a^{p_1} b^{q_1} c^{r_1} \varphi\left(\frac{x_2}{a^{p_2} b^{q_2} c^{r_2}}, \ldots\right), \tag{88.2}$$

где φ — какая-то функция безразмерных аргументов. Это означает, что во всяком физическом законе типа $A = B$ размерности обеих частей равенства должны быть *одинаковы*. В таком виде доказанная теорема получила название *правила размерностей*. В равенство типа $A = B$ могут входить в качестве множителей либо постоянные коэффициенты, либо безразмерные комбинации физических величин. Над размерными величинами правило размерности допускает выполнение только степенных математических операций. Все прочие математические операции ($\sin x$, e^x, $\ln x$ и т. п.) могут выполняться только над безразмерными величинами. Правило размерности очень полезно для проверки формул. Если вычисления проводятся в какой-то одной системе единиц, то размерности обеих частей всех полученных равенств должны быть одинаковы. Несовпадение размерностей указывает на наличие ошибки, допущенной при вычислениях.

Из доказанного отнюдь не следует, что невозможны физические законы, выражающиеся в виде равенств между величинами разной размерности. Равенства подобного рода встречаются в физике сплошь и рядом. Например, скорость свободного падения можно выразить приближенной формулой $v = 10t$ (если начальная скорость равна нулю), а гидростатическое давление слоя воды — формулой $P = 1/10h$. Однако подобные формулы справедливы только тогда, когда *точно фиксированы* единицы входящих в них физических величин. В приведенных примерах предполагается, что время t измеряется в секундах, скорость v — в метрах в секунду, толщина слоя воды h — в метрах, давление P — в атмосферах. Изменения масштабов единиц такие формулы не допускают. Но в таком случае нет смысла говорить и о размерности входящих в них физических величин.

3. Теория размерности сама по себе, т. е. без использования добавочных данных, не может привести ни к каким конкретным физическим выводам, поскольку в ее основах не заложены никакие физические законы. Для того чтобы извлечь из этой теории конкретные выводы, нужно установить, *между какими физическими величинами* существуют количественные связи. На этот счет теория размерности не может дать никаких указаний. Это можно сделать только либо опытным путем, либо с помощью каких-то физических законов. Приводимые ниже примеры могут служить иллюстрацией высказанных утверждений.

ЗАДАЧИ

1. Составить все независимые безразмерные комбинации из величин l, m, t, v, a, ρ, E, φ (l — длина, m — масса, t — время, v — скорость, a — ускорение, ρ — плотность вещества, E — модуль Юнга, φ — угол, измеренный в радианах).

Решение. Проще всего поступить следующим образом. Из перечисленных величин угол φ уже является безразмерной величиной. Далее замечаем, что vt имеет размерность длины, at — размерность скорости, ρl^3 — размерность массы, ρv^2 — размерность давления, а следовательно, и размерность модуля Юнга. Поэтому сразу можно написать следующие безразмерные комбинации:

$$\frac{vt}{l},\ \frac{at}{v},\ \frac{\rho l^3}{m},\ \frac{\rho v^2}{E},\ \varphi. \tag{88.3}$$

Этот способ обладает, однако, тем недостатком, что он не дает ответа на вопрос, исчерпываются ли рядом (88.3) все независимые безразмерные комбинации рассматриваемых физических величин. Общий метод, изложенный в § 87, п. 6, свободен от этого недостатка. Поэтому мы приведем решение также по этому методу. При отыскании безразмерных комбинаций угол φ, как величину безразмерную, можно не принимать во внимание. Из оставшихся семи величин составим комбинацию вида

$$l^\alpha m^\beta t^\gamma v^\delta a^\lambda \rho^\mu E^\nu.$$

Если выразить размерности v, a, ρ, E через размерности основных величин l, m, t, то эта комбинация перейдет в

$$l^\alpha m^\beta t^\gamma l^\delta t^{-\delta} l^\lambda t^{-2\lambda} m^\mu l^{-3\mu} m^\nu l^{-\nu} t^{-2\nu},$$

т. е. в комбинацию

$$l^{\alpha+\delta+\lambda-3\mu-\nu} m^{\beta+\mu+\nu} t^{\gamma-\delta-2\lambda-2\nu}.$$

Для того чтобы эта комбинация была безразмерной, должно быть

$$\alpha+\delta+\lambda-3\mu-\nu=0,$$
$$\beta+\mu+\nu=0,$$
$$\gamma-\delta-2\lambda-2\nu=0.$$

Из этих трех уравнений три неизвестных параметра можно выразить через оставшиеся четыре. За независимые параметры проще всего принять δ, λ, μ, ν, так как уравнения фактически уже разрешены относительно оставшихся неизвестных α, β, γ:

$$\alpha=-\delta-\lambda+3\mu+\nu,$$
$$\beta=-\mu-\nu,$$
$$\gamma=\delta+2\lambda+2\nu.$$

Параметры δ, λ, μ, ν могут независимо принимать любые значения. Полагая последовательно

1) $\delta=1,\ \lambda=\mu=\nu=0$; 2) $\lambda=1,\ \delta=\mu=\nu=0$;
3) $\mu=1,\ \delta=\lambda=\nu=0$; 4) $\nu=1,\ \delta=\lambda=\mu=0$,

получим

1) $\alpha=-1,\ \beta=0,\ \gamma=1$; 2) $\alpha=-1,\ \beta=0,\ \gamma=2$;
3) $\alpha=3,\ \beta=-1,\ \gamma=0$; 4) $\alpha=1,\ \beta=-1,\ \gamma=2$.

Этим значениям соответствуют следующие безразмерные комбинации:

1) $\frac{vt}{l}$, 2) $\frac{at^2}{l}$, 3) $\frac{\rho l^3}{m}$, 4) $\frac{Elt^2}{m}$.

Присоединив к ним угол φ, получим всего пять независимых безразмерных комбинаций. Все они являются функциями безразмерных комбинаций (88.3). Значит, рядом (88.3) исчерпываются все независимые безразмерные комбинации, которые можно составить из рассматриваемых физических величин.

2. Как зависит от высоты h скорость свободного падения тела, если начальная скорость его равна нулю?

Решение. Ускорение свободного падения g постоянно и не зависит от массы, плотности, упругих свойств тел и пр. Поэтому искомая скорость v может зависеть только от g и h. Из безразмерных комбинаций (88.3) можно составить всего одну независимую безразмерную комбинацию v^2/la или v^2/gh, содержащую только длину, скорость и ускорение. Она получается делением первой безразмерной комбинации ряда (88.3) на вторую. Поэтому должно быть $f\left(\frac{v^2}{gh}\right) = 0$, откуда $v^2/gh = C = \text{const}$, или $v^2 = Cgh$. Числовой коэффициент C из теории размерности найти нельзя.

3. Пользуясь соображениями размерности, найти зависимость периода колебаний T физического маятника от его приведенной длины l, ускорения свободного падения g и угловой амплитуды α.

Ответ. $T = \varphi(\alpha)\sqrt{l/g}$. Вид функции $\varphi(\alpha)$ из теории размерности определить нельзя. Если эту функцию разложить в ряд Тейлора и сохранить в нем только нулевой член (что можно делать в случае малых колебаний), то получится $T = C\sqrt{l/g}$, где C — постоянный числовой коэффициент, значение которого из теории размерности определить также нельзя. То обстоятельство, что $C \neq 0$, также не вытекает из теории размерности, а должно быть установлено особо (например, опытным путем).

4. Пользуясь соображениями размерности, определить зависимость скорости распространения v продольных упругих возмущений в стержне от модуля Юнга E и плотности материала ρ.

Ответ. $v = C\sqrt{E/\rho}$. Числовой коэффициент C из размерных соображений найти нельзя.

5. Две невзаимодействующие материальные точки, находящиеся в центральном силовом поле, описывают геометрически подобные траектории. Сила F, действующая на каждую материальную точку, пропорциональна ее массе и меняется с расстоянием r до силового центра как r^n, где n — постоянная. Как связаны длины l_1 и l_2 геометрически подобных дуг траекторий с временами T_1 и T_2, затрачиваемыми материальными точками на прохождение этих дуг?

Решение. Должна существовать связь между длиной дуги траектории l, временем T, затрачиваемым материальной точкой не прохождение этой дуги, а также ускорением a, направленным к силовому центру. Ускорения можно выбрать в произвольных, но обязательно подобно расположенных точках. Из этих трех величин можно составить единственную независимую безразмерную комбинацию, за которую можно принять aT^2/l. Следовательно, должно быть $aT^2/l = \text{const}$. Для ускорения можно написать $a = Ar^n$, где A — постоянная, одинаковая для обеих материальных точек. В силу геометрического подобия траекторий, по которым дви-

жутся материальные точки, можно также написать $a = Bl^n$, где B — другая постоянная, также одинаковая для обеих точек. В результате получим $T^2l^{n-1} = \text{const}$, а потому $T_1^2l_1^{n-1} = T_2^2l_2^{n-1}$. В частных случаях $n = 1$ и $n = -2$ получаем $T = \text{const}$ и $T^2/l^3 = \text{const}$. Первое соотношение означает, что в случае гармонического осциллятора период колебаний или период обращения вокруг силового центра не зависит от амплитуды или размеров орбиты. Второе соотношение выражает третий закон Кеплера. Однако этот закон доказан здесь не в общем виде, а только для частиц, движущихся по геометрически подобным траекториям.

6. Наряду с гравитационной постоянной $G = 6{,}6726\cdot10^{-8}$ см$^3\cdot$г$^{-1}\cdot$с$^{-2}$ и скоростью света в вакууме $c = 2{,}9972438$ см/с в физике особую роль играют две фундаментальные постоянные: постоянная Планка $h = 6{,}6261741\cdot10^{-27}$ эрг$\cdot$с и постоянная Больцмана $k = 1{,}380662$ эрг/К. Определение последней см. в т. II (§ 62, п. 3). Планк построил естественную систему единиц, в которой эти четыре фундаментальные постоянные полагаются равными единице. Выразить единицы длины, времени, массы и температуры в планковской системе через соответствующие единицы в системе СГС, дополненной единицей температуры — кельвином (К).

Решение. Удобно считать, что обе системы единиц принадлежат к одному и тому же классу, в котором за основные единицы приняты длина, время, масса и температура. Они отличаются одна от другой только различным выбором единиц этих величин. Поэтому любое равенство двух величин одинаковой размерности в одной системе единиц должно быть справедливо и в другой. В качестве таких равенств можно выбрать следующие:

$$l = ct,\ mc^2 = h/t,\ Gm^2/l = mc^2\ (\text{или } Gm/l = c^2),\ kT = mc^2. \qquad (1)$$

Не требуется, чтобы эти равенства выражали какие-то физические законы. Требуется лишь, чтобы: 1) правые и левые части этих равенств имели одинаковые размерности; 2) числовые значения длины l, времени t, массы m и температуры T были подобраны так, чтобы рассматриваемые равенства выполнялись. Первое требование выполняется: в случае первого равенства это очевидно, остальные содержат только члены размерности энергии. В планковской системе единиц $c = h = G = k = 1$. Но тогда из написанных равенств следует $l = t = m = T = 1$.

Это значит, что значения l, t, m, T являются единицами длины, времени, массы и температуры в планковской системе. Решая уравнения (1), находим искомый ответ

$$l = \sqrt{hG/c^3} = 4{,}051\cdot10^{-33}\ \text{см};\ t = l/c = 1{,}351\cdot10^{-43}\ \text{с};$$

$$m = h/(lc) = 5{,}456\cdot10^{-5}\ \text{г};$$

$$\mathscr{E} = kT = mc^2 = 4{,}904\cdot10^{16}\ \text{эрг} = 3{,}061\cdot10^{19}\ \text{ГэВ};\ T = mc^2/k = 3{,}552\cdot10^{32}\ \text{К}.$$

В теоретической физике вместо постоянной h предпочитают применять постоянную $\hbar = h/(2\pi) = 1{,}0545887$ эрг$\cdot$с. Тогда получается

$$l = \sqrt{\hbar G/c^3} = 1{,}616\cdot10^{-33}\ \text{см};\ t = l/c = 0{,}5390\cdot10^{-43}\ \text{с};$$

$$m = \hbar/(lc) = 2{,}177\cdot10^{-5}\ \text{г};$$

$$\mathscr{E} = kT = mc^2 = 1{,}956\cdot10^{16}\ \text{эрг} = 1{,}221\cdot10^{19}\ \text{ГэВ};\ T = mc^2/k = 1{,}417\cdot10^{32}\ \text{К}.$$

ГЛАВА XII

МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

§ 89. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

1. В отличие от твердых тел *жидкости и газы в состоянии равновесия не обладают упругостью формы**). *Они обладают только объемной упругостью. В состоянии равновесия напряжение в жидкости и газе всегда нормально к площадке, на которую оно действует.* Касательные напряжения вызывают только изменения формы элементарных объемов тела (сдвиги), но не величину самих объемов. Для таких деформаций в жидкостях и газах усилий не требуется, а потому в этих средах при равновесии касательные напряжения не возникают. С точки зрения механики *жидкости и газы могут быть определены как такие среды, в которых при равновесии касательные напряжения существовать не могут.*

Из этого определения следует, что в состоянии равновесия нормальное напряжение в жидкости или газе не зависит от ориентации площадки, на которую оно действует. Для доказательства возьмем произвольно ориентированную площадку, внешнюю нормаль к которой будем характеризовать единичным вектором **n**. Так как напряжение нормально к площадке, то его можно представить в виде $\boldsymbol{\sigma}_n = -P\mathbf{n}$. Напряжения на площадках, перпендикулярных к координатным осям, запишутся как $\boldsymbol{\sigma}_x = -P_x\mathbf{i}$, $\boldsymbol{\sigma}_y = -P_y\mathbf{j}$, $\boldsymbol{\sigma}_z = -P_z\mathbf{k}$, где **i**, **j**, **k** — координатные орты. Подставляя эти значения в формулу (74.1), получим

$$P\mathbf{n} = P_x n_x \mathbf{i} + P_y n_y \mathbf{j} + P_z n_z \mathbf{k}.$$

Умножая скалярно это соотношение последовательно на **i**, **j**, **k**, найдем

$$P = P_x = P_y = P_z. \qquad (89.1)$$

Отсюда делаем вывод, что *в состоянии равновесия нормальное напряжение (давление P) не зависит от ориентации площадки, на которую оно действует.*

2. В случае газов нормальное напряжение всегда направлено внутрь газа, т. е. имеет *характер давления.* В жидкостях, как исключение, могут реализоваться и такие случаи, когда нормальное напря-

*) Исключения составляют жидкие пленки и поверхностные слои жидкостей. Однако связанные с ними явления в настоящей главе не рассматриваются. Они рассмотрены в т. II нашего курса.

жение является *натяжением* (отрицательным давлением): жидкости оказывают сопротивление на разрыв. Это сопротивление, вообще говоря, довольно значительно и в однородных жидкостях составляет несколько десятков ньютонов на квадратный миллиметр. Однако обычные жидкости неоднородны. Они содержат мельчайшие пузырьки газов, которые действуют подобно надрезам на натянутой веревке и сильно ослабляют прочность жидкости на разрыв. Поэтому в подавляющем большинстве случаев в жидкостях напряжения также имеют характер давлений. Вот почему для обозначения нормального напряжения мы пользуемся символом $-P\mathbf{n}$ (давление), а не $+T\mathbf{n}$ (натяжение). Если давление переходит в натяжение, т. е. становится отрицательным, то это, как правило, ведет к нарушению плотности жидкости. С отмеченными особенностями связано и то обстоятельство, что газы обладают способностью к неограниченному расширению: газ всегда полностью заполняет объем сосуда, в котором он заключен. Напротив, каждой жидкости свойствен определенный *собственный объем*, лишь незначительно меняющийся с изменением внешнего давления. Жидкости имеют свободную поверхность и могут собираться в капли. Чтобы отметить эти обстоятельства, жидкие среды называют также *капельно-жидкими*. В механике при рассмотрении движений капельных жидкостей и газов газ обычно рассматривают как частный случай жидкости. Таким образом, под жидкостью в обобщенном смысле слова понимают либо капельную жидкость, либо газ. *Отдел механики, занимающийся изучением движения и равновесия жидкостей, называется гидродинамикой.*

3. Давление, существующее в жидкости, обусловлено ее сжатием. А так как касательные напряжения не возникают, то упругие свойства жидкостей по отношению к малым деформациям характеризуются только одной упругой постоянной: *коэффициентом сжимаемости*

$$\gamma = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}, \tag{89.2}$$

или обратной ему величиной — *модулем всестороннего сжатия*

$$K = -V\frac{dP}{dV}. \tag{89.3}$$

Предполагается, что температура жидкости при сжатии поддерживается постоянной. При рассмотрении деформаций, сопровождающихся изменениями температуры, вместо (89.2) и (89.3) предпочтительнее писать

$$\gamma_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dP}\right)_{T=\text{const}}, \tag{89.2a}$$

$$K_T = -V\left(\frac{dP}{dV}\right)_{T=\text{const}} \tag{89.3a}$$

и называть γ_T и K_T *изотермическими коэффициентом и модулем всестороннего сжатия.* В быстрых процессах, происходящих практически без теплообмена, особую роль играют *адиабатические коэффициенты* и *модули упругости* (см. § 75, п. 8).

При рассмотрении деформаций твердых тел модуль всестороннего сжатия мы определили формулой (77.3), отличающейся от (89.3) тем, что вместо величины dP в ней стоит просто P. Такое определение было возможно потому, что твердое тело обладает определенным объемом, когда внешнее давление P обращается в нуль, и этот объем меняется мало даже при конечных изменениях P. Формула (89.3) переходит в (77.3), если положить $dP = P - P_0$ и считать, что $P_0 = 0$. Так же можно было поступать и в случае капельных жидкостей. Но в случае газов формула (77.3) не годится. Надо пользоваться более общей формулой (89.3), так как при отсутствии внешнего давления объем газа становится бесконечно большим. Именно так мы поступали в § 85 при рассмотрении вопроса о скорости звука в газах.

Можно также сказать, что некоторое состояние тела с давлением P_0 (и температурой T) мы выбираем за *нормальное* и рассматриваем изменения объема тела по отношению к этому нормальному состоянию. В случае твердых и капельно-жидких тел модуль упругости (89.3) в широких пределах не зависит от значения P_0. По этой причине и можно положить $P_0 = 0$. В случае же газов конкретизация значения P_0 существенна. Приравнивать P_0 к нулю в этом случае нельзя. Так, если воспользоваться законом Бойля—Мариотта $P \sim 1/V$ (при $T = \text{const}$), то из (89.3) легко получить $K = P$. Отсюда видно, что о модуле упругости газа можно говорить лишь тогда, когда указанно его давление (при заданной температуре).

4. Малую сжимаемость капельных жидкостей можно демонстрировать с помощью следующего эффективного опыта. Сосуд из пластмассы наполовину наполняется водой. Если произвести выстрел из мелкокалиберной винтовки, чтобы пуля пролетела выше уровня жидкости, то она оставляет лишь отверстия в стенках сосуда, а самый сосуд остается целым. Если же пуля попадает в сосуд на несколько сантиметров ниже уровня жидкости, то сосуд разлетается вдребезги. Дело в том, что для проникновения пули в воду она должна либо сжать ее на величину своего объема, либо вытеснить наверх. Для вытеснения недостаточно времени. Происходит сжатие — в жидкости развиваются большие давления, которые и разрывают стенки сосуда. Для опыта годятся также деревянные ящики или бумажные коробки, наполненные водой. В последнем случае опыт удается уже с духовым ружьем. Аналогичные явления возникают при разрывах глубинных бомб, применяемых против подводных лодок. Вследствие малой сжимаемости воды при взрыве в воде развиваются громадные давления, которые и разрушают лодку.

Малая сжимаемость жидкостей позволяет во многих случаях вообще полностью пренебречь изменениями их объема. Тогда вводят представление об *абсолютно несжимаемой жидкости.* Это — идеа-

лизация, которой постоянно пользуются. Конечно, и в несжимаемой жидкости давление определяется степенью ее сжатия. Однако даже при очень больших давлениях изменения объема «несжимаемых жидкостей» столь ничтожны, что с ними во многих случаях можно не считаться. Можно сказать, что несжимаемая жидкость — это предельный случай сжимаемой жидкости, когда для получения бесконечно больших давлений уже достаточны бесконечно малые сжатия. Несжимаемая жидкость является такой же абстракцией, как и твердое тело. Деформации твердых тел существенны для выяснения механизма возникновения внутренних напряжений. Но когда деформации малы, можно в ряде случаев заменить реальное тело идеализированным твердым телом. Твердое тело — это предельный случай реального тела, когда для получения бесконечно больших напряжений достаточны бесконечно малые деформации.

Можно или нельзя реальную жидкость заменять идеальной — это зависит не столько от того, насколько мала сжимаемость жидкости, сколько от содержания тех вопросов, на которые надо получить ответы. Так, при рассмотрении звуковых волн, вообще говоря, принципиально невозможно отвлечься от сжимаемости жидкостей. А при рассмотрении воздушных течений, если только перепады давления не слишком велики, воздух часто можно рассматривать как несжимаемую жидкость (см. § 94, п. 5).

5. В состоянии равновесия давление жидкости (или газа) P меняется с изменением ее плотности ρ и температуры T. Оно однозначно определяется значениями этих параметров. Соотношение

$$P = f(\rho, T) \tag{89.4}$$

между давлением, плотностью и температурой в состоянии равновесия называется *уравнением состояния*. Оно имеет разный вид для разных веществ и особой простотой отличается в случае разреженных газов. Вопросы, связанные с уравнением состояния, подробно разбираются во втором томе нашего курса. Здесь мы ограничимся замечанием, что изотермический модуль упругости K_T можно вычислить, зная уравнение состояния, простым дифференцированием. Он в общем случае является функцией плотности и температуры или давления и температуры.

6. *Если жидкость находится в движении, то наряду с нормальными напряжениями в ней могут возникать и касательные силы.* Однако последние определяются не самими деформациями жидкости (сдвигами), а их *скоростями*, т. е. производными деформаций по времени. Поэтому их следует относить к классу *сил трения* или *вязкости*. Они называются *касательными* или *сдвиговыми вязкими силами*.

Наряду с касательными могут существовать и *нормальные* или *объемные* силы вязкости. От обычных сил давления P эти силы отличаются тем, что они также определяются не степенью сжатия жидко-

сти, а *скоростью изменения сжатия во времени.* Эти силы играют существенную роль в быстрых процессах, например при распространении предельно коротких ультразвуковых волн (длина которых приближается к молекулярным размерам и межмолекулярным расстояниям). В предельном случае, когда скорость изменения деформаций в жидкости стремится к нулю, в ней исчезают все силы вязкости, как сдвиговые, так и обусловленные сжатием. Жидкость, в которой при любых движениях не возникают силы вязкости (как касательные, так и нормальные), называется *идеальной.* Иными словами, идеальной называют жидкость, в которой могут существовать только силы нормального давления P, однозначно определяемого степенью сжатия и температурой жидкости. Такие силы могут быть вычислены с помощью уравнения состояния жидкости (89.4) не только тогда, когда жидкость покоится, но и тогда, когда она движется произвольным образом. Конечно, строго идеальных жидкостей не существует. Это — абстракции, которыми можно пользоваться, когда скорости изменения деформаций в жидкости не очень велики.

7. Если к жидкости приложить касательные напряжения, то возникает движение. Оно в конце концов прекращается и переходит в состояние покоя, в котором касательные напряжения отсутствуют. Скорости изменения деформаций жидкости могут меняться в широких пределах. Для таких жидкостей, как вода или спирт, эти изменения происходят весьма быстро; для очень вязких жидкостей, как мед или патока, — весьма медленно. Наконец, есть вещества, которые при быстрых воздействиях на них ведут себя, как твердые тела, а при медленных — как очень вязкие жидкости. Сюда относятся так называемые *аморфные твердые тела.* Например, кусок сапожного вара или асфальта разбивается на мелкие части, если его ударить молотком. На асфальте можно стоять и по нему можно ходить. Но асфальт вытекает из бочки в течение недель или месяцев. Скорость вытекания сильно увеличивается с температурой. Стеклянная палочка, положенная своими концами на две опоры, прогибается, если подождать достаточно длительное время (месяцы или годы), причем ее прогиб не исчезает по прекращении действия силы тяжести. Эти примеры показывают, что нельзя провести резкое разграничение между жидкостями и аморфными твердыми телами. Истинно твердыми телами являются только *кристаллы.* Впрочем, говоря о жидкостях, мы всегда будем иметь в виду жидкости, не обладающие аномально большой вязкостью, когда отличие их от аморфных твердых тел выступает вполне отчетливо.

§ 90. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ И ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ

1. Силы, действующие в жидкости, как и во всякой другой сплошной среде, обычно разделяются на силы *массовые* (объемные) и силы *поверхностные.* Массовая сила пропорциональна массе dm,

а с ней и объему dV элемента жидкости, на который она действует. Эту силу можно обозначить как $\mathbf{f}\,dV$, называя $\mathbf{f}$ *объемной плотностью массовых сил.* Важнейшими примерами массовых сил являются сила тяжести и силы инерции (когда движение рассматривают в неинерциальных системах отсчета). В случае силы тяжести $\mathbf{f} = \rho\mathbf{g}$, где ρ — плотность жидкости, а $\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения. Поверхностные силы — это такие силы, которым подвергается каждый объем жидкости благодаря нормальным и касательным напряжениям, действующим на его поверхности со стороны окружающих частей жидкости.

2. Рассмотрим случай, когда касательных напряжений нет, а есть только силы нормального давления. В идеальной жидкости это будет всегда, т. е. при любых движениях. В остальных случаях — тогда, когда жидкость покоится, т. е. *в гидростатике.* Определим равнодействующую сил давления, действующих на бесконечно малый элемент объема жидкости dV. Сначала найдем проекцию этой равнодействующей на направление координатной оси X. Возьмем в качестве элемента dV бесконечно малый цилиндр с площадью оснований dS и длиной dx (рис. 230), ориентированный вдоль оси X. Абсциссы оснований цилиндра обозначим соответственно через x и $x + dx$. Сила давления, действующая на первое основание, равна $P(x)\,dS$, на второе — $P(x + dx)\,dS$. В скобках у P указано значение аргумента x, от которого P зависит. Конечно, P может зависеть и от координат y, z, а также от времени t. Но все эти аргументы не меняются при переходе от одного основания цилиндра к другому, а потому в рассматриваемом нами вопросе могут считаться постоянными. При желании поперечные размеры цилиндра можно взять бесконечно малыми высшего порядка по сравнению с длиной dx. А тогда y и z могут рассматриваться постоянными не только при смещениях вдоль цилиндра, но и поперек. Силы давления, действующие на боковую поверхность цилиндра, перпендикулярны к оси X, а потому при вычислении составляющих вдоль этой оси роли не играют. Итак, проекция сил давления на ось X, действующих на рассматриваемый элемент объема жидкости, равна

Рис. 230

$$[P(x) - P(x + dx)]\,dS.$$

Бесконечно малую разность в квадратных скобках можно заменить дифференциалом функции P:

$$P(x + dx) - P(x) = dP_{\substack{y=\text{const}\\ z=\text{const}\\ t=\text{const}}} = \left(\frac{dP}{dx}\right)_{\substack{y=\text{const}\\ z=\text{const}\\ t=\text{const}}} dx.$$

Дополнительные условия $y = \text{const}$, $z = \text{const}$, $t = \text{const}$ указывают на то, что при взятии производной $\frac{dP}{dx}$ и дифференциала dP координаты y, z и время t должны рассматриваться как постоянные. Производная функции $P(x, y, z, t)$, взятая при таких дополнительных условиях, как известно, называется *частной производной* и обозначается через $\frac{\partial P}{\partial x}$. Используя это обозначение, получаем для вычисляемой проекции силы

$$- \frac{\partial P}{\partial x}\, dS\, dx = - \frac{\partial P}{\partial x}\, dV,$$

так как $dS\, dx = dV$. Эта проекция, таким образом, пропорциональна элементу объема dV, и ее можно обозначить как $s_x dV$. Величина s_x есть x-составляющая силы, действующей на единицу объема жидкости, которая возникает из-за изменения нормального давления P в пространстве. По самому смыслу она не может зависеть от формы элемента dV. Мы взяли dV в виде цилиндра только потому, что таким путем достигается наибольшая простота и наглядность вычисления. Можно таким же путем найти проекции s_y и s_z, выбирая в качестве dV элементарные цилиндры, ориентированные параллельно координатным осям Y и Z. В результате найдем, что на единицу объема жидкости действует сила s, обусловленная поверхностными силами давления, точнее, их изменениями в пространстве. Ее проекции равны

$$s_x = - \frac{\partial P}{\partial x}, \quad s_y = - \frac{\partial P}{\partial y}, \quad s_z = - \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{90.1}$$

Сам вектор $\mathbf{s}$ равен

$$\mathbf{s} = - \frac{\partial P}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial P}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial P}{\partial z}\mathbf{k}, \tag{90.2}$$

или сокращенно

$$\mathbf{s} = - \operatorname{grad} P. \tag{90.3}$$

Мы ввели обозначение

$$\operatorname{grad} P \equiv \frac{\partial P}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{90.4}$$

Этот вектор называется *градиентом скаляра* P (см. также § 29). Таким образом, *объемная плотность* $\mathbf{s}$ *результирующей сил давления, действующих на элементы объема жидкости, равна градиенту* P, *взятому с противоположным знаком.* Мы видим, что сила $\mathbf{s}$ обусловлена не значением давления P, а его *пространственными изменениями.* Величина P также существенна. Она определяет *степень сжатия жидкости* в рассматриваемой точке пространства.

3. В состоянии равновесия сила $\mathbf{s}$ должна уравновешиваться массовой силой $\mathbf{f}$. Это приводит к уравнению

$$\operatorname{grad} P = \mathbf{f}, \tag{90.5}$$

которое является *основным уравнением гидростатики.* В координатной форме оно имеет вид

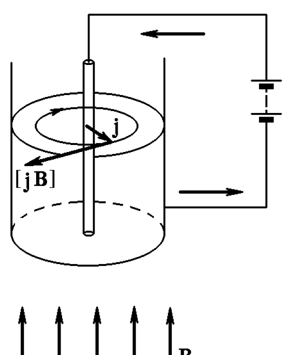
$$\frac{\partial P}{\partial x} = f_x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = f_y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = f_z. \tag{90.6}$$

Можно написать и основное уравнение гидродинамики идеальной жидкости. В этом случае формула (90.3) также применима, а потому мы получаем

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \operatorname{grad} P, \tag{90.7}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость, а $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ — ускорение жидкости в рассматриваемой точке. Уравнение (90.7) называется *уравнением Эйлера.*

4. Уравнение (90.5) показывает, что при равновесии жидкости сила $\mathbf{f}$ (точнее, плотность силы или сила, действующая на единицу объема жидкости) должна выражаться градиентом однозначной скалярной функции. Это есть необходимое и достаточное условие того, чтобы сила $\mathbf{f}$ была консервативной (см. § 29). Таким образом, *для равновесия жидкости необходимо, чтобы силовое поле, в котором она находится, было консервативным.* В неконсервативных силовых полях равновесие невозможно.



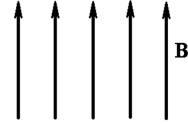


Рис. 231

Примером может служить проводящая жидкость, помещенная в магнитное поле, когда через нее проходит электрический ток. В этом случае со стороны магнитного поля на жидкость действует сила $\mathbf{f} = C[\mathbf{jB}]$, где $\mathbf{B}$ — индукция магнитного поля, $\mathbf{j}$ — плотность тока, а C — числовой коэффициент, значение которого зависит от выбора единиц. Поместим цилиндрический сосуд с раствором электролита (например, $CuSO_4$) над одним из полюсов сильного электромагнита (рис. 231). Вдоль оси цилиндра расположен цилиндрический проводник. Между ним и боковой стенкой сосуда наложим электрическое напряжение в несколько вольт. В электролите вдоль радиусов цилиндра потечет электрический ток. Сила $\mathbf{f} = C[\mathbf{jB}]$ будет направлена по касательным к окружностям с центрами на оси цилиндра. Она вызовет вращение жидкости вокруг указанной оси. Вращение будет ускоряться до тех пор, пока силы, действующие со стороны магнитного поля, не уравновесятся силами вязкости.

§ 91. ГИДРОСТАТИКА НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

1. Когда $f = 0$, то $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0$. Значит, *если нет массовых сил, то при равновесии давление во всех точках жидкости одина-*

ково. Это — *закон Паскаля* по имени французского ученого Блеза Паскаля (1623–1662). В частности, *при отсутствии массовых сил жидкость может находиться в равновесии только тогда, когда внешнее давление на ее поверхность одно и то же во всех точках этой поверхности.* В противном случае возникнет движение жидкости. *При отсутствии массовых сил одинаковое давление на поверхность жидкости возбуждает такое же давление во всех точках внутри жидкости.*

Если жидкость находится в поле тяжести, то $\mathbf{f} = \rho\mathbf{g}$. Направим ось Z вертикально вверх. Тогда основные уравнения равновесия жидкости примут вид

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g. \tag{91.1}$$

Из них следует, что при механическом равновесии давление не может зависеть от x и y. Оно должно оставаться постоянным в каждой горизонтальной плоскости $z = \text{const}$. Горизонтальные плоскости суть *плоскости равного давления*. В частности, свободная поверхность жидкости горизонтальна, поскольку она находится под постоянным давлением атмосферы. Таким образом, при механическом равновесии давление может зависеть лишь от координаты z. Из третьего уравнения (90.1) следует поэтому, что для механического равновесия необходимо, чтобы произведение ρg было функцией только z. Так как g не зависит от x и y (зависимостью g от географической широты и долготы места мы пренебрегаем), то, следовательно, и плотность ρ может меняться только с высотой. В силу уравнения состояния (89.4) давлением P и плотностью ρ определяется температура жидкости T. Итак, *при механическом равновесии давление, температура и плотность жидкости являются функциями только z и не могут зависеть от x и y.*

2. Допустим теперь, что жидкость *однородна* и ее можно рассматривать как *несжимаемую* ($\rho = \text{const}$). Кроме того, будем считать постоянным ускорение свободного падения g, пренебрегая его зависимостью от высоты z. Тогда легко интегрируется и последнее уравнение системы (91.1). В результате такого интегрирования получим

$$P = P_0 - \rho g z. \tag{91.2}$$

Постоянная интегрирования P_0 есть давление жидкости на высоте $z = 0$, т. е. атмосферное давление, если начало координат поместить на свободной поверхности жидкости. Формула (91.2) определяет также давление жидкости на дно и стенку сосуда, а также на поверхность всякого тела, погруженного в жидкость. Она охватывает всю гидростатику, излагаемую в школьных курсах физики.

3. Остановимся теперь на *законе Архимеда* и связанных с ним вопросах. Выделим мысленно из жидкости произвольный объем, ограниченный замкнутой поверхностью S (рис. 232). Если жидкость

находится в механическом равновесии, то, разумеется, должен находиться в равновесии и выделенный объем. Поэтому должны обращаться в нуль равнодействующая и момент внешних сил, действующих на рассматриваемый объем жидкости. Внешние силы — это вес Q выделенного объема жидкости и давление на поверхность S со стороны окружающей жидкости. Значит, равнодействующая F сил гидростатического давления, действующих на поверхность S, должна равняться Q — весу жидкости в объеме, ограниченном поверхностью S. Эта равнодействующая должна быть направлена вверх и проходить через центр масс A выделенного объема жидкости, чтобы полный момент внешних сил, действующих на него был равен нулю. Допустим теперь, что жидкость из выделенного нами объема удалена, и на ее место помещено любое твердое тело. Если это тело удерживается в равновесии, то в состоянии окружающей жидкости *никаких изменений не произойдет*. Не изменится и давление, оказываемое жидкостью на поверхность S. В результате мы приходим к закону Архимеда. *Если тело, погруженное в жидкость, удерживается в механическом равновесии, то со стороны окружающей жидкости оно подвергается выталкивающей силе гидростатического давления, численно равной весу жидкости в объеме, вытесненном телом. Эта выталкивающая сила направлена вверх и проходит через центр масс A жидкости, вытесненной телом.* Точку A будем называть *центром плавучести тела*. Ее положением, как будет показано ниже, определяются *равновесие* и *устойчивость* плавающего тела.

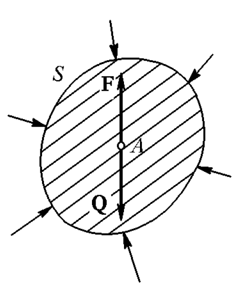


Рис. 232

4. С помощью закона Архимеда решается вопрос о равновесии тел, плавающих в жидкости. *Для равновесия необходимо, чтобы вес тела был равен весу вытесненной им жидкости, а центр плавучести A лежал на одной вертикали с центром масс самого тела.* Что касается устойчивости равновесия, то при решении этого вопроса надо различать два случая.

Случай 1. Плавающее тело погружено в жидкость целиком. В этом случае при любых смещениях и поворотах тела его центр масс C и центр плавучести A сохраняют свое положение относительно тела. *Равновесие устойчиво, если центр масс тела C лежит ниже его центра плавучести A, и неустойчиво, если он лежит выше A.* Действительно, если тело слегка повернуть относительно положения равновесия вокруг горизонтальной оси, то в обоих случаях момент пары сил $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{F}$ будет стремиться опустить точку C и поднять точку A (рис. 233). В результате этого тело приходит в положение устойчивого равновесия, в котором точка C расположена ниже точки A.

Случай 2. Плавающее тело погружено в жидкость не целиком, а частично выступает над ее свободной поверхностью. По сравнению

с предыдущим этот случай более сложен, так как при смещении тела из положения равновесия меняется форма вытесняемого им объема жидкости. Вследствие этого положение центра плавучести относительно плавающего тела изменяется, что и усложняет исследование.

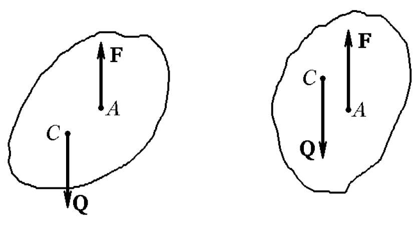


Рис. 233

Рассматриваемый случай представляет основной интерес при исследовании устойчивости плавающих кораблей. На рис. 234 *а* схематически изображен корпус корабля в «килевом» положении, когда центр масс корабля C и центр плавучести A лежат на одной вертикали, совпадающей с вертикальной осью симметрии корабля. При наклоне корабля на малый угол φ (рис. 234 *б*) центр плавучести смещается относительно корабля в точку A', оставаясь практически на прежней высоте. Выталкивающая сила теперь проходит через точку A', и линия ее действия пересекает вертикальную ось симметрии корабля в точке M, называемой *метацентром*. Если ме-

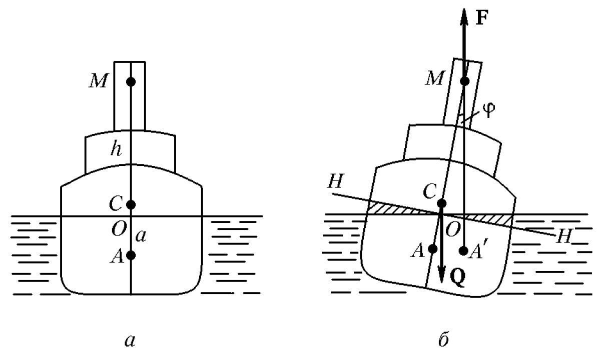


Рис. 234

тацентр лежит выше центра масс корабля, то момент пары сил **Q** и **F** будет возвращать корабль в исходное положение. В этом случае равновесие корабля устойчивое. Если же метацентр M лежит ниже центра масс корабля, то пара сил **Q** и **F** будет еще больше отклонять корабль от исходного положения. В этом случае равновесие неустойчиво. Расстояние h между точками C и M называется *метацентрической высотой. Если метацентрическая высота положительна, то равновесие устойчиво, если отрицательна, то неустойчиво.* Чем больше h, тем устойчивее равновесие. Момент пары сил **Q** и **F**, возвращающий корабль в исходное положение, называется *выпрямляющим моментом.* Он, очевидно, равен

$$M = Qh \sin \varphi. \qquad (91.3)$$

Величина h сама зависит от φ, так как при изменении наклона φ меняется и положение метацентра относительно корабля. Найдем это положение и вычислим метацентрическую высоту h в предельном случае бесконечно малых углов наклона φ.

Так как выталкивающая сила проходит через точку A' и направлена вертикально вверх, то ее момент относительно точки A будет $N = Q \cdot AM \sin\varphi$ или (при малых φ) $N = Q(h + a)\varphi$, где a — расстояние между центром масс корабля и его центром плавучести в положении равновесия. Величина a считается положительной, если точка C лежит выше A, и отрицательной, если она лежит ниже A. Момент N, конечно, не зависит от того, в какой точке линии $A'M$ выбрана точка приложения выталкивающей силы $\mathbf{F}$. Разложим силу $\mathbf{F}$ на составляющую $\mathbf{F}_{\parallel}$, параллельную оси корабля AM, и составляющую $\mathbf{F}_{\perp}$, к ней перпендикулярную. Если точку приложения силы $\mathbf{F}$ поместить в A', то составляющая $\mathbf{F}_{\perp}$ не даст момента относительно центра плавучести A, и вычисления упростятся. Тогда полный момент N будет создаваться только составляющей $\mathbf{F}_{\parallel}$. Понятно, что момент этой составляющей будет одним и тем же относительно всех точек, лежащих на оси AM. Из изложенного следует, что величину $N = Q(h + a)\varphi$ можно рассматривать как момент выталкивающих сил давления относительно произвольной точки оси AM, если из этих сил вычесть их составляющие, перпендикулярные к той же оси. Поэтому момент N можно вычислить иначе. Если корабль наклонен на угол φ, то выталкивающие силы давления с правой стороны увеличатся, а с левой — уменьшатся. При этом мы имеем в виду не полные силы, а только их составляющие, параллельные AM. Пусть x — расстояние (координата) произвольной точки плоскости HH от оси Y, проходящей через O перпендикулярно к плоскости рисунка. Тогда увеличение давления в соответствующей точке дна будет $\rho g x \varphi$, а момент N представится выражением

$$N = \rho g \varphi \int x^2\, dS = \rho g I \varphi,$$

где I — *момент инерции* поперечного сечения корабля вдоль ватерлинии относительно оси Y: $I = \int x^2\, dS$ (ср. § 80, п. 1). Сравнивая оба выражения для N, получаем

$$h = \frac{I}{V} - a, \qquad (91.4)$$

где $V = Q/(\rho g)$ — *водоизмещение корабля*, т. е. объем вытесняемой им воды.

5. Рассмотрим теперь жидкость в сосуде, равномерно вращающемся вокруг вертикальной оси с угловой скорость $\boldsymbol{\omega}$. Будем предполагать, что жидкость вращается вместе с сосудом, а сам сосуд обладает осевой симметрией, например имеет цилиндрическую форму. Эта задача сводится к статической, если перейти во вращающуюся систему отсчета, в которой жидкость покоится. Теперь в уравнении

(90.5) $\mathbf{f}$ слагается из силы тяжести $\rho\mathbf{g}$ и центробежной силы $\rho\omega^2\mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный от оси вращения к рассматриваемой точке и перпендикулярный к оси. Если поместить начало координат на оси вращения так, чтобы ось Z совпала с осью вращения, то уравнения (90.6) примут вид

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho\omega^2 x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \rho\omega^2 y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g. \tag{91.5}$$

Считая ρ постоянной и интегрируя, получим

$$P = \frac{1}{2}\,\rho\omega^2(x^2 + y^2) - \rho g z + P_0, \tag{91.6}$$

или

$$P = \frac{1}{2}\,\rho\omega^2 r^2 - \rho g z + P_0. \tag{91.6a}$$

Уравнение свободной поверхности $P = \text{const}$ принимает вид

$$\frac{1}{2}\,\omega^2(x^2 + y^2) - gz = \text{const}.$$

Это — параболоид вращения, обращенный своей выпуклостью вниз. Если начало координат поместить в вершину параболоида, то постоянная P_0 будет иметь смысл наружного атмосферного давления. Уравнение свободной поверхности жидкости будет

$$\frac{1}{2}\,\omega^2(x^2 + y^2) = gz.$$

Конечно, рассмотренную задачу можно трактовать и как чисто динамическую. Если жидкость вращается как целое, то при таком движении в ней не возникают силы вязкости. Естественные поверхностные силы, действующие в жидкости, сводятся к силам нормального давления. Поэтому в этом случае можно пользоваться уравнением Эйлера (90.7) независимо от того, является ли жидкость идеальной или вязкой. При равномерном вращении производная $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ сводится к центростремительному ускорению $-\omega^2\mathbf{r}$. Поэтому, полагая в уравнении (90.7) $\mathbf{f} = \rho\mathbf{g}$, получим

$$-\rho\omega^2 r = \rho\mathbf{g} - \operatorname{grad} P,$$

а это векторное уравнение эквивалентно трем уравнениям в проекциях (91.5).

Если сосуд имеет плоское дно, то для определения давления на дно надо в формуле (91.6а) положить $z = -h$, где h — высота уровня жидкости над дном на оси вращения (напомним, что ось Z направлена вверх). Получим

$$P - P_0 = \rho g h + \frac{1}{2}\,\rho\omega^2 r^2. \tag{91.7}$$

Давление в центре, таким образом, минимально и монотонно возрастает к краям. С этим связано, например, следующее явление. Если чайной ложкой привести во вращение воду в стакане, то после прекращения помешивания чаинки и песчинки, имеющиеся в ней, со-

бираются в центре дна. Дело в том, что эти частицы тяжелее воды и опускаются на дно. Здесь их вращение замедляется благодаря силам трения о дно стакана, и под влиянием разности гидростатических давлений частицы перемещаются к центру дна.

Вычислим теперь полную силу давления жидкости на дно сосуда. С этой целью воспользуемся уравнением свободной поверхности жидкости $\frac{1}{2}\omega^2 r^2 = gz$ и перепишем формулу (91.7) в виде $P - P_0 = \rho g(h + z)$. Интегрируя по площади дна, найдем искомую силу

$$F = \rho g \int (h + z)\, dS = \rho g V, \tag{91.8}$$

где V — объем жидкости в сосуде. Как и следовало ожидать, полная сила давления равна весу этого объема жидкости.

ЗАДАЧИ

1. Жидкость налита в сосуд, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда. Вычислить момент сил гидростатического давления, действующих на боковую стенку сосуда, относительно ее нижнего основания.

Ответ. $M = \frac{1}{3}\rho g h^2 S$, где h — высота уровня жидкости относительно дна, S — площадь рассматриваемой боковой стенки сосуда.

2. *Гидростатический парадокс.* Сила давления жидкости на дно сосуда не зависит от формы сосуда, а только от площади дна, разности уровней поверхности жидкости и дна, а также от плотности жидкости. Так, эта сила будет одной и той же для всех трех сосудов, изображенных на рис. 235, если они имеют одинаковое дно, а жидкость налита до одного и того же уровня. При взвешивании сосудов с жидкостью весы должны показывать один и тот же вес, поскольку показание весов зависит от силы, с которой дно сосуда давит на чашку весов. Указать, в чем ошибочность приведенного рассуждения. Что в действительности покажут весы?

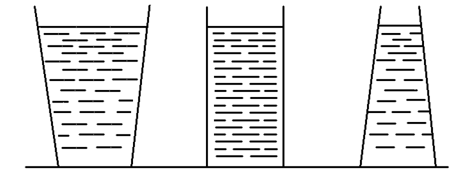


Рис. 235

3. Непосредственным вычислением результирующей сил давления жидкости на поверхность погруженного тела и их моментов убедиться в справедливости закона Архимеда.

Решение. Мысленно разобьем погруженное тело на бесконечно тонкие вертикальные столбики (рис. 236). Допустим для простоты, что каждый столбик пересекает поверхности тела только два раза. (Случай, когда это условие не соблюдается, читателю предлагается разобрать самостоятельно.) Пусть dS_1 и dS_2 — элементарные площадки, вырезаемые одним из столбиков на поверхности тела. Силы, действующие на эти площадки, перпендикулярны к ним и равны соответственно $P_1 dS_1$ и $P_2 dS_2$. Их вертикальные составляющие будут $P_1 dS_1 \cos\alpha_1$ и $P_2 dS_2 \cos\alpha_2$, или $P_1 d\sigma$ и $P_2 d\sigma$, где $d\sigma = dS_1 \cos\alpha_1 = dS_2 \cos\alpha_2$ — площадь нормального сечения столбика. Ре-

зультирующая этих двух сил, направленная вверх, равна $dF_z = (P_2 - P_1)\,d\sigma = \rho g h\,d\sigma = \rho g\,dV$, где h — высота столбика, а $dV = h\,d\sigma$ — его объем. Интегрируя по всему объему тела, находим выталкивающую силу $F_z = \rho g V$. Теперь надо найти момент вертикальных выталкивающих сил, действующих на столбики, относительно произвольной оси. Если ось вертикальна, то момент, очевидно, равен нулю. Поэтому достаточно ограничиться вычислением момента относительно произвольной горизонтальной оси. Примем таковую за координатную ось X. Искомый момент будет $M_x = \int y\,dF_z = g\int \rho y\,dV = g\int y\,dm$, где dm — масса жидкости, вытесненная соответствующим столбиком тела. Аналогично для момента относительно оси Y: $M_y = g\int x\,dm$. Момент обратится в нуль, когда $\int x\,dm = \int y\,dm = 0$, т. е. когда начало координат помещено на вертикальной оси, проходящей через центр плавучести. Тем самым доказано, что линия действия выталкивающей силы проходит через центр плавучести тела. Для завершения доказательства надо было бы еще исследовать, какие силы давления действуют на поверхность погруженного тела в горизонтальных направлениях. Однако этот вопрос не нуждается в специальном исследовании. Например, когда речь идет о силах, действующих параллельно оси X, то достаточно разбить тело на бесконечно малые столбики, параллельные этой оси, а затем повторить все сказанное выше, с той только разницей, что величину g надо положить равной нулю. Отсюда следует, что равнодействующая горизонтальных сил давления, действующих на погруженное тело, и их момент равны нулю.

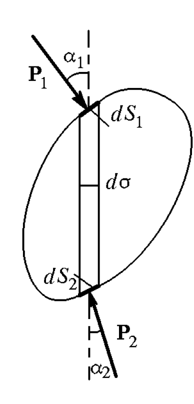


Рис. 236

4. Найти условие устойчивости однородного прямоугольного параллелепипеда, плавающего на поверхности жидкости в положении, когда одно из оснований его горизонтально. Длины сторон горизонтального основания A и B, высота C $(A > B)$. Плотность материала тела относительно жидкости $\rho < 1$.

Ответ. $B^2 > 6\rho(1-\rho)C^2$.

5. Та же задача для однородного цилиндра радиусом r и длиной l, плавающего в вертикальном положении.

Ответ. $r^2 > 2\rho(1-\rho)l^2$.

6. Та же задача для однородного цилиндра радиусом r и длиной l, плавающего в горизонтальном положении.

Ответ. $\frac{l}{r} > \left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$, где угол α определяется из трансцендентного уравнения $\alpha - \sin\alpha = 2\pi\rho$. Например, при $\rho = 1/2$ из него получаем $\alpha = \pi$, и условие устойчивости принимает вид $l > 4r$. При других значениях ρ равновесие может быть устойчивым и при меньших значениях l. Так, при $\alpha = \pi/2$ и $\alpha = 3\pi/2$ получаем соответственно $\rho = 1/4 - 1/(2\pi) \approx 0{,}091$ и $\rho = 3/4 + 1/(2\pi) \approx 0{,}841$. При таких значениях ρ равновесие устойчиво, если $l > 2r$. При $l > 4r$ равновесие устойчиво, каково бы ни было $\rho < 1$.

7. Найти распределение давления внутри земного шара, считая его состоящим из однородной несжимаемой жидкости и пренебрегая осевым вра-

щением Земли. Вычислить в том же приближении давление в центре Земли $P_ц$ (см. задачу *5* к § *55*).

Ответ. $P = \frac{\rho g}{2R}(R^2 - r^2)$, $P_ц = \frac{1}{2}\rho g R$, r — расстояние от центра Земли, R — радиус Земли. Если бы земной шар состоял из несжимаемой воды, то $P_ц$ равнялось бы $R/20$ ($P_ц$ — в атмосферах, R — в метрах). С учетом плотности Земли ($\rho = 5{,}5$)

$$P_ц = 0{,}275R \approx 1{,}75 \cdot 10^6 \text{ атм.}$$

8. Оценить сплюснутость Земли, обусловленную ее осевым вращением, считая Землю однородным несжимаемым жидким шаром.

Решение. Так как фигура Земли мало отличается от шаровой, то ускорение свободного падения внутри земного шара можно считать направленным к центру Земли и пропорциональным расстоянию до ее центра (см. задачу *5* к § *55*). В этом приближении с учетом центробежной силы уравнения гидростатики (90.6) принимают вид

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho g \frac{x}{R_0} + \rho\omega^2 x,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \frac{y}{R_0} + \rho\omega^2 y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \frac{z}{R_0},$$

где R_0 — радиус Земли, ω — угловая скорость ее вращения. Начало координат мы поместили в центре Земли, а ось Z направили вдоль оси ее вращения. Интегрируя эти уравнения, получаем

$$P = \frac{\rho}{2}\left(\omega^2 - \frac{g}{R_0}\right)(x^2 + y^2) - \frac{\rho g}{2R_0} z^2 + C,$$

где C — постоянная интегрирования, определяющаяся значением давления P на земной поверхности (его можно считать равным нулю, так как атмосферное давление пренебрежимо мало). Сплюснутость Земли определится из требования постоянства давления на земной поверхности. Выбрав сначала точку на экваторе, а затем на полюсе, можно записать: $P(R_э, 0, 0) = P(0, 0, R_п)$, где $R_э$ и $R_п$ — экваториальный и полярный радиусы Земли. С учетом явного вида P отсюда получаем

$$\left(\omega^2 - \frac{g}{R_0}\right) R_э^2 = -\frac{g}{R_0} R_п^2$$

и далее

$$R_э - R_п = \frac{\omega^2}{g} \frac{R_э^2 R_0}{R_э + R_п} \approx \frac{\omega^2 R_0^2}{2g}.$$

Следовательно, для сплюснотости ε земного шара имеем

$$\varepsilon \equiv \frac{R_э - R_п}{R_0} = \frac{\omega^2 R_0}{2g} \approx \frac{1}{580}.$$

Действительное сжатие Земли больше, а именно $1/297$. Расхождение объясняется грубостью модели, положенной в основу рассуждений, а также не-

совершенством метода расчета. При строгой постановке задачи надо учитывать, что поле тяготения сплюснутого шара не является центральным*). Тем самым задача сильно усложняется, так как гравитационное поле уже неизвестно заранее, а само оно зависит от неизвестной формы поверхности Земли. Подробное исследование показывает, что задача, сформулированная таким образом, не имеет однозначного решения. Возможно несколько различных форм равновесной поверхности, в том числе и эллипсоид вращения с определенной степенью сжатия.

§ 92. БАРОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА

1. Обратимся теперь к *гидростатике сжимаемой жидкости*. Наибольшой интерес представляет равновесие земной атмосферы. Этот случай мы и рассмотрим. Дифференциальные уравнения (90.5) и (91.1) были выведены без использования предположения о несжимаемости жидкости, а потому мы воспользуемся ими здесь. Первые два уравнения системы (91.1) можно не учитывать, так как из них следует лишь, что давление P может зависеть только от z. Оставшееся третье уравнение можно переписать в виде

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g, \tag{92.1}$$

так как частная $\frac{\partial P}{\partial z}$ и полная $\frac{dP}{dz}$ производные теперь означают одно и то же. Но одного уравнения (92.1) недостаточно, поскольку в него входят две неизвестные функции — давление P и плотность ρ. Нужно дополнительное соотношение между ними.

Будем предполагать, что состав атмосферы один и тот же на всем ее протяжении. Давление P, плотность ρ и температура T газа в состоянии равновесия связаны уравнением состояния. Если газ не слишком плотный, то таковым является *уравнение Клапейрона* (по имени французского физика Бенуа Клапейрона (1799—1864))

$$P = \frac{RT}{\mu}\rho, \tag{92.2}$$

где μ — молекулярная масса газа, а R — универсальная газовая постоянная. Ее числовое значение равно приближенно

$$R = 8{,}31\cdot 10^7\ \text{эрг}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{моль}^{-1} = 8{,}31\ \text{Дж}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{моль}^{-1}.$$

Соотношение (92.2) позволяет исключить из уравнения (92.1) плотность ρ. В результате получим

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{\mu g}{RT}P. \tag{92.3}$$

*) С учетом этого обстоятельства расчет дает $\varepsilon = \frac{5}{4}\omega^2 R_0 g \approx 1/232$.

Понятно, что таким путем мы еще не достигли цели, так как вместо неизвестной плотности ρ ввели новую неизвестную величину — температуру T. Однако последнюю легче измерить на различных высотах. Если T известна как функция z, то уравнение (92.3) уже можно будет проинтегрировать. Следовательно, задача определения давления на различных высотах становится вполне определенной, если задать закон изменения температуры T с высотой.

2. Если отсутствуют ветры и воздушные течения, т. е. атмосфера неподвижна, то говорят, что она находится в *механическом равновесии*. Такое состояние не является еще состоянием *полного равновесия*. Для последнего, кроме того, необходимо, чтобы атмосфера находилась также и в *тепловом равновесии*. Тепловое равновесие означает, что температура T одна и та же на протяжении всей атмосферы. Если это имеет место, то атмосферу называют *изотермической*.

Конечно, изотермическая атмосфера — это идеализации. Но рассмотрение этого идеализированного случая тем не менее представляет большой интерес. При $T = \text{const}$ уравнение (92.3) легко интегрируется. Для этого переписываем его в виде

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{RT}\,dz$$

и после интегрирования находим

$$\ln\frac{P}{P_0} = -\frac{\mu g z}{RT},$$

или

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{\mu g z}{RT}\right). \tag{92.4}$$

По тому же закону меняется и плотность воздуха, а именно

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\mu g z}{RT}\right). \tag{92.5}$$

Соотношения (92.4) и (92.5) называются *барометрическими формулами*. Постоянные интегрирования P_0 и ρ_0 имеют смысл давления и плотности воздуха на поверхности Земли. Давление и плотность воздуха убывают с высотой по экспоненциальному закону. При поднятии на высоту

$$h = \frac{RT}{\mu g} \tag{92.6}$$

они убывают в e раз. Величина h называется *высотой однородной атмосферы*. Смысл этого названия станет ясным, если поставить следующий вопрос. Какую высоту H должна была бы иметь воображаемая атмосфера постоянной плотности ρ_0, чтобы она производила на поверхность Земли такое же давление P_0, как и действительная атмосфера? Очевидно, искомая величина определится из условия

$P_0 = \rho_0 gH$. Но из уравнения состояния (92.2), если его применить к слою воздуха, прилегающему к поверхности Земли, следует $P_0 = \frac{RT}{\mu}\rho_0$. Используя это соотношение, получаем $H = \frac{RT}{\mu g}$, т. е. $H = h$. Считая среднюю молекулярную массу воздуха равной $\mu = 28{,}8$, находим для высоты однородной атмосферы при нуле градусов Цельсия ($T = 273$ К):

$$h = \frac{8{,}31 \cdot 273}{28{,}8 \cdot 9{,}8} \approx 8000 \text{ м} = 8 \text{ км}.$$

Подставляя h в барометрическую формулу (92.4), можно переписать ее в виде

$$P = P_0 e^{-z/h}. \quad (92.7)$$

В таком виде формула удобна для определения разностей высот двух или нескольких точек земной атмосферы. Для этого нужно знать давление воздуха в этих точках, а также температуру. Последняя в пределах рассматриваемых высот, разумеется, должна быть одной и той же.

3. Сделаем в заключение одно замечание относительно устойчивости механического равновесия атмосферы. Мы не будем вводить ограничения, что температура одна и та же на всех высотах, а будем предполагать, что она может меняться с высотой как угодно. Если нарушено состояние механического равновесия, в результате которого некоторая масса воздуха немного поднялась вверх, то в новом положении она будет подвергаться меньшему внешнему давлению. В результате поднявшаяся масса воздуха расширится, а ее плотность уменьшится, так как вследствие малой теплопроводности воздуха во время поднятия рассматриваемая масса практически не будет получать и отдавать тепло. Если окажется, что в новом положении плотность поднявшейся массы больше плотности окружающего воздуха, то эта масса, как более тяжелая, опустится вниз, и равновесие восстановится. Если же ее плотность окажется меньше плотности окружающего воздуха, то она будет подниматься еще выше, и механическое равновесие окажется неустойчивым. Аналогичные соображения справедливы и для случая, когда нарушение механического равновесия совершается путем небольшого опускания какой-либо массы воздуха. В этом случае опустившаяся масса сжимается внешним давлением. Если в новом положении ее плотность меньше плотности окружающего воздуха, то она начнет подниматься, и равновесие восстановится. Наоборот, если эта плотность окажется больше, то рассматриваемая масса начнет опускаться еще ниже, т. е. равновесие окажется неустойчивым. Эти рассуждения, разумеется, применимы не только к атмосфере, но и к любой неравномерно нагретой сжимаемой жидкости, находящейся в механическом равновесии в поле тяжести. Что касается земной атмосферы, то исследования показали, что изотермическая атмосфера в рас-

сматриваемом смысле устойчива. Еще большая устойчивость получается, когда температура воздуха возрастает с высотой. Если же температура убывает с высотой, то механическое равновесие воздуха возможно лишь тогда, когда это убывание происходит не слишком быстро. При убывании температуры с высотой более чем на один градус на каждые 100 метров высоты атмосфера теряет механическую устойчивость. Появляются восходящие и нисходящие потоки воздуха (конвекция). Во втором томе эти вопросы будут рассмотрены более подробно.

ЗАДАЧА

На какую высоту $H_{1/2}$ надо подняться, чтобы давление (изотермической) атмосферы уменьшилось в 2 раза?

Ответ. $H_{1/2} = h \ln 2 \approx 5{,}55$ км (при 0°С).

§ 93. КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

1. Для описания движения жидкости можно поступить двояко. Можно проследить за движением *каждой индивидуальной частицы жидкости*, т. е. указать положение и скорость этой частицы в каждый момент времени. Тем самым будут определены и *траектории* всех частиц жидкости. Но можно поступить и иначе. Можно проследить, что происходит с течением времени в *каждой точке пространства*. Точнее, можно указать модули и направления скоростей различных частиц жидкости, которые в различные моменты времени проходят через одну и ту же точку пространства. Если взять всевозможные точки пространства, но фиксировать время t, то при втором способе описания в пространстве получится мгновенная картина распределения скоростей жидкости — *поле скоростей*. В каждой точке пространства будет указан вектор скорости той частицы жидкости, которая проходит через эту точку в рассматриваемый момент времени. Линия, касательная к которой указывает направление скорости частицы жидкости, проходящей в рассматриваемый момент времени через эту точку касания, называется *линией тока*. Если поле скоростей, а следовательно, и соответствующие ему линии тока не меняются с течением времени, то движение жидкости называется *стационарным* или *установившимся*. Если же они меняются во времени, то движение называется *нестационарным* или *неустановившимся*. В случае нестационарного движения при втором способе описания скорость жидкости явно зависит от координат и времени: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. При стационарном движении явной зависимости от времени нет, скорость зависит только от координат: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$.

2. В случае нестационарного движения линии тока, вообще говоря, не совпадают с траекториями частиц жидкости. Действительно,

траектория указывает путь *одной и той же частицы* жидкости за все время ее движения. Линия же тока характеризует направления движения *бесконечного множества частиц*, которые в рассматриваемый момент находятся на этой линии. Только *при стационарном течении линии тока совпадают с траекториями частиц*. Для доказательства возьмем траекторию какой-либо произвольной частицы A (рис. 237). Пусть $A(t_1)$ — положение этой частицы в момент времени t_1. Возьмем другую частицу B, которая в момент t_2 занимает то же положение, что и частица A в момент t_1. Так как движение стационарно, то через точку $A(t_1)$ частица A пройдет с той же скоростью, с какой пройдет через нее частица B в момент t_2. Значит, скорость частицы B в положении $A(t_1)$ направлена по касательной к траектории частицы A. Так как момент времени t_2 можно выбрать произвольно, то отсюда следует, что траектория частицы A является также линией тока.

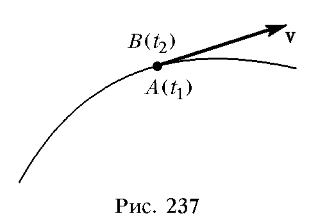


Рис. 237

3. Возьмем произвольный замкнутый контур C и через каждую точку его в один и тот же момент времени проведем линии тока (рис. 238). Они расположатся на некоторой трубчатой поверхности, называемой *трубкой тока*. Так как скорости частиц жидкости направлены по касательным к линиям тока, то при течении жидкость не может пересекать боковую поверхность трубки тока. Трубка тока ведет себя подобно боковой поверхности жесткой трубки, вдоль которой течет жидкость. На такие трубки тока можно разбить все пространство, занимаемое жидкостью. Если поперечное сечение трубки тока бесконечно мало, то можно считать, что скорость жидкости одна и та же во всех точках одного и того же поперечного сечения и направлена вдоль оси трубки тока. Масса жидкости, протекающая за время dt через поперечное сечение трубки, определяется выражением

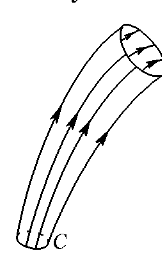


Рис. 238

$$dm = \rho v S\, dt, \tag{93.1}$$

где ρ — плотность жидкости, а S — площадь (нормального) поперечного сечения трубки.

В случае стационарного течения масса dm будет одной и той же для всех сечений трубки тока. Если взять два сечения, площади которых равны S_1 и S_2, то можно написать

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2. \tag{93.2}$$

Если бы это равенство не соблюдалось, то масса жидкости между сечениями S_1 и S_2 изменялось бы во времени. А это противоречит за-

кону сохранения массы и предположению о стационарности течения. Если жидкость несжимаема, то $\rho_1 = \rho_2$, и соотношение (93.2) принимает вид

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}. \tag{93.3}$$

Скорость жидкости в одной и той же трубке тока тем больше, чем у́же поперечное сечение трубки. Она обратно пропорциональна площади этого поперечного сечения.

§ 94. СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

1. Изучение движения реальных жидкостей и газов, вообще говоря, представляет очень сложную задачу. Для ее упрощения сначала полностью пренебрегают силами вязкости. Рассматривают случай идеальной жидкости, в которой при любых движениях не возникают касательные и нормальные силы внутреннего трения (см. § 89, п. 6). Единственные поверхностные силы, которые могут действовать в идеальной жидкости, — это силы нормального давления P. При этом само давление P однозначно определяется плотностью и температурой жидкости. Для упрощения жидкость считается также несжимаемой.

2. Рассмотрим стационарное течение идеальной жидкости в каком-либо консервативном силовом поле, например в поле силы тяжести. Применим к этому течению закон сохранения энергии. При этом будем полностью пренебрегать теплообменом, который может происходить между частями жидкости с окружающей средой. Выделим в жидкости бесконечно узкую трубку тока и рассмотрим часть жидкости, занимающую объем $MNDC$ (рис. 239). Пусть эта часть переместилась в бесконечно близкое положение $M_1N_1D_1C_1$. Вычислим работу A, совершаемую при этом силами давления. Давление, действующее на боковую поверхность трубки тока, перпендикулярно к перемещению и работы не совершает. При перемещении границы MN в положение M_1N_1 совершается работа $A_1 = P_1S_1l_1$, где $l_1 = MM_1$ — величина перемещения. Введя объем $\Delta_1 V = S_1l_1$, ее можно представить в виде $A_1 = P_1\Delta V_1$ или $A_1 = P_1\frac{\Delta_1 m}{\rho_1}$, где $\Delta_1 m$ — масса жидкости в объеме MNN_1M_1. При перемещении границы CD в положение C_1D_1 жид-

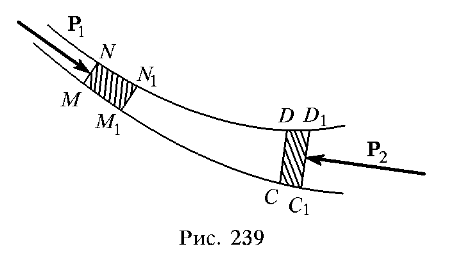


Рис. 239

кость совершает работу против давления P_2 (или давление P_2 совершает над жидкостью отрицательную работу). Для нее, рассуждая аналогично, найдем $A_2 = P_2\frac{\Delta_2 m}{\rho_2}$, где $\Delta_2 m$ — масса жидкости в объеме CDD_1C_1. Но если движение стационарно, то масса жидкости в объеме M_1N_1DC не изменится, а потому из закона сохранения массы получим $\Delta_1 m = \Delta_2 m$. Опуская индексы у Δm, для работы, совершаемой внешним давлением, окончательно находим

$$A = A_1 - A_2 = \left(\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2}\right)\Delta m.$$

Эта работа должна быть равна приращению ΔE полной энергии выделенной части жидкости. Ввиду стационарности течения энергия жидкости в объеме M_1N_1DC не изменилась. Поэтому величина ΔE равна разности энергий массы жидкости Δm в положениях CDD_1C_1 и MNN_1M_1. Обозначая через ε полную энергию, приходящуюся на единицу массы жидкости, находим $\Delta E = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\Delta m$. Приравнивая эту величину работе A и сокращая на Δm, получаем

$$\varepsilon_1 + \frac{P_1}{\rho_1} = \varepsilon_2 + \frac{P_2}{\rho_2}. \tag{94.1}$$

Отсюда следует, что *вдоль одной и той же линии тока при стационарном течении идеальной жидкости величина* $\varepsilon + P/\rho$ *остается постоянной*:

$$\varepsilon + \frac{P}{\rho} = B = \text{const}. \tag{94.2}$$

Это соотношение называется *уравнением Бернулли* (по имени математика и физика Даниила Бернулли (1700--1782), который впервые опубликовал его в 1738 г.). При выводе уравнения Бернулли мы нигде не использовали предположения о несжимаемости жидкости. Поэтому оно справедливо и для сжимаемых жидкостей. Требуется только, чтобы жидкость была идеальной, а течение — стационарным. Однако разбор и применения уравнения Бернулли для сжимаемых жидкостей и газов мы отложим до второго тома, так как это требует знания явного выражения для энергии ε. Здесь ограничимся рассмотрением несжимаемых жидкостей, движущихся в поле тяжести Земли. Именно в этих предположениях уравнение (94.2) было установлено самим Бернулли.

Если жидкость несжимаемая, то при течении не меняется та часть полной энергии ε, которая зависит от сжатия жидкости. Эту часть поэтому можно не принимать во внимание. Вся энергия ε складывается из кинетической энергии единицы массы жидкости $v^2/2$ и ее потенциальной энергии gh в поле тяжести. В этом случае уравнение Бернулли принимает вид

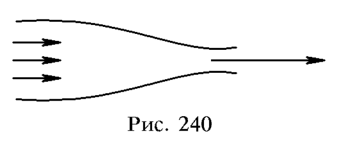
$$\frac{v^2}{2} + gh + \frac{P}{\rho} = B = \text{const}. \tag{94.3}$$

3. Подчеркнем еще раз, что постоянная Бернулли B одна и та же *вдоль одной и той же линии тока.* Однако она, вообще говоря, может меняться при переходе от одной линии тока к другой. Но могут быть и такие случаи, когда постоянная Бернулли одна и та же для всего потока жидкости. Отметим один, довольно часто встречающийся случай, когда это имеет место. Допустим, что все линии тока начинаются или оканчиваются в такой области, где жидкость практически находится в состоянии покоя. Возьмем одну из точек линии тока в такой области. Тогда в уравнении (94.3) следует положить $v = 0$, и мы получим $B = gh + P/\rho$. Но во всей области, где жидкость покоится, соблюдается условие равновесия $gh + P/\rho = \text{const}$. Отсюда видно, что постоянная Бернулли B в рассматриваемом случае одна и та же для всего потока жидкости. Более общим является случай, когда в некоторой области пространства несжимаемая идеальная жидкость движется параллельным потоком в любом направлении с постоянной скоростью v_0, а затем параллельность потока нарушается препятствиями, стоящими на его пути, или вследствие расширений или сужений трубы или русла, по которым течет жидкость. В этом случае постоянная Бернулли B также одинакова для всех линий тока. Чтобы убедиться в этом, достаточно перейти к системе отсчета, равномерно движущейся относительно исходной со скоростью v_0.

4. Допустим теперь, что тонкая трубка тока имеет переменное поперечное сечение, а ось ее горизонтальна. (Примером может служить горизонтальная труба переменного сечения, по которой течет жидкость.) Тогда $h = \text{const}$, и уравнение Бернулли принимает вид

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} = \text{const}. \tag{94.4}$$

Отсюда видно, что давление больше там, где меньше скорость v, и наоборот. С другой стороны, согласно соотношению (93.3) скорость v минимальна там, где максимально сечение трубки. Значит, в широких частях трубки давление максимально, а в узких минимально. Такой результат является непосредственным следствием второго закона Ньютона. Действительно, когда жидкость из широкой части течет в узкую (рис. 240), то скорость ее возрастает. Значит, ускорение направлено в сторону течения, т. е. на рис. 240 слева направо. Это ускорение сообщается разностью давлений, действующих на рассматриваемую часть жидкости слева и справа. Следовательно, давление слева, т. е. в более широкой части трубки, должно быть больше, чем справа, где трубка у́же.


Рис. 240

5. Пользуясь уравнением (94.4), можно дать ответ на вопрос, когда при течении жидкость или газ можно считать несжимаемыми, хотя более строгое доказательство должно основываться на уравнении Бернулли в более общей форме (94.2). Давление и скорость те-

чения в двух точках 1 и 2 на одной и той же линии тока связаны соотношением

$$\Delta P \equiv P_2 - P_1 = \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2).$$

С другой стороны,

$$\Delta\rho = \frac{d\rho}{dP}\,\Delta P = \frac{1}{c^2}\,\Delta P,$$

где c — скорость звука (см. § 85, п. 1). Для того чтобы при течении жидкость можно было рассматривать как несжимаемую, необходимо выполнение соотношения $|\Delta\rho| \ll \rho$ при любом выборе точек 1 и 2. Это приводит к условию

$$|v_2^2 - v_1^2| \ll c^2, \tag{94.5}$$

т. е. изменение квадрата скорости течения жидкости должно быть мало по сравнению с квадратом скорости звука. Если течение отнести к системе отсчета, в которой жидкость в какой-либо точке покоится, то условие (94.5) упрощается и принимает вид

$$v^2 \ll c^2, \tag{94.6}$$

т. е. во всем потоке квадрат скорости течения должен быть малым по сравнению с квадратом скорости звука.

Если при течении меняется высота h, то с помощью уравнения (94.3) нетрудно показать, что помимо (94.5) требуется дополнительное условие

$$g\Delta h \ll c^2, \tag{94.7}$$

выполнение которого необходимо, чтобы жидкость или газ могли рассматриваться как несжимаемые.

6. Опишем несколько опытов для иллюстрации уравнения Бернулли. На рис. 241 изображена труба переменного сечения, через которую пропускается воздух. О давлении воздуха в трубе можно судить по уровням воды в

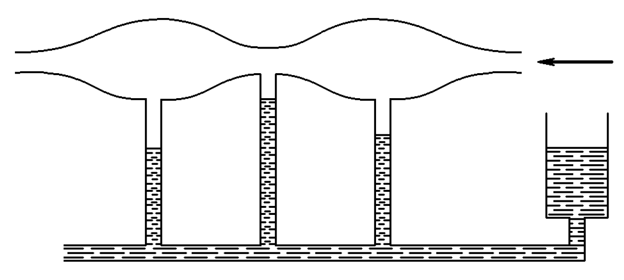


Рис. 241

стеклянных манометрических трубках, соединенных с ней, как показано на рис. 241. Оказывается, что в трубках, соединенных с узкими частями тру-

бы, вода поднимается выше, а соединенных с широкими частями — ниже. Значит, в первом случае давление воздуха в потоке меньше, чем во втором. Так и должно быть согласно уравнению (94.4).

Эта демонстрация может служить для пояснения идеи *водомера*, служащего для измерения *расхода воды*, т. е. массы воды Q, протекающей ежесекундно через поперечное сечение трубы. Труба содержит короткий участок (*трубка Вентури*) с меньшим поперечным сечением. Пусть S_1 и S_2 — площади поперечных сечений широкого и узкого участков трубы, а P_1 и P_2 — давления воды в них, измеряемые с помощью манометров. Тогда по уравнению Бернулли

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho}.$$

Кроме того, $M_1 = \rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2$. Определив отсюда v_1 и v_2 и подставив их в предыдущее соотношение, получим

$$Q = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2\rho(P_1 - P_2)}{S_1^2 - S_2^2}}. \qquad (94.8)$$

7. Возьмем резиновую трубку, надетую на суживающийся стеклянный наконечник, и будем продувать через нее воздух (рис. 242, вид сверху). Давление воздуха в узкой части наконечника и в выходящей из него струе будет меньше атмосферного. Поднесем струю сбоку к легкому полому целлулоидному шарику, подвешенному на нити. Шарик втягивается в струю, а затем увлекается ею. Если струю направить вертикально вверх, то втянувшийся в нее шарик можно удерживать в равновесии на определенной высоте. Он ведет себя подобно шарику, помещенному в яму. Привязывать шарик к нити в этом опыте не требуется.

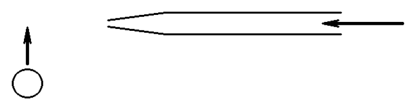


Рис. 242

8. Поднесем теперь струю воздуха к верхнему концу стеклянной трубки, нижний конец которой погружен в воду, а верхний оканчивается узким наконечником (рис. 243 *а*). Вода в стеклянной трубке будет подниматься, раз-

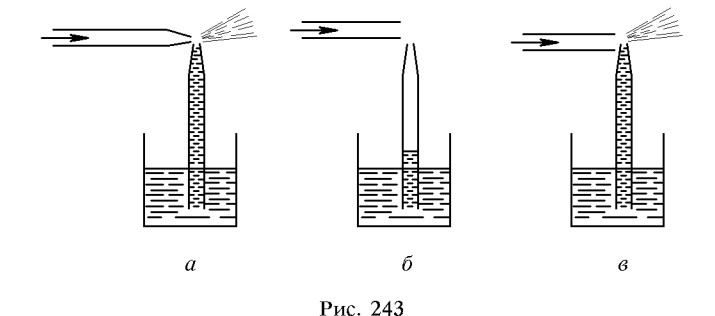


Рис. 243

брызгиваться и увлекаться струей воздуха. На этом принципе основано устройство *пульверизатора*. Если трубка, по которой продувается воздух, не снабжена узким наконечником, а имеет постоянное поперечное сечение

(рис. 243 *б*), то поднятие воды и разбрызгивание не происходит. Если, однако, такую трубку поднести вплотную к наконечнику трубки, погруженной в воду, так чтобы между ними образовался узкий зазор (рис. 243 *в*), то вода опять поднимается и разбрызгивается. Зазор между трубками выполняет роль узкого наконечника, понижающего давление воздуха в струе.

9. Если два легких изогнутых листа твердой бумаги подвесить на горизонтальных проволоках (рис. 244) и продувать между ними воздух, то они притягиваются друг к другу. Дело в том, что давление воздуха P между листами в наиболее узком месте становится меньше атмосферного P_0, и наружное атмосферное давление прижимает листы друг к другу. Можно так же повесить на небольшом расстоянии друг от друга две стеклянные колбы. При продувании воздуха между ними колбы начинают стучать, сталкиваясь друг с другом. Притяжение такого же типа наблюдается между двумя кораблями, когда они идут параллельным курсом на небольшом расстоянии друг от друга. Это легко объяснить, если перейти в систему отсчета, в которой корабли покоятся, а вода между ними течет. Описанное явление не раз было причиной столкновения судов и приводило к авариям.

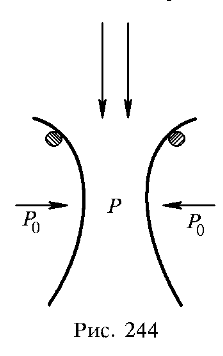


Рис. 244

10. На рис. 245 схематически изображен *прибор Клемана—Дезорма* (по имени французских физиков Н. Клемана-Дезорма (ум. в 1841) и Ш. Дезорма (1777—1862)). Он состоит из латунного диска с отверстием в центре, к краям которого приделана латунная трубка. На эту трубку надета резиновая трубка, через которую продувается воздух. Если диск поднести к листу бумаги, лежащему на столе, то лист притянется диском. Дело в том, что в узком зазоре между диском и листом бумаги образуется расходящийся от центра к краям поток воздуха. Давление в этом зазоре понижается, и лист бумаги прижимается к диску давлением наружного воздуха. Прижатый лист закрывает отверстие AB, течение воздуха через трубку затормаживается, давление его повышается, и снова появляется зазор, через который устремляется поток воздуха. Лист бумаги опять притягивается к диску и все повторяется, пока не прекратится дутье. В результате бумажный лист приходит в быстрые колебания, издавая звук.

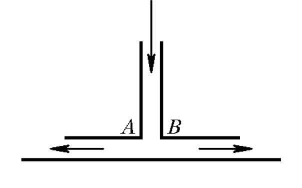


Рис. 245

11. Допустим, что поток жидкости обтекает какое-либо тело (рис. 246). От точки A линии тока расходятся в стороны. В точке A, называемой *критической*, скорость жидкости обращается в нуль, в ней линия тока обрывается. Применяя уравнение Бернулли к линии тока BA, получим

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 = P_0, \tag{94.9}$$

где P_0 — давление в критической точке, а P — на «бесконечности», откуда жидкость течет. Величина P_0 — это максимальное давление, которое может иметь жидкость на рассматриваемой линии тока. От наличия силы тяжести мы отвлекаемся, пред-

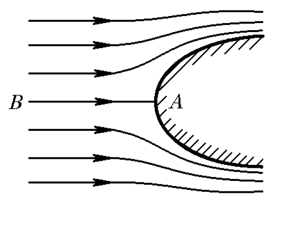


Рис. 246

полагая, что все линии тока плоские и лежат в горизонтальных плоскостях. Величина $1/2\,\rho v^2$ называется *динамическим* или *скоростным напором*, а сумма $P + 1/2\,\rho v^2$ — *полным напором* жидкости на рассматриваемой линии тока*). Если измерить в отдельности полный и скоростной напоры жидкости в рассматриваемой точке пространства, то по ним легко вычислить и скорость жидкости в той же точке.

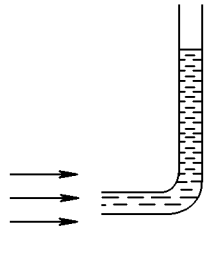


Рис. 247

Для измерения полного напора используется *трубка Пито* (по имени французского математика, физика и гидротехника Анри Пито (1695—1771)). Это небольшая изогнутая манометрическая трубка, обращенная открытым концом навстречу потоку жидкости (рис. 247). Приосевые линии тока, направленные к трубке Пито, заканчиваются внутри трубки, где жидкость покоится. Высота столба жидкости, устанавливающаяся в трубке, является поэтому мерой максимального давления, а следовательно, и полного напора жидкости на рассматриваемой линии тока.

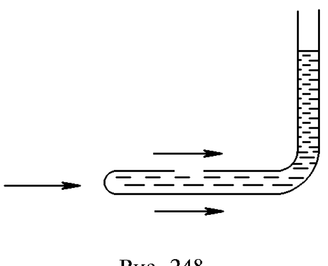


Рис. 248

Если помимо полного напора измерить еще давление P, то по их разности можно найти скоростной напор $1/2\,\rho v^2$, а затем вычислить скорость v. Измерение P было бы излишним, если бы речь шла о нахождении скорости v, например, в реке, где жидкость имеет открытую поверхность. В этом случае глубина погружения трубки Пито непосредственно давала бы значение искомого давления. Но этот способ не годится, когда жидкость течет, например, в трубке. Он не годится также для измерения скоростей самолетов и т. д. В таких случаях для измерения давления P можно воспользоваться *зондом*. Зонд отличается от трубки Пито тем, что его передняя часть, обращенная навстречу потоку, запаяна, а в боковой стенке имеется небольшое отверстие, как показано на рис. 248. Трубка зонда сильно искажает поток только в непосредственной близости от ее переднего конца, обращенного к потоку. Поток, обтекающий боковую поверхность трубки, практически остается неискаженным. Поэтому в непосредственной близости от отверстия скорость, а с ней и давление жидкости такие же, как и во всех точках линии тока, проходящей вблизи отверстия. Давление в трубке зонда, измеряемое манометром, таким образом, совпадает с давлением обтекающей ее жидкости P. На практике трубку Пито обычно монтируют

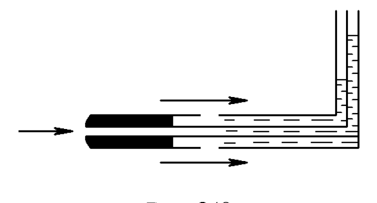


Рис. 249

*) В технической гидродинамике обычно применяется следующая терминология. Величину P называют *статическим давлением*, $1/2\,\rho v^2$ — *динамическим давлением*, а сумму $P + 1/2\,\rho v^2$ — *полным давлением*. Однако эта терминология, как неоднократно отмечалось многими физиками, нерациональна и может только ввести в заблуждение. Ею мы пользоваться не будем. В жидкости есть лишь единственное давление, которое обусловлено степенью ее сжатия, и таковым является величина P.

вместе с зондом, например, так, как изображено в разрезе на рис. 249. Такая трубка называется *трубкой Прандтля* (по имени немецкого ученого Людвига Прандтля (1875—1953)). Принцип ее действия ясен из рисунка.

§ 95. ПРИМЕРЫ НА ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ. ФОРМУЛА ТОРРИЧЕЛЛИ

1. Рассмотрим истечение идеальной несжимаемой жидкости через малое отверстие в боковой стенке или дне широкого сосуда. Частицы жидкости подходят к отверстию, имея скорости в поперечных направлениях (рис. 250). Из-за инерции это приводит к *сжатию вытекающей струи.* Во избежание этого будем предполагать, что истечение происходит через трубку с закругленными краями (рис. 251). Благодаря этому линии тока перед истечением постепенно меняют направление на параллельные оси трубки, и сжатия

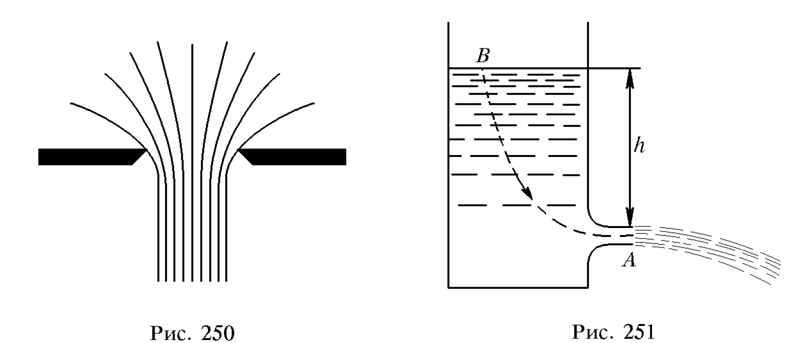


Рис. 250 Рис. 251

струи не возникает *). Все линии тока проходят через трубку, начинаясь вблизи свободной поверхности жидкости, где скорость v пренебрежимо мала. Поэтому постоянная Бернулли будет одна и та же у всех линий тока. Применим уравнение Бернулли к точкам B и A какой-либо линии тока (рис. 251). В точке B скорость пренебрежимо мала, ее можно считать равной нулю, скорость в точке A обозначим через v. Уравнение Бернулли дает

$$\frac{P_0}{\rho} + gh = \frac{P_0}{\rho} + \frac{v^2}{2},$$

где P_0 — атмосферное давление, а высота h — отсчитывается от уровня отверстия. Отсюда получаем

$$v = \sqrt{2gh}. \qquad (95.1)$$

Это — *формула Торричелли* (по имени итальянского физика и математика Эванджелисты Торричелли (1608—1647)). Она показыва-

*) Это не совсем так, так как остается некоторое сжатие, обусловленное силами поверхностного натяжения.

ет, что при истечении жидкость приобретает такую скорость, какую получило бы тело, свободно падающее с высоты h. Поэтому если изогнуть трубку и направить струю вертикально вверх или под малым углом к вертикали, то в наивысшей своей точке она достигнет уровня жидкости в сосуде. В действительности высота поднятия струи будет несколько меньше из-за трения и сопротивления воздуха, которые при выводе уравнения Бернулли не учитывались.

2. Подсчитаем импульс, уносимый ежесекундно вытекающей струей. Пусть струя вытекает горизонтально через небольшое отверстие в боковой стенке. Если S — площадь отверстия, то ежесекундно вытекает масса жидкости $\rho v S$. Она уносит импульс $mv = \rho v^2 S$, или в силу (95.1) $mv = 2\rho g h S$. Благодаря этому сосуд с жидкостью получает отдачу $F = 2\rho g h S$. Если отверстие закрыть пробкой, то сосуд будет оставаться на месте. Значит, горизонтальные силы давления жидкости, действующие на боковые стенки сосуда, уравновешиваются. Снова откроем отверстие. Тогда из правой боковой стенки будет удален участок площадью S. Если бы состояние жидкости при этом не изменилось, то сила давления жидкости на правую стенку уменьшилось бы на $PS = \rho g h S$. На самом деле ее уменьшение вдвое больше и составляет $2\rho g h S$. Это объясняется *перераспределением давления*, которое происходит при переходе от состояния покоя жидкости к состоянию установившегося движения. Конечно, этот переход совершается не мгновенно. Если мгновенно удалить пробку, то в первый момент сила давления на правую стенку уменьшится только на $\rho g h S$. Затем в процессе установления течения уменьшение давления будет быстро, но непрерывно меняться от $\rho g h S$ до $2\rho g h S$.

ЗАДАЧИ

1. В вертикально стоящий цилиндрический сосуд налита идеальная жидкость до уровня H (относительно дна сосуда). Площадь дна сосуда равна S. Определить время t, за которое уровень жидкости в сосуде опустится до высоты h (относительно дна сосуда), если в дне сосуда сделано малое отверстие площадью σ. Определить также время T, за которое из сосуда выльется вся жидкость.

Ответ. $t = \frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{g}}\,(\sqrt{H} - \sqrt{h})$, $T = \frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2H}{g}}$.

2. Прямоугольная коробка плавает на поверхности воды, погружаясь под действием собственного веса на глубину h. Площадь дна коробки равна S, высота — H. Через какое время коробка утонет, если в центре дна ее проделать малое отверстие площади σ и с помощью боковых направляющих сохранять неизменной ориентацию коробки?

Ответ. $t = \frac{S}{\sigma}\frac{H-h}{\sqrt{2gh}}$.

3. Через какое время наполнится водой шаровая колба радиусом R, если в центре ее нижнего основания сделано малое отверстие площадью σ? Колба погружена в воду до нижнего основания ее горлышка.

Ответ. $t = \dfrac{16\pi R^2}{15\sigma}\sqrt{\dfrac{R}{g}}$.

4. На горизонтальной поверхности стола стоит цилиндрический сосуд, в который налита вода до уровня H (относительно поверхности стола). На какой высоте h (относительно поверхности стола) надо сделать малое отверстие в боковой стенке сосуда, чтобы струя воды встречала поверхность стола на максимальном расстоянии от сосуда? Вычислить это расстояние ($x_{\text{макс}}$).

Ответ. $h = H/2$, $x_{\text{макс}} = H$.

5. Определить форму сосуда, чтобы уровень жидкости в нем опускался с постоянной скоростью, если в центральной точке дна проделать малое отверстие.

Ответ. Площадь горизонтального поперечного сечения сосуда должна быть пропорциональна корню квадратному из расстояния этого сечения от отверстия. Если сосуд обладает осевой симметрией, то он должен иметь форму параболоида вращения четвертого порядка.

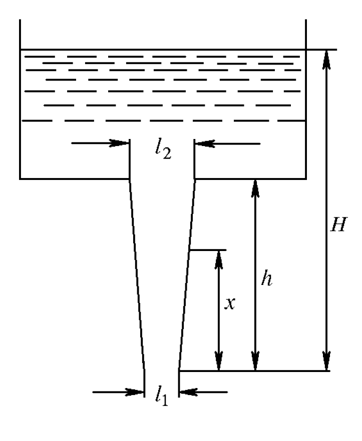


Рис. 252

6. В широкий сосуд с плоским дном налита идеальная жидкость. В дне сосуда сделана длинная и узкая щель, в которую вставлена насадка, образованная двумя плоскостями, наклоненными друг к другу под малым углом (рис. 252). Расстояние между ними в нижней части насадки равно l_1, а в верхней — l_2. Определить распределение давления жидкости в насадке, если атмосферное давление равно P_0. Длина насадки равна h, расстояние между нижним концом насадки и уровнем жидкости в сосуде равно H.

Ответ. $P = P_0 - \rho g x + \rho g H\left\{1 - \dfrac{h^2 l_1^2}{[hl_1 + x(l_2 - l_1)]^2}\right\}$, где x — расстояние по вертикали от нижнего конца насадки.

7. Вода вытекает из широкого резервуара через вертикальную коническую трубу, вставленную в его дно. Длина трубы равна l, диаметр верхнего основания d_1, нижнего основания d_2 ($d_1 > d_2$). При каком уровне H воды в резервуаре давление в верхнем сечении трубы будет равно P, если атмосферное давление равно P_0?

Ответ. $H = \dfrac{(P_0 - P)/\rho g - l(d_2/d_1)^4}{1 - (d_2/d_1)^4}$.

8. Определить скорость стационарного истечения через малое отверстие струи идеальной несжимаемой жидкости, находящейся под давлением в закрытом сосуде (рис. 253).

Ответ. $v = \sqrt{2(P - P_0)/\rho + 2gh}$ — атмосферное давление.

Рис. 253

9. Для того чтобы струя жидкости вытекала из сосуда с постоянной скоростью, применяют устройство, изображенное на рис. 254. Определить скорость истечения струи v в этом случае.

Ответ. Пока уровень жидкости в сосуде выше нижнего конца трубки AB, скорость истечения постоянна и равна $v = \sqrt{2gh}$. После этого скорость истечения начнет уменьшаться.

10. Цилиндрический сосуд с налитой в него идеальной несжимаемой жидкостью вращается вокруг своей геометрической оси, направленной вертикально, с угловой скоростью ω. Определить скорость истечения струи жидкости через малое отверстие в боковой стенке сосуда при установившемся движении жидкости (относительно сосуда).

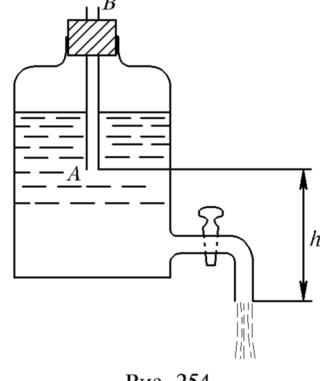


Рис. 254

Решение. Перейдем в систему отсчета, в которой жидкость покоится. В ней добавятся две силы инерции; центробежная и кориолисова. Кориолисова сила не совершает работы. Она лишь искривляет линии тока, но не сказывается на справедливости и форме общего уравнения Бернулли (94.2). Центробежная сила добавляет новый член к потенциальной энергии. Полная потенциальная энергия единицы массы жидкости будет $u = gz - {}^1/_2\, \omega^2 r^2$, так что уравнение (94.2) запишется в виде

$$\frac{1}{2}v^2 + gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + \frac{P}{\rho} = B = \text{const}, \qquad (95.2)$$

где v — относительная скорость жидкости (т. е. скорость относительно вращающейся системы отсчета). Постоянная Бернулли B одна и та же для всех линий тока, поскольку все они начинаются вблизи поверхности жидкости, где скорость v пренебрежимо мала. Применим уравнение (95.2) к линии тока AB, начинающейся на поверхности жидкости в точке A (рис. 255). Если начало координат поместить в точке A, то $z_A = r_A = v_A = 0$, $P_A = P_B = P_0$, $v_B = v$, $z_B = -h$, $r_B = R$, и мы получим

$$v = \sqrt{2(gh + \omega^2 R^2)}. \qquad (95.3)$$

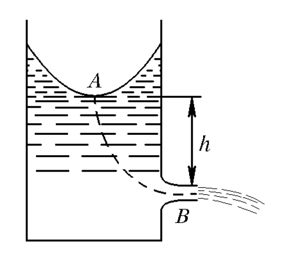


Рис. 255

Здесь h означает высоту наиболее низкой (центральной) точки A уровня жидкости относительно отверстия, а R — радиус цилиндра. Переход к неподвижной системе отсчета не представляет затруднений.

§ 96. ВЯЗКОСТЬ

1. В реальных жидкостях, помимо сил нормального давления, на границах движущихся элементов жидкости действуют еще *касательные силы вязкости*. Убедиться в существовании таких сил можно на простейших примерах. Так, уравнение Бернулли, выводимое в предположении, что силы вязкости отсутствуют, приводит

к следующему результату. Если жидкость течет по горизонтальной прямолинейной трубе постоянного поперечного сечения, то при стационарном течении давление жидкости одно и то же по всей длине трубы. В действительности давление жидкости в трубе падает в направлении ее течения. Для стационарности течения на концах трубы надо поддерживать постоянную разность давлений, уравновешивающую силы вязкости, возникающие при течении жидкости.

Другим примером может служить поведение жидкости во вращающемся сосуде. Если вертикальный цилиндрический сосуд, наполненный жидкостью, привести в равномерное вращение вокруг своей оси, то жидкость постепенно также приходит во вращение. Сначала начинают вращаться слои жидкости, прилегающие к стенкам сосуда. Затем вращение передается внутренним слоям, пока вся жидкость не начнет вращаться равномерно, как твердое тело. Таким образом, пока движение не установилось, происходит непрерывная передача вращения от сосуда к жидкости, а также от наружных слоев жидкости к внутренним. Такая передача вращения была бы невозможна, если бы не существовало касательных сил, действующих между жидкостью и стенкой сосуда, а также между слоями самой жидкости, вращающимися с различными угловыми скоростями. Эти касательные силы являются *силами трения — внутреннего*, если они действуют между слоями самой жидкости, и *внешнего*, если это силы взаимодействия между жидкостью и стенкой сосуда. Наибольший интерес представляют силы внутреннего трения, которые и являются *силами вязкости*. Вопрос о происхождения сил вязкости здесь мы оставляем открытым. Этим вопрос мы займемся в томе II при изучении молекулярной физики.

2. Для нахождения количественных законов вязкости лучше всего начать с простейшего примера. Рассмотрим две параллельные бесконечно длинные пластинки, между которыми находится слой жидкости. (Пластинки считаются бесконечными, если их длина и ширина значительно больше расстояния между ними.) Нижняя пластинка AB неподвижна, а верхняя CD движется относительно нее с постоянной скоростью $\mathbf{v}_0$ (рис. 256). Оказывается, что для поддержания равномерного движения пластинки CD к ней надо приложить постоянную силу $\mathbf{F}$, направленную в сторону движения. На пластинку AB должна действовать такая же, но противоположно направленная сила, чтобы удержать эту пластинку в покое. Модуль силы $\mathbf{F}$, как экспериментально было установлено еще Ньютоном, пропорционален скорости v_0, площади пластинки S и обратно про-

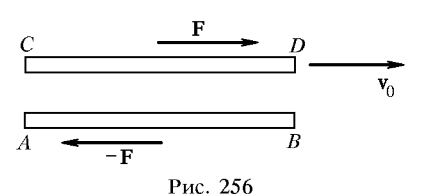


Рис. 256

порционален расстоянию h между пластинками:

$$F = \eta S \frac{v_0}{h}. \tag{96.1}$$

Здесь η — постоянная, называемая *вязкостью жидкости*. Она не зависит от материала пластинок и имеет разные значения для различных жидкостей. Для данной жидкости коэффициент η зависит от параметров, характеризующих ее внутреннее состояние, и в первую очередь от температуры. Таким образом, под вязкостью понимают как явление, так и коэффициент, характеризующий свойства жидкости.

Не обязательно, чтобы пластинка AB покоилась. Обе пластинки могут двигаться равномерно параллельно друг другу. Если скорость пластинки AB равна v_1, а пластинки CD — v_2, то вместо (96.1) можно написать более общую формулу

$$F = \eta S \frac{v_2 - v_1}{h}. \tag{96.2}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно перейти в систему отсчета, в которой пластинка AB покоится.

Заметим далее, что при равномерном движении пластинки CD жидкость должна действовать на нее с силой $-\mathbf{F}$, чтобы полная сила, приложенная к пластинке CD, обращалась в нуль. Значит, сама пластинка CD будет действовать на жидкость с силой $+\mathbf{F}$. Аналогично пластинка AB будет действовать на жидкость с силой $-\mathbf{F}$. Кроме того, исследования показали, что жидкость, обладающая вязкостью, прилипает к поверхности твердого тела, которое она обтекает. Иными словами, скорости частиц жидкости относительно поверхности твердого тела, на которой они находятся, равны нулю.

Поэтому в формуле (96.2) силы $\mathbf{F}$ и $-\mathbf{F}$ можно считать приложенными не к пластинке, а к границам заключенного между ними слоя жидкости. Точно так же v_1 и v_2 можно отождествить со скоростями движения тех же границ жидкого слоя. Тем самым при введении понятия вязкости η надобность в пластинках отпадает.

3. В целях обобщения формулы (96.2) допустим, что жидкость течет в направлении оси X, причем скорость течения зависит только от координаты y:

$$v_x = v_x(y), \quad v_y = v_z = 0.$$

Вырежем мысленно жидкий слой, ограниченный бесконечно близкими плоскостями, перпендикулярными к оси Y. Пусть эти плоскости пересекают ось Y в точках с ординатами y и $y + dy$ (рис. 257). Обозначим через τ_{yx} касательную силу, действующую на единицу площади верхней границы такого слоя со стороны вышележащей жидкости. Первый индекс y указывает направление внешней нормали к верхней границе слоя, а второй — индекс x — направление дейст-

вующей силы (ср. § 74, п. 2). Обобщая формулу (96.2), для касательного напряжения τ_{yx} напишем

$$\tau_{yx} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}. \tag{96.3}$$

Примем в согласии с опытом, что формула (96.3) справедлива не только для равномерного течения, но и для течения, скорость v_x которого зависит от времени. Касательное напряжение на нижней границе слоя τ_{-yx} направлено в сторону, противоположную τ_{yx}. Оно отличается от τ_{-yx} бесконечно мало в виду бесконечной малости толщины слоя dy ($\tau_{yx} = -\tau_{-yx}$).

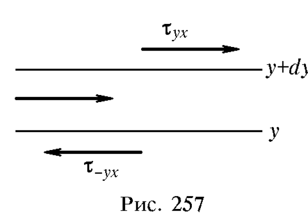


Рис. 257

4. Выделим теперь в том же параллельном потоке жидкости бесконечно малый параллелепипед $ABCD$ с ребрами, параллельными координатным осям (рис. 258). Тензор напряжений, как следует из уравнения моментов, симметричен (см. § 74, п. 4). Поэтому на основаниях параллелепипеда BC и AD, перпендикулярных к потоку, должны также существовать касательные напряжения, причем $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$. Таким образом, *касательные напряжения действуют не только в плоскостях, параллельных течению, но и в плоскостях, перпендикулярных ему.*

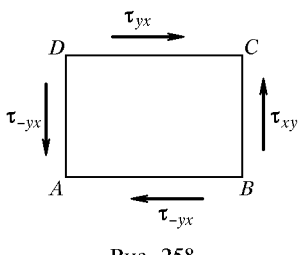


Рис. 258

Допустим теперь, что жидкость течет не параллельным потоком, а произвольным образом. Примем, что касательные составляющие тензора вязких напряжений зависят только от скоростей деформаций жидкости, а не от самих деформаций и их высших производных по времени. Ограничимся *линейным приближением*, т. е. будем пренебрегать квадратами и высшими степенями скоростей деформаций. В этом приближении касательные напряжения являются *линейными однородными функциями* скоростей деформаций $\frac{\partial v_x}{\partial y}, \frac{\partial v_y}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_z}{\partial y}, \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_x}{\partial z}$. Если бы из этих шести производных на границе CD была отлична от нуля только производная $\frac{\partial v_x}{\partial y}$, то вдоль оси X на этой границе действовало бы касательное напряжение $\tau'_{yx} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$. Если бы отличалась от нуля только производная $\frac{\partial v_y}{\partial x}$, то касательное напряжение имело бы то же направление и было бы равно $\tau''_{yx} = \eta \frac{\partial v_y}{\partial x}$. А если отличны от нуля обе производные $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ и

$\frac{\partial v_y}{\partial x}$, то касательное напряжение на границе CD будет $\tau_{yx} = \tau'_{yx} + \tau''_{yx} = \eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$. Это непосредственно следует из предположения о линейной однородной зависимости между касательными напряжениями и скоростями деформаций жидкости. Отсюда же следует, что найденное выражение для τ_{yx} сохранит свою силу, каковы бы ни были значения других производных $\frac{\partial v_y}{\partial z}$, $\frac{\partial v_z}{\partial y}$ и т. д. Рассуждая аналогично, найдем выражения и для всех остальных касательных напряжений, действующих на гранях параллелепипеда $ABCD$. Именно,

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right), \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \eta\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right), \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right). \end{aligned} \qquad (96.4)$$

Если жидкость несжимаема, то этих выражений достаточно для вывода дифференциальных уравнений движения жидкости. Если же жидкость сжимаема, то к ним надо добавить еще выражения для нормальных напряжений. Мы не будем приводить здесь эти выражения, так как они нам не понадобятся.

5. Рассмотрим частный случай, когда вязкая жидкость вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω. Линии тока имеют форму окружностей. Пусть AB — бесконечно малый участок линии тока длиной $rd\varphi$ (рис. 259). Касательное напряжение на цилиндрической поверхности, на которой лежит этот участок, очевидно, направлено в сторону вращения. Его следует обозначить через $\tau_{r\varphi}$. Первый индекс r указывает направление внешней нормали к цилиндрической поверхности, второй индекс φ — положительное направление касательного напряжения. В рассматриваемом случае роль dy играет dr, роль dx — длина $AB = rd\varphi$. Поэтому из (96.4) для касательного напряжения $\tau_{r\varphi}$ получаем

$$\tau_{r\varphi} = \eta\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{r\,\partial\varphi}\right).$$

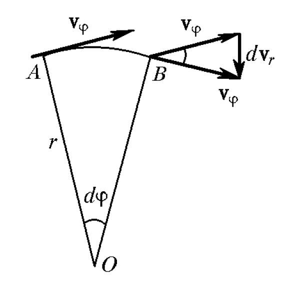


Рис. 259

В точке A радиальная составляющая скорости v равна нулю. В точке B появляется составляющая скорости вдоль радиуса OA, равная $dv_r = -v_\varphi d\varphi$, так что $\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} = -v_\varphi$, а потому

$$\tau_{r\varphi} = \eta\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\right). \qquad (96.5)$$

Подставляя сюда $v_\varphi = \omega r$, получим

$$\tau_{r\varphi} = \eta r \frac{\partial \omega}{\partial r}. \tag{96.6}$$

Вязкие напряжения исчезают, если $\frac{\partial \omega}{\partial r} = 0$, т. е. если жидкость вращается как целое, подобно твердому телу. Этого не получилось бы, если бы в формуле

$$\tau_{yx} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \tag{96.7}$$

не было учтено второе слагаемое.

6. В качестве примера на применение формулы (96.5) рассмотрим установившееся движение жидкости между двумя равномерно вращающимися коаксильными цилиндрами. Пусть l — высота цилиндров, R_1 и R_2 — их радиусы, а Ω_1 и Ω_2 — угловые скорости. Величину l будем предполагать очень большой по сравнению с толщиной зазора $R_2 - R_1$ между цилиндрами. Тогда цилиндры можно считать бесконечно длинными и отвлечься от осложняющих обстоятельств, вносимых их краями. Проведем в жидкости произвольную цилиндрическую поверхность радиусом r (рис. 260). Момент сил вязкости, действующих на этой поверхности, относительно оси вращения равен

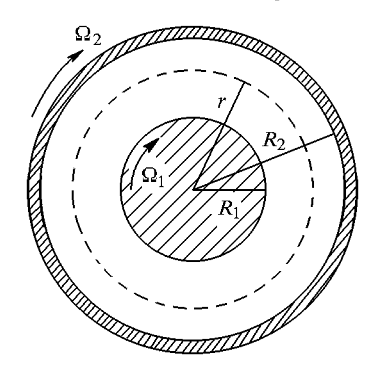


Рис. 260

$$M = 2\pi r^2 l \tau_{r\varphi} = 2\pi \eta l r^3 \frac{\partial \omega}{\partial r}.$$

При установившемся вращении жидкости этот момент не должен зависеть от радиуса r. Только при этом условии момент сил, действующих на жидкость, заключенную между двумя любыми коаксиальными цилиндрическими поверхностями, обращается в нуль, а момент импульса жидкости сохраняется. Таким образом, мы приходим к уравнению

$$r^3 \frac{\partial \omega}{\partial r} = \text{const}.$$

Обозначая входящую сюда постоянную $-2A$ и интегрируя, получим

$$\omega = \frac{A}{r^2} + C,$$

где C — постоянная интегрирования. Постоянные A и C определятся из граничных условий. Так как вязкая жидкость прилипает к поверхности тела, которое она обтекает, то угловая скорость ω при $r = R_1$ должна обращаться в Ω_1, а при $r = R_2$ — в Ω_2. Это приводит к двум уравнениям

$$\frac{A}{R_1^2} + C = \Omega_1, \quad \frac{A}{R_2^2} + C = \Omega_2,$$

решая которые, находим

$$A = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}(\Omega_1 - \Omega_2), \quad C = \frac{R_2^2 \Omega_2 - R_1^2 \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2}$$

и далее

$$\omega = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{r^2} + \frac{R_2^2 \Omega_2 - R_1^2 \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2}. \tag{96.8}$$

Момент сил вязкости, действующих на внутренний цилиндр, равен

$$M = 2\pi\eta l(-2A) = 4\pi\eta l \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}(\Omega_2 - \Omega_1). \tag{96.9}$$

Формула (96.9) лежит в основе практического метода измерения вязкости жидкостей и газов. Внутренний цилиндр подвешивается в исследуемой жидкости в вертикальном положении на тонкой нити, а наружный приводится в равномерное вращение с угловой скоростью $\Omega_2 = \Omega$. Измеряется угол закручивания нити φ, при котором внутренний цилиндр находится в равновесии. Это будет тогда, когда момент вязких напряжений M уравновешивается моментом закрученной нити $f\varphi$, где f — модуль кручения. Вязкость рассчитывается по формуле

$$\eta = \frac{f\varphi}{4\pi l} \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2 R_2^2 \Omega}. \tag{96.10}$$

ЗАДАЧИ

1. Введя локальную систему координат с началом в рассматриваемой точке пространства, убедиться непосредственным дифференцированием, что формула (96.7) при вращении жидкости переходит в формулу (96.5).

Решение. Проведем через рассматриваемую точку пространства A круговую линию тока. Поместим начало локальной системы координат в точку A, направив координатные оси X и Y, как указано на рис. 261. Для координат и компонентов скорости в точке B получим

$$x = r\sin\varphi, \quad y = r\cos\varphi - r_0,$$

$$v_x = v_\varphi \cos\varphi, \quad v_y = -v_\varphi \sin\varphi,$$

Рис. 261

где r_0 и r — радиусы-векторы точек A и B, а v_φ — скорость жидкости в точке B. Дифференцируя эти соотношения и полагая в окончательных результатах $\varphi = 0$ (точка A), получим в точке A

$$dx = r_0\, d\varphi, \quad dy = dr,$$

$$dv_x = dv_\varphi, \quad dv_y = -v_\varphi\, d\varphi.$$

Отсюда

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial r}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{v_\varphi}{r_0}.$$

После подстановки в (96.7) получаем (96.5).

2. Как изменится формула (96.9) в предельном случае, когда толщина зазора между цилиндрами $h = R_2 - R_1$ пренебрежимо мала по сравнению с радиусами R_1 и R_2?

Ответ. $M = \frac{2\pi\eta l R^3}{h}(\Omega_2 - \Omega_1)$. (96.11)

Эту формулу можно также получить, рассматривая слой жидкости между цилиндрами как плоскопараллельный и используя формулу (96.2). Это рекомендуется сделать читателю.

§ 97. СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ПО ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ТРУБЕ. ФОРМУЛА ПУАЗЕЙЛЯ

1. Пусть вязкая несжимаемая жидкость течет вдоль прямолинейной цилиндрической трубы радиусом R. Линии тока параллельны оси трубки. Если выделить произвольную бесконечно узкую трубку тока, то из условия несжимаемости следует, что скорость течения v будет одна и та же вдоль всей трубки тока — скорость жидкости не может меняться вдоль трубы. Но она, конечно может изменяться с изменением расстояния r от оси трубы. Таким образом, скорость жидкости v является функцией радиуса r.

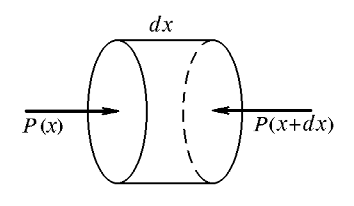


Рис. 262

Примем ось трубы за ось X, направленную в сторону течения. Выделим в трубе произвольную бесконечно короткую цилиндрическую часть длиной dx и радиусом r (рис. 262). На ее боковую поверхность в направлении движения действует касательная сила вязкости $dF = 2\pi r\eta \frac{dv}{dr}\,dx$. Кроме того, на основания цилиндра в том же направлении действует сила разности давлений $dF_1 = \pi r^2[P(x) - P(x+dx)] = -\pi r^2 \frac{dP}{dx}\,dx$. При стационарном течении сумма этих двух сил должна обращаться в нуль, а потому

$$2\eta \frac{dv}{dr} = r\,\frac{dP}{dx}.$$

Скорость $v(r)$, а с ней и производная $\frac{dv}{dr}$ не меняются с изменением x. Поэтому должна быть постоянной и производная $\frac{dP}{dx}$, причем эта производная должна быть равна $(P_2 - P_1)/l$, где P_1 — давление на входе трубы, P_2 — на выходе, а l — длины трубы. В результате приходим к уравнению

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta l}\,r. \tag{97.1}$$

Интегрируя его, получим

$$v = -\frac{P_1 - P_2}{4\eta l} r^2 + C.$$

Постоянная интегрирования C определится из условия, что на стенке трубы, т. е. при $r = R$, скорость v должна обращаться в нуль. Это дает

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l}(R^2 - r^2). \tag{97.2}$$

Скорость v максимальна на оси трубы, где она достигает значения

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} R^2. \tag{97.3}$$

При удалении от оси скорость v меняется по параболическому закону.

2. Подсчитаем *расход жидкости*, т. е. количество ее, ежесекундно протекающее через поперечное сечение трубы. Масса жидкости, ежесекундно протекающей через кольцевую площадку с внутренним радиусом r и внешним $r + dr$, равна $dQ = 2\pi r\, dr \cdot \rho v$. Подставляя сюда выражение для v и интегрируя, находим искомый расход жидкости

$$Q = \pi\rho \frac{P_1 - P_2}{2\eta l} \int\limits_0^R (R^2 - r^2) r\, dr,$$

или

$$Q = \pi\rho \frac{P_1 - P_2}{8\eta l} R^4. \tag{97.4}$$

Расход жидкости пропорционален разности давлений $P_1 - P_2$, четвертой степени радиуса трубы и обратно пропорционален длине трубы и вязкости жидкости. Эти закономерности были установлены экспериментально и независимо друг от друга в 1839 г. Гагеном и в 1840 г. французским физиком Жаном Пуазейлем (1799—1869). Гаген исследовал движение воды в трубах, Пуазейль — течение жидкостей в каппилярах. Формула (97.4) называется *формулой Пуазейля*, хотя сам Пуазейль и не выводил ее, он исследовал вопрос только экспериментально. На формуле Пуазейля основан один из экспериментальных методов определения вязкости жидкостей.

Формулу (97.4) можно представить в виде $Q = \rho\pi R^2 \cdot v_0/2$. С другой стороны, можно ввести *среднюю скорость потока* $\bar{v}$, определив ее с помощью соотношения $Q = \rho\pi R^2 \bar{v}$. Сравнивая эти два выражения, получаем

$$\bar{v} = \frac{1}{2} v_0. \tag{97.5}$$

Формула Пуазейля справедлива только для *ламинарных течений* жидкости. *Ламинарным* называется такое течение, когда части-

цы жидкости движутся вдоль прямолинейных траекторий, параллельных оси трубы. (Более общее определение, применимое для любых течений, дается в § 98.) При больших скоростях ламинарное течение становится неустойчивым и переходит в *турбулентное течение*, с которым мы познакомимся в § 98. К турбулентным течениям формула Пуазейля неприменима.

3. Кинетическая энергия, ежесекундно переносимая потоком жидкости через поперечное сечение трубы, определяется выражением

$$K = \int_0^R \frac{\rho v^2}{2} \cdot 2\pi r v \, dr.$$

Подставив сюда значение для v и выполнив интегрирование, получим

$$K = \frac{1}{4} Q v_0^2 = Q(\overline{v})^2. \qquad (97.6)$$

Работа, ежесекундно производимая над жидкостью разностью давлений $P_1 - P_2$, определяется выражением $A = \int v\,(P_1 - P_2) \cdot 2\pi r\, dr$, или

$$A = \frac{P_1 - P_2}{\rho} Q. \qquad (97.7)$$

Такую же по значению, но противоположную по знаку работу производят силы вязкости, так как при стационарном течении кинетическая энергия жидкости остается неизменной: $A' = -A$. С помощью формулы (97.3) можно исключить разность давлений $P_1 - P_2$ и получить

$$A' = -\frac{4\eta v_0 l}{\rho R^2} Q. \qquad (97.8)$$

Полученные формулы позволяют ответить на вопрос, когда при течении жидкости по трубе можно пренебречь силами вязкости и, следовательно, применять уравнение Бернулли. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы потеря кинетической энергии жидкости, обусловленная действием сил вязкости, была пренебрежимо мала по сравнению с кинетической энергией самой жидкости, т. е. $|A'| \ll K$. Это приводит к условию

$$\frac{v_0 R^2}{16 \nu l} \gg 1. \qquad (97.9)$$

Здесь буквой ν обозначена так называемая *кинематическая вязкость*, т. е. отношение

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \qquad (97.10)$$

Величину η, когда надо отличать ее от ν, называют *динамической вязкостью*.

4. Законы, установленные Пуазейлем, могут быть в общем виде получены методом размерностей. Достоинство этого метода состоит

в том, что он применим к прямолинейным трубам произвольного поперечного сечения, а не только к цилиндрическим трубам. Требуется только, чтобы нормальные поперечные сечения всех труб были геометрически подобраны. Эти сечения могут отличаться друг от друга только размерами. Для каждого поперечного сечения можно установить *характерный размер.* За таковой можно принять, например, его периметр или корень квадратный из площади. Можно также поперечные сечения всех труб геометрически подобно рассечь на две части прямолинейными отрезками. Длины таких отрезков тоже могут служить характерными размерами. Например, в случае трубы эллиптического сечения за характерный размер можно взять длину большой или малой оси соответствующего эллиптического сечения. Но можно взять и другие отрезки, характеризующие размеры эллипса. Заданием характерного размера определяются и все прочие размеры поперечного сечения трубы.

При выводе законов Пуазейля, равно как при исследовании любого вопроса методом размерностей, основной пункт состоит в том, чтобы установить физические величины, связанные между собой функциональной зависимостью. При стационарном ламинарном течении жидкости по трубе силы вязкости уравновешиваются градиентами давлений. В уравнения движения входят эти градиенты, а потому разность давлений $P_1 - P_2$ и длина трубы l могут войти только в комбинации $(P_1 - P_2)/l$. Поскольку жидкость движется без ускорения, характер течения не может зависеть от плотности жидкости. Плотность ρ и расход жидкости Q могут войти лишь в комбинации Q/ρ, так как последняя есть чисто геометрическая величина и равна объему жидкости, ежесекундно протекающему через поперечное сечение трубы. Добавив сюда еще вязкость жидкости η и характерный поперечный размер трубы a, получим четыре величины.

$$\frac{Q}{\rho}, \quad \frac{P_1-P_2}{l}, \quad a, \quad \eta,$$

между которыми должна существовать функциональная связь. Вместо a можно взять площадь поперечного сечения трубы S. Применяя общий метод нахождения безразмерных комбинаций (см. § 87, п. 6), нетрудно убедиться, что из рассматриваемых величин можно составить только одну независимую безразмерную комбинацию, а именно

$$\frac{Q}{\rho} \frac{l}{P_1-P_2} \frac{\eta}{S^2}.$$

Следовательно, такая комбинация должна быть постоянной. Обозначая эту постоянную через C, получим

$$Q = C \frac{P_1-P_2}{l\eta} \rho S^2. \tag{97.11}$$

В этой формуле содержатся все законы Пуазейля. Она является обобщением формулы (97.4) на случай прямолинейных труб произ-

вольного поперечного сечения. Постоянная C зависит от формы поперечного сечения трубы и не может быть определена методами теории размерности. Для ее нахождения необходимо обратиться к опыту или к динамическим методам, т. е. к интегрированию уравнений движения.

ЗАДАЧИ

1. Определить стационарное течение вдоль оси и расход несжимаемой жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами с внутренним радиусом R_1, внешним R_2 и длиной l.

Решение. Рассмотрим кольцевой слой жидкости с внутренним радиусом r и внешним $r + dr$. Сила вязкости, действующая на него в направлении течения, равна

$$2\pi l\eta\left[\left(r\frac{dv}{dr}\right)_{r+dr} - \left(r\frac{dv}{dr}\right)_r\right] = 2\pi l\eta\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)dr.$$

(Индексы r и $r + dr$ означают, что величины, заключенные в круглые скобки, должны быть вычислены при значениях радиусов r и $r + dr$ соответственно.) В том же направлении действует сила разности давлений $(P_1 - P_2)\cdot 2\pi r\,dr$. При стационарном течении сумма обеих сил обращается в нуль. Это приводит к уравнению

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = -\frac{P_1-P_2}{l\eta}r. \tag{97.12}$$

Решение его, обращающееся в нуль при $r = R_1$ и $r = R_2$, есть

$$v = \frac{P_1-P_2}{4l\eta}\left\{R_2^2 - r^2 + \frac{R_2^2-R_1^2}{\ln(R_2/R_1)}\ln\frac{r}{R_2}\right\}.$$

Расход жидкости

$$Q = \frac{\pi\rho(P_1-P_2)}{8\eta l}\left\{R_2^4 - R_1^4 - \frac{(R_2^2-R_1^2)^2}{\ln(R_2/R_1)}\right\}.$$

2. Показать, что при ламинарном стационарном течении несжимаемой жидкости вдоль прямолинейной трубы с произвольным поперечным сечением и длиной l скорость жидкости v удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{P_1-P_2}{l\eta} = 0. \tag{97.13}$$

(Координатная плоскость YZ перпендикулярна к оси трубы, оси Y и Z взаимно перпендикулярны и ориентированы произвольно.)

Указание. Взять произвольный бесконечно тонкий прямоугольный параллелепипед жидкости длиной l с ребрами, параллельными координатным осям, и написать условие обращения в нуль действующих на него сил вязкости и разности давлений, подобно тому как это делалось при выводе уравнения (97.12).

3. Определить скорость течения и расход жидкости в трубе эллиптического сечения.

Р е ш е н и е. Эта задача относится к типу задач, решаемых *методом угадывания*. Угадывается вид решения дифференциального уравнения (97.13), а затем коэффициенты в этом решении подбираются так, чтобы удовлетворить граничному условию на стенке трубы: $v = 0$. Направим координатные оси Y и Z вдоль главных осей нормального эллиптического поперечного сечения трубы и будем искать решение в виде $v = Ay^2 + Bz^2 + v_0$. Это выражение удовлетворяет уравнению (97.13), если

$$2A + 2B = -\frac{P_1 - P_2}{l\eta}.$$

На внутренней поверхности эллиптической трубы $v = 0$, т. е. $Ay^2 + Bz^2 + v_0 = 0$. Это уравнение должно переходить в уравнение эллиптического сечения трубы $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$, а потому

$$A = -\frac{v_0}{a^2}, \quad B = -\frac{v_0}{b^2}.$$

Для определения постоянных A, B, v_0 получилось три линейных уравнения. Решая их, находим

$$v_0 = \frac{P_1 - P_2}{2l\eta} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}, \tag{97.14}$$

$$v = v_0\left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right). \tag{97.15}$$

Постоянная v_0 есть, очевидно, скорость течения на оси трубы.

Вычислим теперь расход жидкости. Поверхности, на которых скорость v постоянна, суть эллиптические цилиндры

$$\frac{y^2}{a'^2} + \frac{z^2}{b'^2} = 1,$$

полуоси которых определяются соотношениями

$$a'^2 = a^2 \frac{v_0 - v}{v_0}, \quad b'^2 = b^2 \frac{v_0 - v}{v_0}.$$

Возьмем два таких эллиптических цилиндра с бесконечно близкими значениями параметра v. Площадь нормального сечения между ними $dS = d(\pi a' b') = -\pi \frac{ab}{v_0} dv$. Расход жидкости:

$$Q = \rho \int v\, dS = -\rho \frac{\pi ab}{v_0} \int_{v_0}^{0} v\, dv,$$

или

$$Q = \frac{1}{2} \rho \pi a b v_0. \tag{97.16}$$

§ 98. ЗАКОНЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ

1. Рассмотрим поток жидкости, обтекающий какое-нибудь тело или систему тел. Наряду с этой системой можно ввести бесконечное

множество *подобных* и *подобно расположенных тел*, обтекаемых другими жидкостями. Каким условиям должны удовлетворять параметры потока и постоянные, характеризующие свойства жидкостей (плотность, вязкость и пр.), чтобы оба потока были *механически подобны*? Если подобие имеет место, то, зная картину течения для первой системы тел, можно однозначно предсказать течение жидкости и для другой, геометрически подобной, системы тел. Это имеет важное значение в судостроении и самолетостроении. Вместо реальных кораблей или самолетов испытывают их *уменьшенные геометрически подобные модели*, а затем путем пересчета определяется поведение реальных систем. Простейший метод решения поставленной задачи дает теория размерностей.

Исследуем вопрос в общем виде. Пусть $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ — радиус-вектор и скорость жидкости в подобно расположенных точках, l — *характерный размер*, а v_0 — *характерная скорость потока*, например скорость жидкости, с которой она из «бесконечности» натекает на рассматриваемую систему тел. Свойства жидкости характеризуются ее плотностью ρ, вязкостью η и сжимаемостью. Вместо сжимаемости можно пользоваться скоростью звука в рассматриваемой жидкости. Если существенна сила тяжести, то последняя характеризуется ускорением свободного падения g. Если течение не стационарно, то надо ввести какое-то *характерное время* τ, за которое происходит заметное изменение течения. Ввиду наличия уравнений движения между величинами

$$\mathbf{v},\ v_0,\ \mathbf{r},\ l,\ \rho,\ \eta,\ c,\ g,\ \tau$$

должна существовать функциональная связь. Из них можно составить шесть независимых безразмерных комбинаций. Сюда относятся два отношения $\mathbf{v}/v_0$, $\mathbf{r}/l$ и еще четыре безразмерных числа:

$$\mathsf{Re} = \frac{\rho l v_0}{\eta} = \frac{l v_0}{\nu}, \tag{98.1}$$

$$\mathsf{F} = \frac{v_0^2}{gl}, \tag{98.2}$$

$$\mathsf{M} = \frac{v_0}{c}, \tag{98.3}$$

$$\mathsf{S} = \frac{v_0 \tau}{l}. \tag{98.4}$$

Согласно правилу размерности одна из этих безразмерных комбинаций является функцией остальных, например

$$\frac{\mathbf{v}}{v_0} = \mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{r}}{l},\ \mathsf{Re},\ \mathsf{F},\ \mathsf{M},\ \mathsf{S}\right) \tag{98.5}$$

или

$$\mathbf{v} = v_0 \mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{r}}{l},\ \mathsf{Re},\ \mathsf{F},\ \mathsf{M},\ \mathsf{S}\right) \tag{98.6}$$

Если для двух течений пять из шести безразмерных комбинаций, перечисленных выше, совпадают, то будут совпадать и шестые. Это — общий *закон подобия течений*, а сами течения называются *механически* или *гидродинамически подобными*.

2. Величина (98.1) называется *числом Рейнольдса* (по имени английского физика Осборна Рейнольдса (1842—1912), величина (96.2) — *числом Фруда* (по имени английского ученого Фруда), величина (98.3) — *числом Маха* (по имени австрийского физика Эрнста Маха (1838—1916)), величина (98.4) — *числом Струхаля* (по имени чешского физика В. Струхаля).

Физический смысл чисел Маха и Струхаля не требует пояснений. На физическом смысле чисел Рейнольдса и Фруда необходимо остановится подробнее. При этом само собой станет ясным, что оба эти числа безразмерные. *По порядку величины число Рейнольдса есть отношение кинетической энергии жидкости к потере ее, обусловленной работой сил вязкости на характерной длине.* Действительно, кинетическая энергия жидкости $K \sim 1/2\, \rho v_0^2 l^3$. Силу вязкости найдем, умножая вязкое напряжение $\eta v_0/l$ на характерную площадь l^2. Это дает $\eta v_0 l$. Произведение этой силы на характерную длину определяет по порядку величины работу сил вязкости $A \sim \eta v_0 l^2$. Отношение кинетической энергии K к работе A будет

$$\frac{K}{A} \sim \frac{\rho l v_0}{\eta},$$

а это и есть число Рейнольдса. *Число Рейнольдса, таким образом, определяет относительную роль инерции и вязкости жидкости при течении. При больших числах Рейнольдса основную роль играет инерция, при малых — вязкость.*

Число Рейнольдса, конечно, определено не вполне четко, поскольку оно содержит характерную длину и характерную скорость, которые сами определены не четко. Это число, как и все остальные безразмерные числа в законе подобия, определено лишь по порядку величины. Если размеры тела в разных направлениях примерно одинаковы, то особой неопределенности не возникает. Если же это не так, то в качестве характерной длины могут быть выбраны разные величины, которые могут отличаться друг от друга значительно. Например, при течении жидкости по трубе за характерную длину можно взять длину трубы, ее радиус или какую-либо промежуточную величину. Соответствующие числа Рейнольдса могут отличаться на много порядков. Какое из этих чисел взять — зависит от поставленной задачи. Так, в предыдущем параграфе было выведено условие (97.9), при выполнении которого силами вязкости можно пренебречь. Величину, стоящую слева в формуле (97.9), можно рассматривать как число Рейнольдса, если за характерную длину принять $\frac{1}{16}\frac{R^2}{l}$. В рассматриваемом случае характерный раз-

мер зависит как от длины трубы, так и от ее радиуса. При таком выборе получается условие (97.9), справедливое для всех, а не только геометрически подобных круглых труб (т. е. труб с постоянным отношением R/l). Если труба длинная ($l \gg 16R$), то достаточное условие можно записать в виде

$$v_0 R/\nu \gg 1, \tag{98.7}$$

т. е. за характерную длину можно принять радиус R. Но мы совершили бы ошибку, если бы вместо (98.7) взяли условие $v_0 l/\nu \gg 1$.

Аналогичный смысл имеет *число Фруда* F. *Оно по порядку величины определяет отношение кинетической энергии жидкости к приращению ее, обусловленному работой силы тяжести на пути, равному характерной длине. Чем больше число Фруда, тем больше роль инерции по сравнению с тяжестью, и наоборот.*

3. Для стационарных течений характерное время τ, а с ним и число Струхаля обращаются в бесконечность. Поэтому это число выпадает из соотношения (98.6). То же происходит с чилом Маха в несжимаемых жидкостях, для которых оно обращается в нуль. Таким образом, для стационарных течений несжимаемых жидкостей соотношение (98.6) переходит в

$$\mathbf{v} = v_0 \mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{r}}{l}, \mathsf{Re}, \mathsf{F}\right) \tag{98.8}$$

Течения подобны, если они имеют одинаковые числа Рейнольдса и Фруда.

Следует, однако, заметить, что если при испытаниях на моделях применяется та же жидкость, в которой должна двигаться реальная система, то критерии подобия Рейнольдса и Фруда несовместимы друг с другом. В самом деле, запишем эти критерии в виде

$$\frac{l_1 v_1}{\nu_1} = \frac{l_2 v_2}{\nu_2}, \quad \frac{v_1^2}{l_1 g_1} = \frac{v_2^2}{l_2 g_2},$$

где индекс 1 относится к реальной системе тел, а индекс 2 — к ее уменьшенной или увеличенной модели. Перемножая эти соотношения, получим

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{g_1}{g_2}\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^3 = \left(\frac{g_2}{g_1}\right)^{1/2}\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{3/2}. \tag{98.9}$$

Варьирование ускорения свободного падения g принципиально возможно, но практически нереально. Однако и при одинаковых g можно принципиально удовлетворить обоим критериям подобия. Для этого надо применять жидкости с различными кинематическими вязкостями, удовлетворяющими соотношению (98.9). В большинстве случаев это почти невозможно. При испытаниях на моделях практически может выполняться только один критерий подобия: либо Рейнольдса, либо Фруда. В некоторых случаях этого достаточно. Допустим, например, что число Рейнольдса велико, а число Фруда невелико или поряд-

ка единицы. Тогда движение жидкости в основном будет определяться инерцией и тяжестью. Вариации числа Рейнольдса на нем будут сказываться мало. В этом случае для подобия течения необходимо выполнение лишь одного *критерия Фруда*. Напротив, при малых числах Рейнольдса и больших числах Фруда определяющую роль играют инерция и вязкость; влияние тяжести незначительно. Подобие будет иметь место при *равенстве чисел Рейнольдса*.

4. Чтобы исследовать поведение самолета во время полета, например определить действующие на него силы, модель самолета закрепляют в *аэродинамической трубе*, в которой создается равномерный поток воздуха. В основе этого метода лежит *принцип относительности*, согласно которому ход явления может зависеть только от относительного движения самолета и воздуха. Современные аэродинамические трубы представляют грандиозные сооружения, в которых скорость воздуха может быть доведена до сотен метров в секунду. Значительное уменьшение размеров испытываемой модели неосуществимо, и вот почему. Для сохранения аэродинамического подобия необходимо равенство чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} = vl/\nu$, так что при уменьшении размеров модели в несколько раз во столько же раз должна быть увеличена скорость потока. Но при больших скоростях начинает существенно сказываться сжимаемость воздуха, нарушающая аэродинамическое подобие. Поэтому при больших скоростях, интересующих современную авиацию, приходится применять модели либо в натуральную величину, либо лишь незначительно уменьшенные. Вот почему сечения аэродинамических труб должны быть очень большими, чтобы в них можно было помещать отдельные части самолета или даже целые самолеты. Для преодоления указанной трудности в принципе можно идти по пути увеличения плотности воздуха, делая аэродинамические трубы геометрическими. Дело в том, что динамическая вязкость газа η практически от плотности газа не зависит (при заданной температуре), а потому кинематическая вязкость $\nu = \eta/\rho$ обратно пропорциональна плотности. Увеличивая плотность ρ, можно сохранить аэродинамическое подобие и для значительно уменьшенных моделей без существенного увеличения и даже без изменения скорости потока v. Несмотря на сложность построения геометрических аэродинамических труб, этот метод все же получил практические применения. Разумеется, он не устраняет трудности, когда скорость потока приближается к скорости звука или превосходит ее, так как в этом случае для сохранения аэродинамического подобия требуется равенство не только чисел Рейнольдса, но и чисел Маха.

ЗАДАЧИ

1. Модель корабля $l_1 = 5$ м приводится в движение мотором с мощностью $P_1 = 5$ л. с. со скоростью $v_1 = 15$ км/ч. Какой мощности P требуется мотор для приведения в движение корабля длиной $l = 80$ м, геометрически подобного модели, если его движение гидродинамически подобно движению модели? Определить скорость корабля v при таких условиях.

Решение. Кинематическая вязкость воды $\nu = 0{,}010$ см^2/с. Вычисляя числа Рейнольдса и Фруда для модели, получаем

$$\mathrm{Re} = \frac{l_1 v_1}{\nu_1} = 2{,}1 \cdot 10^7, \qquad \mathrm{F} = \frac{v_1^2}{g l_1} = 0{,}022.$$

Определяющую роль играет число Фруда, влияние числа Рейнольдса не очень существенно. Из равенства чисел Фруда получаем $v = v_1 (l/l_1)^{1/2} = 60$ км/ч. Далее из соображений размерности находим

$$P = \rho v^2 l^{5/2} g^{1/2} f(\mathsf{Re}, \mathsf{F}) = \rho \mathsf{F} l^{7/2} g^{3/2} f(\mathsf{Re}, \mathsf{F}).$$

Отсюда, если пренебречь влиянием числа Рейнольдса

$$P = P_1 (l/l_1)^{7/2} \approx 80\ 000 \text{ л. с.}$$

2. Во сколько раз следует изменить угловую скорость вращения вертикального винта вертолета и мощность его двигателя, чтобы подъемная сила осталась неизменной при замене винта и самого корпуса вертолета геометрически подобными им, но с линейными размерами, увеличенными в α раз?

Решение. Из соображений размерности следует, что подъемная сила должна выражаться формулой

$$F = \rho l^4 \omega^2 f_1 (l^2 \omega \rho / \eta),$$

а мощность — формулой

$$P = \rho l^5 \omega^3 f_2 (l^2 \omega \rho / \eta).$$

Поскольку плотность воздуха и его вязкость в обоих случаях одинаковы, подъемная сила не изменится, если не изменятся значения функции f_1 и коэффициента при ней. Условием этого является $l_1^2 \omega_1 = l_2^2 \omega_2$, откуда

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

и далее

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{l_2^5 \omega_2^3}{l_1^5 \omega_2^3} = \frac{l_2 \omega_2}{l_1 \omega_1} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{\alpha}.$$

§ 99. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

1. До сих пор при изучении движений жидкости мы имели в виду так называемые *ламинарные* (слоистые) течения жидкостей и газов. Особенностью ламинарного течения является его *регулярность*. Течение при сохранении ламинарности может изменяться лишь вследствие изменения сил, действующих на жидкость, или внешних условий, в которых она находится. Так, при ламинарном течении в прямолинейной трубе постоянного поперечного сечения частицы жидкости движутся вдоль прямолинейных траекторий, параллельных оси трубы. Однако при достаточно больших скоростях ламинарное течение оказывается *неустойчивым* и переходит в так называемое *турбулентное течение*. Турбулентное течение — это такое течение, гидродинамические характеристики которого (скорость, давление, а для газов — плотность и температура) быстро и нерегулярно изменяются во времени (флуктуируют). Частицы жидкости совершают нерегулярные, неустановившиеся движения по сложным траекториям, что

приводит к интенсивному перемешиванию между слоями движущейся жидкости. Примерами могут служить движение воды в бурном горном потоке, водопаде или за кормой быстроплывущего корабля, движение дыма, выходящего из фабричной трубы, и т. п. Такие быстрые и нерегулярные изменения происходят не из-за изменений действующих сил или внешних условий, а вследствие неустойчивости ламинарных течений при определенных условиях. Неустойчивость ламинарных течений и возникновение турбулентности — очень сложные вопросы, еще далекие от окончательного решения. Рассмотрение их далеко выходит за рамки нашего курса. Тем не менее имеет смысл привести простейший пример, когда вопрос об устойчивости ламинарного течения решается элементарно.

2. Таким примером может служить установившееся ламинарное движение жидкости между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами при больших числах Рейнольдса (см. § 96). При больших числах Рейнольдса вязкостью жидкости можно пренебречь, считая жидкость идеальной. Для идеальных жидкостей из-за отсутствия тангенциальных напряжений зависимость скорости от расстояния до оси вращения может быть произвольной: $v = v(r)$. Но уже ничтожной вязкости достаточно, чтобы спустя некоторое время после начала движения установилось вполне определенное распределение скоростей вдоль радиуса, а именно (96.8).

Однако для последующих рассуждений конкретизация вида функции $v = v(r)$ не обязательна. В невозмущенном потоке частицы жидкости движутся по окружностям с определенной угловой скоростью $\omega(r) = \frac{v(r)}{r}$. Рассмотрим какой-либо элемент жидкости, вращающийся по окружности радиуса r_0. На него действует центростремительная сила $F_0 = m\omega^2(r_0)r_0$, создаваемая разностью давлений окружающей жидкости. Введя момент импульса $L(r) = mr^2\omega$, запишем выражение для силы в виде $F_0 = \frac{L^2(r_0)}{mr_0^3}$. Допустим теперь, что под влиянием какого-то бесконечно малого случайного толчка рассматриваемый элемент жидкости сместился в новое положение, находящееся на расстоянии r от оси вращения. Можно предполагать, что толчок был совершен в направлении от или к оси вращения, так как если движение жидкости неустойчиво по отношению к возмущениям специального вида, то оно неустойчиво вообще. Момент силы такого толчка относительно оси вращения равен нулю. Результирующая сил давления окружающей жидкости также не дает момента, поскольку она направлена к оси вращения. Поэтому при смещении элемента момент его импульса сохранится, т. е. и в новом положении будет $L(r_0)$. Чтобы сместившийся элемент равномерно вращался по окружности радиуса r, на него должна действовать центростремительная сила $F_0' = \frac{L^2(r_0)}{mr^3}$. Между тем единственная сила, которой он подвержен, есть сила давления окружающей жидкости, а она равна $F = \frac{L^2(r)}{mr^3}$. Если эта сила не равна F_0', то элемент жидкости не удержится на новой круговой орбите, куда он попал. Он будет либо возвращаться к исходной орбите, либо удаляться от нее.

В первом случае движение жидкости устойчиво, во втором — неустойчиво. Допустим, например, что $r > r_0$. Если $F > F_0'$, т. е. $L^2(r) > L^2(r_0)$, то давление окружающей жидкости больше того, которое требуется для удержания сместившегося элемента жидкости на окружности радиуса r. Сместившийся элемент вернется на исходную окружность — движение устойчиво. Если же $F < F_0'$, т. е. $L^2(r) < L^2(r_0)$, то силы давления окружающей жидкости недостаточно, чтобы удержать элемент на окружности радиуса r. Элемент жидкости будет уходить еще дальше — движение неустойчивое. Если $r < r_0$, то, рассуждая аналогично, найдем, что при $L^2(r) < L^2(r_0)$ движение устойчиво, а при $L^2(r) > L^2(r_0)$ — неустойчиво. В обоих случаях критерий устойчивости можно выразить неравенством

$$\frac{dL^2}{dr} > 0, \tag{99.1}$$

или

$$\frac{d}{dr}(r^4\omega^2) > 0. \tag{99.2}$$

3. Таким образом, для устойчивости необходимо, чтобы величина $r^4\omega^2$ монотонно возрастала при удалении от оси вращения. Если цилиндры вращаются в противоположные стороны, то это невозможно. Действительно, в этом случае на поверхностях цилиндров угловая скорость ω имеет противоположные знаки. Так как ω — непрерывная функция r, то она должна обращаться в нуль в какой-то промежуточной точке. В этой точке величина $r^4\omega^2$ равна нулю, т. е. достигает минимума. По разные стороны от нее производная $\frac{d}{dr}(r^4\omega^2)$ имеет противоположные знаки, т. е. условие (99.2) не может выполняться. Значит, если цилиндры вращаются в противоположные стороны, то движение жидкости неустойчиво. Оно будет неустойчивым и в том случае, когда внутренний цилиндр вращается, а наружный покоится. Действительно, на поверхности наружного цилиндра $r^4\omega^2 = 0$, а на поверхности внутреннего $r^2\omega^2 > 0$. Поэтому с увеличением r величина $r^4\omega^2$ не может монотонно возрастать, и движение неустойчиво. Если же вращается наружный цилиндр, а внутренний покоится, то установившееся вращение жидкости будет устойчивым. В этом случае с удалением от оси вращения угловая скорость ω возрастает, а потому тем более будет возрастать $r^4\omega^2$. Теперь становится понятным, почему при измерении вязкости по методу, описанному в конце § 96, должен вращаться наружный, а не внутренний цилиндр. В противном случае вращение жидкости между цилиндрами было бы неустойчивым.

4. Приведенное исследование было выполнено без учета вязкости жидкости. Силы вязкости, уменьшая кинетическую энергию жидкости, всегда препятствуют развитию неустойчивостей. Область неустойчивости ламинарного течения сужается. Ограничимся этим общим замечанием о роли сил вязкости, так как нашей целью было только показать на простейшем примере, что ламинарное течение жидкости не всегда устойчиво.

5. При возрастании скорости течения ламинарное движение переходит в турбулентное. Скорость, при которой это происходит, называется *критической*. Вместо скорости лучше пользоваться безразмерной величиной — числом Рейнольдса. Действительно, соображения о подобии, изложенные в предыдущем параграфе, относятся к турбулентным течениям, а также к переходу от ламинарного режима течения к турбулентному. Поэтому *в геометрически по-*

добных системах переход от ламинарного режима течения к турбулентному должен происходить при одних и тех же значениях числа Рейнольдса. Этот закон был установлен Рейнольдсом из соображений теории размерности. Граничное значение числа Рейнольдса, при котором ламинарный режим течения сменяется турбулентным, называется *критическим числом Рейнольдса* и обозначается как $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$. Значение $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$ зависит от конфигурации тел, обтекаемых жидкостью, а также от степени возмущенности самого ламинарного течения. Так, при течении по прямолинейной трубе с круглым сечением $\mathrm{Re}_{\text{кр}} = \overline{v}a/\nu \approx 1100$, если трубы непосредственно присоединены к водопроводу и не приняты специальные предосторожности для уменьшения возмущенности воды у края трубы (a — радиус трубы, $\overline{v}$ — средняя скорость течения). Начальную возмущенность можно уменьшить, применяя трубы с гладкими стенками и закругленными краями. Кроме того, следует присоединять их к большому баку с водой и подождать, пока вода в нем не успокоится. Таким путем удается добиться затягивания ламинарного режима в трубах до значительно больших $\mathrm{Re}_{\text{кр}}$, например до $\mathrm{Re}_{\text{кр}} \approx 25\,000$.

6. Законы Пуазейля, как уже указывалось, относятся только к ламинарным течениям жидкости по трубе. Предположение о ламинарности было явно использовано при выводе формул (97.4) и (97.16). Но не столь очевидно, где используется это предположение при выводе формулы Пуазейля (97.11) методом теории размерности. Разберем этот вопрос, а также выясним, какой формулой должна быть заменена формула Пуазейля при турбулентном течении. При турбулентном течении частицы жидкости движутся с *ускорениями*, а потому существенную роль должна играть *плотность жидкости* ρ. Она не обязательно должна входить в комбинации Q/ρ, как было при ламинарном течении. Напротив, величины Q и ρ могут входить независимо. Функциональная связь должна существовать между пятью величинами

$$Q,\ \rho,\ \frac{P_1 - P_2}{l},\ S,\ \eta,$$

а не между четырьмя, как было при ламинарном течении. Из этих пяти величин можно составить две независимые безразмерные комбинации, например

$$\frac{Q}{\rho}\,\frac{l}{P_1 - P_2}\,\frac{\eta}{S^2} \quad \text{и} \quad \mathrm{Re} \equiv \frac{\overline{v}a}{\nu},$$

где $\overline{v}$ — средняя скорость течения, определяемая соотношением $Q = \rho\overline{v}S$, a — радиус трубы, $\nu = \eta/\rho$ — кинематическая вязкость. Согласно правилу размерности одна из этих безразмерных комбинаций является функцией другой. Это приводит к соотношению

$$Q = C(\mathrm{Re})\,\frac{P_1 - P_2}{l\eta}\,\rho S^2. \qquad (99.3)$$

При ламинарном течении коэффициент C есть постоянная, зависящая только от формы поперечного сечения трубы. При турбулентном течении этот коэффициент становится функцией числа Рейнольдса. Формулу (99.3) нетрудно преобразовать к виду

$$\frac{P_1 - P_2}{l} = \frac{\lambda(\mathrm{Re})}{a}\,\frac{\rho\overline{v}^2}{2}, \qquad (99.4)$$

в каком ее обычно пишут в гидравлике. Коэффициент λ связан с C соотношением

$$\lambda(\mathrm{Re}) = \frac{2}{\pi C(\mathrm{Re})\,\mathrm{Re}}.$$

Он называется *коэффициентом сопротивления трубы*. При ламинарном течении коэффициент сопротивления обратно пропорционален числу Рейнольдса. При турбулентном течении вид функции $\lambda(\mathrm{Re})$ устанавливается эмпирически.

По поводу приведенного вывода формул (99.3) и (99.4) необходимо сделать следующее замечание. Турбулентное течение есть нестационарное течение. На регулярное движение накладываются нерегулярные колебания и вращения — *пульсации*, которым свойственны определенные периоды во времени. Таким образом, речь идет о нестационарном движении с определенным *характерным временем* и даже несколькими *характерными временами*. Поэтому, казалось бы, в формулах (99.3) и (99.4) коэффициенты C и λ должны были бы зависеть не только от числа Рейнольдса, но и от чисел Струхаля. Однако при установившейся турбулентности число Струхаля само является функцией числа Рейнольдса, а потому нет никакого смысла вводить его в формулы (99.3) и (99.4).

ЗАДАЧА

Так как в идеальной жидкости при любых движениях не могут возникать касательные силы, то возможны *разрывные течения*, в которых касательные составляющие скорости жидкости претерпевают разрыв на некоторой поверхности (неподвижной или движущейся). Такие течения называются *тангенциальными разрывами*. Показать, что тангенциальные разрывы в несжимаемой жидкости гидродинамически неустойчивы.

Решение. Понятно, что давление по разные стороны от поверхности разрыва должно быть одинаково. При стационарном течении поверхность тангенциального разрыва неподвижна в пространстве. Поэтому на ней лежат линии тока. Пусть AB — одна из них (рис. 263 *а*). Допустим, что в результате какого-то бесконечно малого возмущения на линии тока AB возник бугор (рис. 263 *б*). Тогда со стороны I расстояния между линиями тока уменьшатся, а скорость жидкости увеличится. Напротив, со стороны II расстояния между линиями тока будут больше, и скорость жидкости уменьшится. Согласно закону Бернулли давление со стороны II возрастет, а со стороны I упадет. Под влиянием возросшей разности давлений бугор будет увеличиваться еще больше, т. е. движение является гидродинамически неустойчивым. Такой неустойчивостью объясняется развевание флагов на ветру.

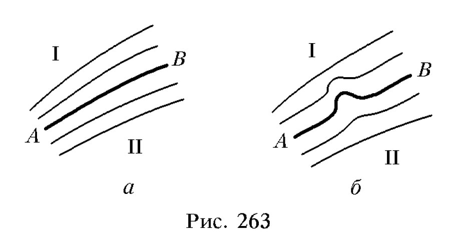


Рис. 263

§ 100. ПАРАДОКС ДАЛАМБЕРА. РАЗРЫВНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

1. Оставшиеся параграфы этой главы будут посвящены силовым действиям потока жидкости на находящиеся в ней тела. Ввиду относительности движения эта проблема эквивалентна проблеме нахождения сил, действующих на тела, движущиеся в неподвижной

жидкости. Проблема эта очень обширна и сложна. Во всем объеме она разбирается в специальных курсах гидродинамики и аэродинамики. В общем курсе физики на ней можно остановиться очень кратко, ограничиваясь в основном качественным рассмотрением.

Силу, действующую на тело со стороны потока жидкости, можно разложить на две составляющие: в направлении потока $\mathbf{F}_x$ и перпендикулярную к потоку $\mathbf{F}_y$. Сила $\mathbf{F}_x$ называется *лобовым сопротивлением*, сила $\mathbf{F}_y$ — *подъемной силой*. Подъемная сила действует на крылья летящего самолета. С ней связано представление о силе, направленной вверх. Но подъемная сила может быть направлена и вниз в зависимости от ориентации самолета относительно направления полета. Лобовое сопротивление $\mathbf{F}_x$ слагается из двух различных сил: силы разности давлений на переднюю и заднюю поверхности тела и из вязких сил трения. При больших скоростях (точнее, при больших числах Рейнольдса) преобладающую роль играют разности давлений, при малых — силы вязкости.

2. Рассмотрим прежде всего стационарное течение идеальной несжимаемой жидкости. Допустим, что в отсутствие внешних тел жидкость течет параллельным потоком. Поместим в него какое-либо тело K (рис. 264). Оно исказит поток. Но на достаточно больших расстояниях от тела K (в «бесконечности») поток останется параллельным. По истечении некоторого времени движение жидкости установится. К этому установившемуся течению и относятся последующие рассуждения. Для конкретности будем считать, что жидкость течет в прямолинейной трубе. Вдали от тела K линии тока параллельны стенкам трубы и вследствие несжимаемости жидкости скорость ее в этих участках трубы одна и та же. А в силу уравнения Бернулли будет одинаково и давление P. Рассмотрим часть жидкости $ABDC$, внутри которой находится тело K. Предполагается, что сечения AB и CD находятся далеко от тела K, так что через них жидкость течет параллельным потоком. Спустя короткое время выделенная часть жидкости перейдет в положение $A'B'D'C'$. При этом ее импульс останется без изменения. Действительно, в начальном положении импульс жидкости представляется суммой

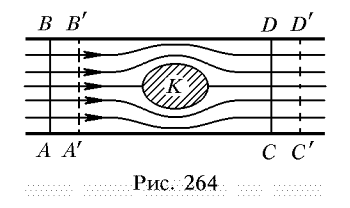


Рис. 264

$$\mathbf{I}_1 = \text{импульс жидкости в объеме } A'B'DC + \\ + \text{импульс жидкости в объеме } ABB'A',$$

а в конечном положении:

$$\mathbf{I}_2 = \text{импульс жидкости в объеме } A'B'DC + \\ + \text{импульс жидкости в объеме } CDD'C'.$$

Но в силу стационарности течения импульс жидкости в объеме $A'B'DC$ один и тот же в обоих случаях. А вследствие одинаковости скорости течения на «бесконечности» импульсы жидкости в объемах $ABB'A'$ и $CDD'C'$ также одинаковы. Итак, при обтекании тела K импульс жидкости не изменяется. Следовательно, полная сила, действующая на рассматриваемый объем жидкости в направлении потока, равна нулю. Но эта сила слагается из сил давления на основаниях AB и CD из силы $\mathbf{F}'_x$, с которой действует на жидкость тело K. (Давление стенок можно не принимать во внимание, так как оно не дает слагающей в направлении потока.) Силы давления на основаниях AB и CD уравновешивают друг друга, а потому $\mathbf{F}'_x = 0$. Следовательно, обращается в нуль и лобовое сопротивление $\mathbf{F}_x$.

Допустим теперь, что труба берется все шире и шире. Наш вывод остается справедливым для сколь угодно широкой трубы. Он остается верным и в пределе, когда трубы совсем нет, а поток во всех поперечных направлениях простирается до бесконечности. Итак, при стационарном течении идеальной несжимаемой жидкости или при равномерном движении тела в ней лобовое сопротивление равно нулю. Этот вывод в свое время казался неожиданным. Он получил название *парадокса Даламбера* (1717—1783). Наличие этого парадокса указывает на то, что при определении лобового сопротивления, испытываемого телом при равномерном движении в жидкости, последнюю нельзя рассматривать как идеальную.

3. Наш вывод относится только к лобовому сопротивлению $\mathbf{F}_x$, но не к подъемной силе $\mathbf{F}_y$, и моменту сил $\mathbf{M}$, с которым поток жидкости действует на тело. Момент $\mathbf{M}$ относительно центра масс равен нулю в тех случаях, когда тело симметрично и симметрично расположено относительно потока. Если такое условие не выполнено, то это, вообще говоря, не так. При обтекании тела происходит смещение всего потока жидкости вбок, т. е. в направлении, перпендикулярном к направлению невозмущенного потока. Это вызывает изменение момента импульса жидкости и ведет к появлению момента сил $\mathbf{M}$, действующего на тело. В результате момент $\mathbf{M}$ поворачивает тело, пока он не обратится в нуль и течение жидкости в окрестности тела K вновь станет стационарным. Что касается подъемной силы $\mathbf{F}_y$, то к этому вопросу вернемся в § 103.

4. Если тело движется неравномерно, то парадокс Даламбера не возникает. Дело в том, что с движущимся телом всегда связана какая-то масса жидкости, увлекаемая им. Она называется *присоединенной массой*. При ускорении тела ускоряется и присоединенная масса жидкости. Поэтому для сообщения ускорения телу в жидкости требуется большая сила, чем для сообщения такого же ускорения при отсутствии жидкости. Это и значит, что жидкость оказывает сопротивление телу, движущемуся в ней ускоренно.

5. Парадокс Даламбера легко уяснить, если рассмотреть картину линий тока. На схематическом рис. 265 изображены линии тока при

стационарном обтекании цилиндра или шара идеальной жидкостью. Линии тока *совершенно симметричны* по отношению к направлению вперед и назад (*зеркальная симметрия*). А скорости частиц жидкости в соответствующих точках перед и за телом равны по модулю и отличаются только направлением. Но в уравнение Бернулли (94.4) скорость v входит в квадрате. Поэтому распределения давления в потоке перед и за телом *совершенно одинаковы*. Давление на переднюю поверхность тела уравновешивается давлением на заднюю поверхность, а следовательно, лобовое сопротивление равно нулю.

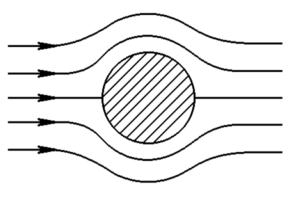


Рис. 265

Если тело, а следовательно, и поток жидкости не обладают симметрией, то рассуждение осложняется. Однако и в этом случае ввиду отсутствия потерь энергии стационарное течение идеальной жидкости обладает следующим свойством. Если в некоторый момент времени изменить на противоположные направления движения всех частиц жидкости, то они будут двигаться по тем же линиям тока с теми же по модулю, но противоположными по направлению скоростями. Так как в уравнение Бернулли скорость течения входит в квадрате, то при таком обращении направления течения распределение давления в жидкости не изменится. Не изменится также модуль и направление силы $\mathbf{F}$, с которой жидкость действует на обтекаемое тело. В частности, не меняется лобовое сопротивление $\mathbf{F}_x$. С другой стороны, опыт показывает, что сила $\mathbf{F}_x$ всегда направлена по течению *), а потому при обращении течения сила $\mathbf{F}_x$ должна изменить знак. Отсюда непосредственно следует, что $\mathbf{F}_x = 0$. К подъемной силе эти соображения неприменимы, так как нет оснований утверждать, что при обращении направления потока должна менять направление и подъемная сила.

6. Во всем изложенном предполагалось, что поток жидкости является *непрерывным*. Однако уравнения гидродинамики допускают и такие стационарные течения, в которых скорость жидкости претерпевает разрыв непрерывности. На эту возможность обратил внимание немецкий физик Густав Кирхгоф (1824—1887). Представим себе, что к телу K прикреплена бесконечно тонкая эластичная перегородка $MCDN$ (рис. 266). Пусть пространство $MCDN$, ограниченное этой перегородкой, заполнено неподвижной жидкостью, находящейся под постоянным давлением P_0. Пусть эту систему тел обтекает идеальная несжимаемая жидкость. Тогда при стационарном течении граница $MCDN$ будет вести себя как поверхность твердого тела, и часть линий тока расположится вдоль этой поверхности. Ширина бесконечно тонких трубок тока в окрестности поверхности

*) Теоретически это не обязательно (см. сноску на с. 524). Сила F_x могла бы быть направлена и против течения. Однако эта возможность представляет чисто умозрительный интерес.

MCDN будет изменяться по такому закону, чтобы обеспечить постоянство скорости жидкости вдоль всей поверхности *MCDN*. Тогда, согласно уравнению Бернулли, будет постоянно и давление жидкости на этой поверхности. Если убрать эластичную перегородку, то характер течения жидкости не изменится. Действительно, поверхность *MCDN* останется поверхностью постоянного нормального давления, а тангенциальные силы появиться не могут из-за идеальности жидкости. Получилось стационарное течение жидкости с тангенциальным разрывом на поверхности *MCDN* (см. задачу к § 98). Оно характеризуется тем, что на некоторой линии обтекаемого тела происходит *отрыв течения от тела.* Таких течений, очевидно, можно представить бесконечное множество. Они отличаются друг от друга положением *линии отрыва CD* и формой поверхности тангенциального разрыва *MCDN*. Давление в *области застоя* (т. е. области, где жидкость покоится) P_0, очевидно, равно давлению на линии отрыва *CD*. Последнее же меньше давления в критической точке *B*. Это приводит к тому, что равнодействующая сил давления, действующих на переднюю поверхность тела, превышает соответствующую силу, действующую на заднюю сторону его. В результате появляется лобовое сопротивление $\mathbf{F}_x$*).

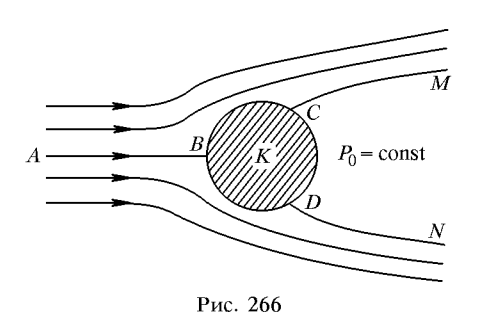


Рис. 266

7. Тангенциальные разрывы гидродинамически неустойчивы (см. задачу к § 98). Поверхности разрыва распадаются в *вихри.* Тем не менее идеальные разрывные течения с отрывом от обтекаемого тела, рассмотренные выше, не совсем лишены интереса. Они в известном смысле могут рассматриваться как предельные случаи реальных течений вязкой жидкости. Силы вязкости мало существенны вдали от обтекаемого тела, где они малы. Их влияние проявляется главным образом в тонком *пограничном слое* вблизи поверхности тела, где они велики. Они приводят к отрыву течения от тела. При этом вместо области застоя за телом возникает область интенсивного турбулентного движения. Наличие такой области и ведет к возникновению лобового сопротивления. При этом силы вязкости автоматически устраняют неоднозначность в положении линии отрыва, характерную для разрывных течений идеальных жидкостей. Чем у́же область отрыва, тем меньше лобовое сопротивление. С целью

*) Если обратить направление течения, то модуль и направление силы $\mathbf{F}_x$ не изменятся. В обращенном течении сила $\mathbf{F}_x$ направлена против течения, т. е. «лобовое сопротивление» отрицательно. Это случай, который имелся в виду в сноске на с. 523 как теоретически возможный.

уменьшения лобового сопротивления самолетам, судам, автомобилям и прочим быстроходным самодвижущимся аппаратам придают «обтекаемую форму».

§ 101. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТИ

1. Отвлечемся на время от механизма возникновения силы **F**, с которой стационарный поток несжимаемой жидкости действует на неподвижное тело, и применим к этой проблеме методы теории размерности. Сила **F** зависит от формы и размеров тела, от ориентации его по отношению к потоку, от скорости потока **v** (на «бесконечности»), а также от свойств жидкости. Ориентацию крыла самолета принято характеризовать *углом атаки*, т. е. углом между плоскостью крыла и направлением полета. Не будем вводить явно такие параметры, предполагая, что мы имеем дело с телами не только геометрически подобными, но и подобно расположенными. Свойства жидкости характеризуются ее плотностью ρ и вязкостью η. Таким образом, должна существовать функциональная связь между величинами **F**, v, ρ, η, S, где S — характерная площадь поперечного сечения тела. Корень квадратный из нее $\sqrt{S} = l$ может служить характерным линейным размером тела. Из этих пяти величин можно составить две независимые безразмерные комбинации. За таковые можно принять $\frac{\mathbf{F}}{\rho v^2 S}$ и число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{\rho l v}{\eta}$. Согласно правилу размерности одна из этих комбинаций является функцией другой. В результате получим

$$\mathbf{F} = \frac{\rho v^2}{2} SC(\mathrm{Re}), \qquad (101.1)$$

или

$$F_x = \frac{\rho v^2}{2} SC_x(\mathrm{Re}), \qquad (101.2)$$

$$F_y = \frac{\rho v^2}{2} SC_y(\mathrm{Re}). \qquad (101.3)$$

Безразмерные коэффициенты $C_x(\mathrm{Re})$ и $C_y(\mathrm{Re})$ называются соответственно коэффициентами *лобового сопротивления* и *подъемной силы*. Оба они являются функциями числа Рейнольдса и зависят от формы тела и его ориентации по отношению к потоку. Теоретическое вычисление этих коэффициентов затруднительно, они обычно определяются опытным путем.

2. При больших числах Рейнольдса лобовое сопротивление F_x обусловлено почти исключительно разностью давлений. Если обтекаемое тело имеет сзади заостренные края, то отрыв течения за телом происходит в одном и том же месте, положение которого не зависит от скорости потока. (Примером может служить пластинка,

поставленная перпендикулярно к направлению потока. Отрыв течения происходит на ее краях.) В этих случаях коэффициент лобового сопротивления приблизительно постоянен, а само лобовое сопротивление пропорционально квадрату скорости v. Понять это проще всего, если воспользоваться идеализированной картиной разрывного течения (рис. 265). Действительно, если при всех скоростях отрыв течения происходит в одном и том же месте, то характерная площадь поперечного сечения S не зависит от скорости. С другой стороны, разность давлений перед и за телом по закону Бернулли равна $\frac{1}{2}\rho v^2$. Отсюда и получается формула (101.2) с постоянным коэффициентом C_x. При больших скоростях v порядка скорости звука и выше коэффициенты C_x и C_y зависят не только от числа Рейнольдса Re, но и от числа Маха M.

3. Рассмотрим теперь случай малых чисел Рейнольдса. В этом случае основной интерес представляет сила лобового сопротивления F_x. Инерция, а с ней и плотность жидкости не играют существенной роли, сила F_x определяется почти исключительно вязкостью. Поэтому плотность ρ должна выпадать из формулы (101.2). Это будет тогда и только тогда, когда коэффициент лобового сопротивления обратно пропорционален числу Рейнольдса, т. е.

$$C_x = \frac{A}{\mathrm{Re}},$$

где A — безразмерная постоянная. Подставляя выражение для Re, получим

$$F_x = A\eta l v. \qquad (101.4)$$

Эта формула справедлива при малых числах Рейнольдса ($\mathrm{Re} \ll 1$), так как она выведена в предположении, что влияние инерции жидкости пренебрежимо мало по сравнению с влиянием вязкости. Коэффициент A зависит от формы тела и его ориентации относительно потока. Его теоретическое вычисление довольно кропотливо и требует интегрирования уравнений движения вязкой жидкости. Джорджем Стоксом (1819—1903) было показано, что $A = 6\pi$, если за характерный размер l принять радиус шара a. Таким образом, получается *формула Стокса*

$$F_x = 6\pi\eta a v. \qquad (101.5)$$

Так как формула (101.5) получила широкие применения в очень важных физических опытах (определение заряда электрона методом Милликена, броуновское движение и пр.), то имеет смысл более подробно выяснить на конкретных примерах границы ее применимости.

В опытах американского физика-экспериментатора Роберта Милликена (1868—1953) по определению заряда электрона формула Стокса (101.5) применялась к капелькам масла, падавшим в воздухе под действием силы тяжести. Если m — масса капли, то при установившемся равномерном па-

дении вес капли mg должен уравновешиваться силой вязкости $6\pi\eta a v$, а потому $mg = 6\pi\eta a v$ (архимедовой подъемной силой пренебрегаем). Если ρ_0 — плотность масла, то масса капли $m = 4/3\ \pi a^3\rho_0$. Используя это значение, находим сначала скорость капли v, а затем и число Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho a v}{\eta} = \frac{2}{9}\,\frac{a^3\rho\rho_0 g}{\eta^2},$$

где ρ — плотность воздуха. Условие применимости формулы Стокса $\mathrm{Re} \ll 1$ дает

$$a^3 \ll \frac{9}{2}\,\frac{\eta^2}{\rho\rho_0 g}.$$

Подставляя сюда $\eta = 1{,}8\cdot 10^{-4}$ г/(с·см), $\rho = 1{,}29\cdot 10^{-3}$ г/см^3, $\rho_0 = 0{,}9$ г/см^3, найдем, что для применимости формулы Стокса должно выполняться условие $a \ll 0{,}05$ мм. Формулу можно применять для мельчайших капелек тумана. Однако о применении ее к каплям дождя, даже самым мелким, не может быть и речи.

В качестве второго примера возьмем капельки ртути, падающие в жидкости под действием собственного веса. По скорости установившегося падения капли можно вычислить вязкость жидкости. Это дает практический метод измерения вязкости. В рассматриваемом случае надо учитывать архимедову выталкивающую силу. Если ρ_0 — плотность ртути, ρ и η — плотность и вязкость исследуемой жидкости, то для применимости формулы Стокса необходимо выполнение условия

$$a^3 \ll \frac{9}{2}\,\frac{\eta^2}{(\rho_0-\rho)\rho g}.$$

Для воды $\eta = 0{,}010$ г/(с·см), и мы получаем $a \ll 0{,}15$ мм.

§ 102. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ И ВИХРЕВЫЕ ДВИЖЕНИЯ

1. Все движения жидкостей подразделяются на *потенциальные* и *вихревые*. Рассмотрим поле скоростей жидкости $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ в какой-то фиксированный момент времени. Возьмем в жидкости произвольный замкнутый контур C и на нем установим положительное направление обхода (рис. 267). Пусть $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной, а $d\mathbf{s}$ — элемент длины контура, проведенные в положительном направлении. Интеграл

$$\Gamma = \oint_C v_\tau\, ds = \oint_C (\mathbf{v}\, d\mathbf{s}) \qquad (102.1)$$

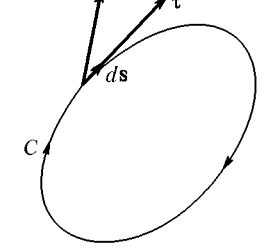


Рис. 267

называется *циркуляцией вектора скорости* по контуру C. Если циркуляция скорости по любому замкнутому контуру обращается в нуль, то движение жидкости называется потенциальным. В противном случае движение называется *вихревым*.

При этом предполагается, что область пространства, в которой течет жидкость, *односвязна*. Это значит, что любой замкнутый контур в такой области непрерывной деформацией может быть стянут в точку, не пересекая при этом обтекаемые тела. Если же область не односвязна (например, жидкость, обтекающая тор), то приведенные определения необходимо дополнить следующими замечаниями. В качестве C следует брать не все контуры, а только произвольные замкнутые контуры, которые непрерывной деформацией могут быть стянуты в точку, не выходя при этом за границы жидкости. Важным случаем может служить так называемое *плоское течение*, являющееся идеализацией действительных течений. Пусть обтекаемое тело является бесконечно длинным цилиндром с произвольным поперечным сечением, а жидкость течет перпендикулярно к оси этого цилиндра. Тогда достаточно ограничиться рассмотрением течения в одной из плоскостей, перпендикулярных к той же оси. Течение в этой плоскости и называется плоским. Оно будет потенциальным, если циркуляция скорости обращается в нуль по любому замкнутому контуру, *не охватывающему обтекаемый цилиндр*, например контур C_1 (рис. 268). Но циркуляция по контуру C, окружающему цилиндр, может и не обращаться в нуль. Нетрудно показать, что при потенциальном течении циркуляция Γ будет одной и той же для всех замкнутых контуров, обходящих вокруг цилиндра один раз. Если $\Gamma \neq 0$, то говорят о *потенциальном течении с циркуляцией*.

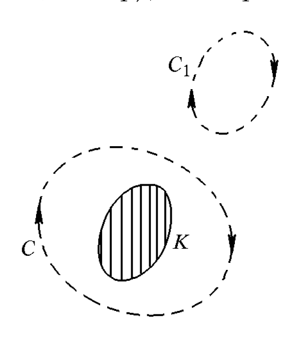


Рис. 268

2. Определение потенциального течения совершенно аналогично определению консервативных сил (см. § 24). Поэтому при потенциальном течении линейный интеграл $\int\limits_{AB} (\mathbf{v}\,d\mathbf{s})$, взятый вдоль незамкнутой кривой, соединяющей точки A и B, зависит только от положения крайних точек этой кривой A и B, но не зависит от формы самой кривой AB. Рассуждая так же, как в случае потенциальной энергии, можно ввести функцию координат φ, через которую скорость $\mathbf{v}$ выражается формулой

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi \qquad (102.2)$$

(см. § 29). Функция φ называется *потенциалом скоростей*.

Примером потенциального течения может служить течение жидкости вдоль параллельных прямых линий с постоянной скоростью. Можно показать, что *всякое течение идеальной жидкости, возник-*

шее из состояния покоя под действием консервативных сил, является потенциальным.

3. Примером вихревого движения может служить плоское течение жидкости, когда частицы последней вращаются по концентрическим окружностям с одной и той же угловой скоростью ω (рис. 269). Циркуляция скорости по окружности радиуса r в этом случае равна $\Gamma = 2\pi r v = 2\pi r^2 \omega$, ее отношение к площади контура πr^2 будет $\Gamma/(\pi r^2) = 2\omega$, т. е. не зависит от радиуса r. Если угловая скорость вращения зависит от радиуса r, то вместо отношения $\Gamma/(\pi r^2)$ берут его предел при $r \to 0$. Ясно, что этот предел равен удвоенному значению угловой скорости, с которой вращаются частицы жидкости вблизи оси O. Этот предел называется *вихрем* или *ротором* скорости $\mathbf{v}$, точнее, проекцией ротора на направление, перпендикулярное к плоскости контура. Вообще, для произвольного движения ротор скорости $\mathbf{v}$ определяется своими проекциями на произвольное направление следующим образом. Берется произвольный бесконечно малый контур с площадью ΔS и внешней нормалью $\mathbf{n}$. Проекция вектора $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ на направление нормали $\mathbf{n}$ определяется соотношением

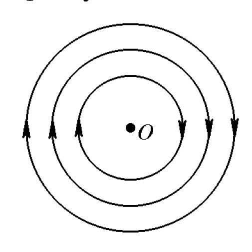


Рис. 269

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{v} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Gamma}{\Delta S}, \qquad (102.3)$$

где Γ — циркуляция вектора $\mathbf{v}$ вдоль рассматриваемого контура.

4. В качестве второго примера рассмотрим плоское течение жидкости параллельно оси X, когда скорость потока меняется в поперечном направлении по линейному закону $v_x = ay$ (рис. 270). Чтобы убедиться в вихревом характере течения, возьмем прямоугольный контур $ABCD$ со сторонами, параллельными координатным осям. Циркуляция скорости по этому контуру будет

$$\Gamma = (x_2 - x_1)(v_1 - v_2) = -a(x_2 - x_1)(y_2 - y_1).$$

Ее отношение к площади контура $\Delta S = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$, или ротор скорости $\mathbf{v}$ будет

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{v} = -a,$$

или

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{v} = -\frac{\partial v_x}{\partial y}. \qquad (102.4)$$

Если v_x меняется с координатой y не по линейному закону, а произвольно, то формула (102.4) остается верной, однако $\operatorname{rot}_z \mathbf{v}$ становится функцией координаты y.

Заметим еще, что в разбираемом примере скорость **v** можно представить в виде векторной суммы двух векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ с компонентами

$$v_{1x} = \frac{v_x}{2} = \frac{a}{2} y, \quad v_{2x} = \frac{v_x}{2} = \frac{a}{2} y,$$

$$v_{1y} = -\frac{a}{2} x, \quad v_{2y} = \frac{a}{2} x.$$

Вектор $\mathbf{v}_1$ представляется векторным произведением

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{a}{2}[\mathbf{kr}] = \frac{a}{2} y\mathbf{i} - \frac{a}{2} x\mathbf{j}.$$

Поэтому движение со скоростью $\mathbf{v}_1$ может быть интерпретировано как вращение вокруг оси Z с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = -\frac{a}{2}\mathbf{k}$. Компоненты же вектора $\mathbf{v}_2$ могут быть получены из потенциала скорости $\varphi = \frac{a}{2} xy$ по формулам

$$v_{2x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_{2y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

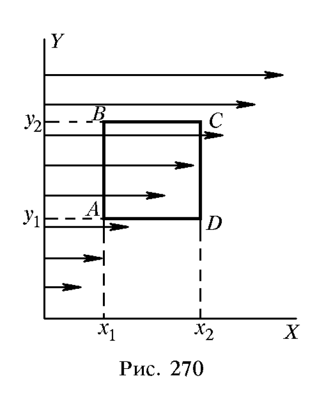


Рис. 270

Значит, движение со скоростью $\mathbf{v}_2$ является потенциальным. Можно в общем виде показать, что произвольное движение жидкости можно разложить на *вращение* и *потенциальное течение*, причем угловая скорость вращения и ее направление в пространстве могут непрерывно меняться от точки к точке.

Тангенциальный разрыв может рассматриваться как пример вихревого течения. В вихревом характере движения в этом случае можно убедиться совершенно так же, как при разборе последнего примера. Распадаясь, тангенциальный разрыв переходит в вихревое турбулентное движение.

§ 103. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ И ЯВЛЕНИЕ ОТРЫВА

1. При больших числах Рейнольдса силы вязкости вдали от поверхности обтекаемого тела не играют существенной роли. Здесь они малы по сравнению с силами, обусловленными разностями давлений. Ими можно пренебречь и считать жидкость идеальной. Не так, однако, обстоит дело вблизи поверхности обтекаемого тела. Силы вязкого трения вызывают *прилипание жидкости* к поверхности обтекаемого тела, т. е. удерживают частицы жидкости в состоянии покоя, несмотря на наличие градиента давления в направлении по-

тока жидкости. Отсюда следует, что вблизи поверхности тела силы вязкого трения *того же порядка*, что и силы разности давлений. Чтобы это было так, скорость жидкости должна очень быстро нарастать при удалении от поверхности тела. Это быстрое нарастание происходит в тонком приповерхностном слое жидкости, называемом *пограничным слоем*. Теория пограничного слоя была создана в основном Л. Прандтлем. Дадим качественное представление о некоторых выводах этой теории.

2. Толщина пограничного слоя δ относится к числу не вполне четко определенных понятий, так как граница слоя со стороны жидкости не является резко очерченной. Толщина слоя зависит не только от свойств жидкости, но и от формы поверхности обтекаемого тела. Она не остается постоянной на поверхности тела, а возрастает в направлении потока от передней части тела к задней. Поэтому о точном выражении для δ говорить не приходится. Речь может идти только об оценке. Толщину пограничного слоя легко оценить, если заметить, что в нем силы вязкости и силы, обусловленные разностями давлений, по порядку величины одинаковы. Оценим сначала силу вязкого трения $f_{\text{тр}}$, действующую на единицу объема жидкости в пограничном слое. Градиент скорости жидкости поперек течения в пограничном слое порядка v/δ. Вязкая сила, действующая на площадку S пограничного слоя, будет $\sim \eta S v/\delta$, а сила, действующая на единицу объема,

$$f_{\text{тр}} \sim \frac{\eta S v/\delta}{S\delta} = \eta\,\frac{v}{\delta^2}.$$

Оценим теперь силу разности давлений $f_{\text{дав}}$, также отнесенную к единице объема жидкости. Она равна $f_{\text{дав}} = -\operatorname{grad} P$ (см. § 90). Изменения давления поперек пограничного слоя малы, да и вообще не играют роли в рассматриваемом вопросе, — нас интересует только градиент давления *в направлении потока*. Его можно оценить, рассматривая внешний поток жидкости, т. е. поток вне пограничного слоя. К этому потоку применимо уравнение Бернулли $P = P_0 - \frac{1}{2}\rho v^2$, из которого следует $\operatorname{grad} P = -(\rho/2)\operatorname{grad} v^2$. Значит, по порядку величины сила $f_{\text{дав}} \sim \rho v^2/l$, где l — характерный линейный размер обтекаемого тела. Приравнивая обе силы $f_{\text{тр}}$ и $f_{\text{дав}}$, получаем после выполнения элементарных арифметических действий

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\eta l}{\rho v}}, \tag{103.1}$$

или

$$\delta \sim \frac{l}{\sqrt{\mathrm{Re}}}. \tag{103.2}$$

Например, для шара диаметром $D = 10$ см в потоке воздуха, движущегося со скоростью $v = 30$ м/с, число Рейнольдса равно

$\mathrm{Re} = vD/\nu = 2 \cdot 10^5$ (кинематическая вязкость воздуха при 20 °C $\nu = 0{,}15$ см^2/с), а толщина пограничного слоя $\delta \approx D/\sqrt{\mathrm{Re}} \approx 0{,}2$ мм.

3. При малых значениях числа Рейнольдса порядка единицы и меньше соображения, на которых основан вывод формулы (103.2), неприменимы. Тем не менее и в этих случаях формула (103.2) приводит к качественно верному выводу, что толщина пограничного слоя становится порядка размеров тела. При таких условиях говорить о пограничном слое уже не имеет смысла. Представление о пограничном слое непременимо также и к стационарному ламинарному течению жидкости по трубе. Причина этого в том, что при таком движении силы вязкости уравновешиваются градиентами давлений не только вблизи стенок трубы, но и *во всем объеме жидкости*. И действительно, согласно формулам (97.2) и (97.3), скорость жидкости в круглой трубе определяется выражением

$$v = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

Профиль скорости совершенно не зависит от вязкости жидкости, а следовательно, и от числа Рейнольдса. Если пользоваться представлением о пограничном слое, то следует сказать, что пограничный слой заполняет всю трубу, каковы бы ни были значения числа Рейнольдса. Но в таких условиях понятие пограничного слоя становится бессодержательным. Поэтому в дальнейшем такие случаи не рассматриваются, а речь идет о потоке жидкости, обтекающем тело, причем предполагается, что числа Рейнольдса велики.

4. Поскольку в пограничном слое скорость меняется в направлении, перпендикулярном к слою, движение жидкости в пограничном слое является вихревым. А всякое вихревое движение содержит вращение, с которым связан момент импульса (см. § 102, п. 4).

5. Если бы пограничный слой, образующийся в результате действия сил вязкости, не отрывался от тела, то изучение движения жидкости можно было бы производить в предположении ее идеальности. Влияние пограничного слоя свелось бы к некоторому увеличению эффективных размеров тела. Именно так ведет себя пограничный слой на передней части тела, обращенной к потоку жидкости. Однако на задней части тела пограничный слой в большинстве случаев время от времени *отрывается* от поверхности обтекаемого тела. В этих случаях предположение о полном отсутствии сил вязкости приводит к результатам, совершенно не согласующимся с действительностью. Отрыв пограничного слоя приводит к качественным изменениям всей картины обтекания тела.

Почему же происходит отрыв пограничного слоя и к каким последствиям он приводит? Благодаря силам вязкости частицы жидкости в пограничном слое движутся медленнее, чем во внешнем потоке. Во внешнем потоке имеется разность давлений, вызывающая ускорение или замедление потока. Такая же

разность давлений должна существовать и в пограничном слое, так как разность давлений между границами слоя пренебрежимо мала (в противоположном случае частицы жидкости в пограничном слое имели бы ускорения, перпендикулярные к поверхности тела). Во внешнем потоке, обтекающем переднюю часть тела, давление падает в направлении движения жидкости. Следовательно, то же самое будет и в пограничном слое. Сила разности давлений направлена вдоль по течению. Поэтому не только во внешнем потоке, но и в пограничном слое скорости частиц жидкости увеличиваются, что позволяет им продолжать движение по поверхности тела, несмотря на действие сил трения. Не то происходит в потоке, обтекающем заднюю часть тела. Здесь давление возрастает в направлении потока. Движение замедляется как во внешнем потоке, так и в пограничном слое. А так как в пограничном слое частицы движутся медленнее, чем во внешнем потоке, то при достаточном замедлении последнего они могут остановится и даже начать движение в обратную сторону. В результате около поверхности обтекаемого тела возникнет *возвратное движение* жидкости, несмотря на то, что внешний поток продолжает по-прежнему двигаться вперед. Новые массы жидкости, подтекающие к месту возникновения возвратного течения, также сначала останавливаются, а затем начинают двигаться назад. (При недостаточно сильном замедлении внешнего потока возвратное движение пограничного слоя может и не возникнуть.) Количество заторможенной жидкости между поверхностью тела и внешним потоком быстро увеличивается, возвратное движение распространяется все шире и шире и, наконец, совершенно оттесняет внешний поток от поверхности тела. Возникает отрыв течения от обтекаемого тела. Получающаяся поверхность разрыва неустойчива и быстро свертывается в вихрь. При этом часть заторможенной жидкости оказывается вовлеченной в область вихря, а самый вихрь уносится течением.

6. Все эти стадии образования вихря хорошо видны на рис. 271 *а*, *б*, *в* на котором представлены шесть последовательных фотографий потока воды, обтекающего неподвижный цилиндр *). Для того чтобы линии тока сделать видимыми, поверхность текущей воды обсыпалась порошком алюминия. В первый момент вокруг цилиндра возникало потенциальное течение, линии тока которого, расходившиеся перед цилиндром, вновь смыкались позади него. Дальнейшие фотографии показывают, как меняется последующее течение жидкости. На последних трех фотографиях видно, что за цилиндром образуются два вихря. Сначала один из них, а затем и другой отрываются от цилиндра

*) Фотографии рисунков 271, 272, 273, 279, 280, 281 взяты из книги: Прандтль Л., Титьенс О. Гидро- и аэромеханика. Т. II — М.; Л.: ОНТИ, 1935. На рис. 271 течение направлено слева направо.

и уносятся потоком жидкости. Уносимые вихри сменяются новыми, попеременно возникающими в каждом из двух потоков, отрывающихся сверху и снизу от поверхности обтекаемого тела. Все эти вихри уносятся от тела с одинаковой скоростью. Такая система вихрей называ-

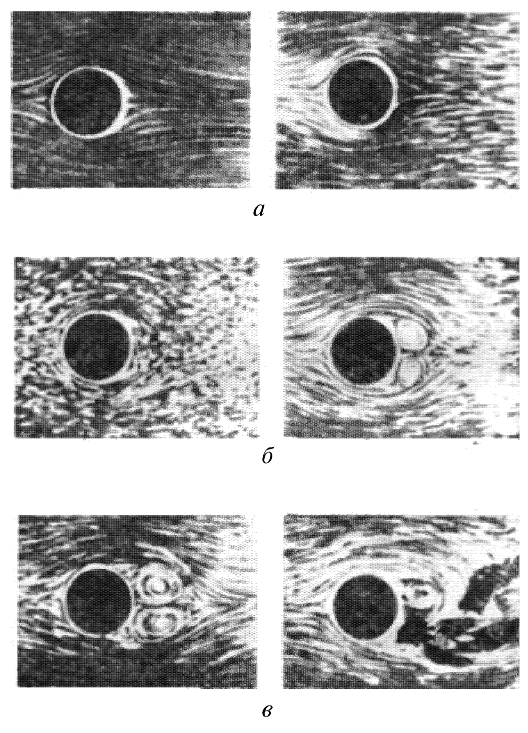


Рис. 271

ется *вихревой дорожкой Кармана* по имени ученого Кармана (1881—1963), теоретически изучившего ее. Она представлена на рис. 272 и 273. Первый рисунок представляет картину течения в системе отсчета, в которой цилиндр неподвижен, а жидкость течет слева направо; второй — в системе отсчета, в которой неподвижна невозмущенная жидкость, а цилиндр движется справа налево. Скорость, с которой уносятся вихри, меньше скорости потока, так как в вихрях собираются как раз те частицы жидкости, которые тормозились при обтекании тела. Поэтому импульс, уносимый потоком жидкости вместе с движущимися в ней вихрями, меньше импульса, который приносит поток, натекающий на тело. Это уменьшение импульса потока жидкости проявляется в возникновении силы лобового сопротивления, действующей на тело в направлении потока.

7. Из изложенного видно, что представлением о пограничном слое можно пользоваться только на передней части тела, простирающейся

до того места, в котором происходит отрыв течения от поверхности тела (это место называется *линией отрыва*). Начиная с этого места за

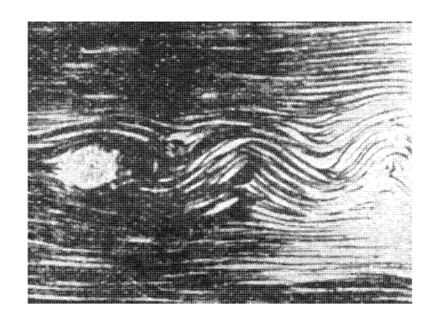


Рис. 272

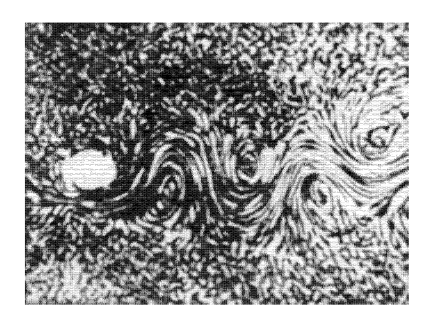


Рис. 273

телом возникает область течения, длина которой обычно намного превосходит характерные размеры самого тела (рис. 274). В эту область попадают частицы из пограничного слоя. Поэтому средняя скорость течения в ней меньше скорости набегающего потока, а само течение вихревое и, как правило, турбулентное. Эта область называется *следом*. Наличием следа и объясняется та часть лобового сопротивления, которая обусловлена разностью давлений на переднюю и заднюю части тела. Чем шире область отрыва, т. е. чем шире след, тем больше при прочих равных условиях лобовое сопротивление. Существованием следа, как мы увидим в следующем параграфе, объясняется и возникновение подъемной силы.

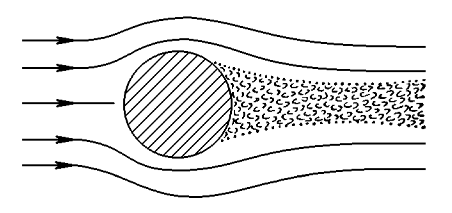


Рис. 274

8. При не очень больших числах Рейнольдса движение в пограничном слое является ламинарным. При увеличении числа Рейнольдса ламинарное течение становится неустойчивым и начинается турбулизация пограничного слоя. Она начинается с задней части пограничного слоя, примыкающей к линии отрыва, и постепенно распространяется на переднюю часть слоя. Таким образом, в передней части пограничный слой ламинарный, затем он переходит в турбулентный, а за линией отрыва образуется след. Для шара турбулизация пограничного слоя начинается при числах Рейнольдса $\sim 3 \cdot 10^5$. Следствием турбулизации пограничного слоя является смещение линии отрыва к задней части тела и связанное с ним сужение следа. В результате коэффициент лобового сопротивления C_x и даже само лобовое сопротивление F_x уменьшаются. Это явление называется *кризисом сопротивления*. Кризис сопртивления может и

не наступить, если с увеличением скорости течения линия отрыва не смещается. Тогда коэффициент сопротивления C_x становится не зависящим от числа Рейнольдса. Так будет, например, при обтекании пластинки с резкими краями, поставленной перпендикулярно к потоку. Здесь линия отрыва определяется чисто геометрическими соображениями и совпадает с краями пластинки.

§ 104. ПОДЪЕМНАЯ СИЛА КРЫЛА САМОЛЕТА

1. С явлением отрыва связано и возникновение подъемной силы. Нас будет интересовать главным образом подъемная сила, действующая на крыло самолета, хотя механизм возникновения подъемной силы в случае тел другой формы сохраняется тем же самым. При полете самолета с постоянной скоростью его ориентация в пространстве остается неизменной. Это указывает на то, что при таком полете моменты всех внешних сил, действующих на самолет, уравновешиваются, а его момент импульса остается неизменным. Для упрощения будем рассматривать отдельное крыло, равномерно движущееся в воздухе и ориентированное перпендикулярно к плоскости рисунка (рис. 275). Длину крыла будем считать бесконечно большой. Такое крыло называется *крылом бесконечного размаха.* Удобно перейти к системе отсчета, связанной с крылом, поместив начало координат в одну из точек крыла, например в его центр масс C. Понятно, что эта система отсчета будет инерциальной.

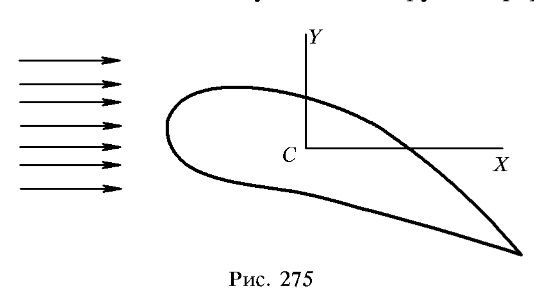


Рис. 275

Таким образом, мы предполагаем, что крыло неподвижно, а течение воздуха плоское. Невозмущенный поток, конечно, будет равномерным. Во избежание недоразумений все моменты импульса, о которых говорится ниже, будет брать относительно точки C. Момент импульса самого крыла равен нулю, и о нем в дальнейшем можно не говорить.

2. Для возникновения подъемной силы необходимо, чтобы крыло было *несимметрично* или *несимметрично расположено* относительно горизонтальной плоскости, в которой оно движется. При движении круглого невращающегося цилиндра, например, никакой подъемной силы возникнуть не может. Поэтому мы предполагаем, что указанной симметрии нет. Напомним теперь, что в пограничном слое скорости частиц воздуха возрастают при удалении от по-

верхности крыла. Благодаря этому движение в пограничном слое вихревое, а потому содержит вращение. Сверху крыла вращение совершается по часовой стрелке, а снизу — против (если поток жидкости натекает слева направо). Допустим, что в результате отрыва какая-то масса воздуха, ранее находившаяся в пограничном слое снизу от крыла, унесена потоком в виде одного или нескольких вихрей. Обладая вращением, эта масса унесет и связанный с ней момент импульса. Но общий момент импульса воздуха не может измениться. Если отрыв пограничного слоя сверху от крыла не произошел, то для сохранения момента импульса воздух во внешнем потоке должен начать вращаться вокруг крыла по часовой стрелке. Иными словами, во внешнем потоке вокруг крыла должна возникнуть циркуляция скорости воздуха по часовой стрелке, накладывающаяся на основной поток. Скорость потока под крылом уменьшится, а над ним — увеличится. К внешнему потоку применимо уравнение Бернулли. Из него следует, что в результате циркуляции давление под крылом возрастет, а над ним — уменьшится. Возникшая разность давлений проявляется в подъемной силе, направленной вверх. Наоборот, если унесенные вихри образовались из частиц пограничного слоя сверху крыла, то возникнет циркуляция против часовой стрелки, а «подъемная» сила будет направлена вниз.

3. Для уяснения явления полезно рассмотреть тонкую пластинку, поставленную на пути потока идеальной жидкости. Если пластинка ориентирована вдоль потока, то критические точки, в которых скорость жидкости обращается в нуль, находятся на краях A и B (рис. 276 *а*). Если пластинка поставлена перпендикулярно к потоку, то обе критические точки смещаются к центру пластинки, а скорость течения достигает максимума на краях пластинки A и B (рис. 276 *б*). Если же пластинка поставлена на-

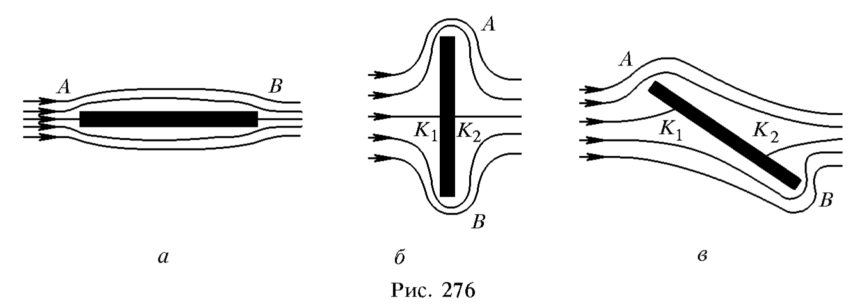


Рис. 276

клонно к потоку (рис. 276 *в*), то критические точки K_1 и K_2 занимают промежуточные положения между центром пластинки и ее краями. Скорость течения по-прежнему максимальна на краях пластинки. В окрестности критической точки K_2 она больше снизу, чем сверху, так как нижний поток расположен значительно

ближе к краю B пластинки, чем верхний к краю A. Такая же картина течения образуется в начальный момент и при течении вязкой жидкости.

4. Так и в случае крыла самолета поток воздуха под крылом в начале движения огибает заднюю кромку крыла и встречается

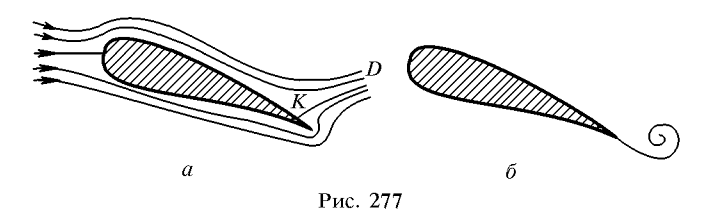


Рис. 277

вдоль линии KD с потоком, огибающим крыло сверху. Здесь образуется поверхность раздела, свертывающаяся в дальнейшем в вихрь, причем вращение происходит против часовой стрелки (рис. 277 *а* и *б*). Все это видно на рис. 278, 279, 280 (фотографии), причем первые два рисунка изображают течение в системе

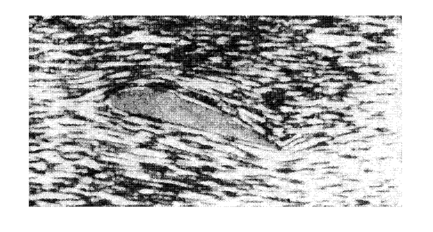


Рис. 278

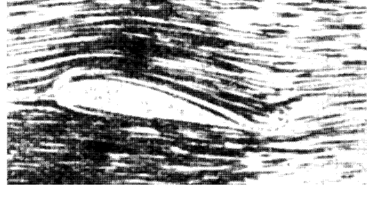


Рис. 279

отсчета, в которой неподвижно крыло, а последний — в системе отсчета, в которой неподвижна невозмущенная жидкость. Вихри уносят момент импульса, а вокруг крыла образуется циркуляция по часовой стрелке. Возрастание скорости течения над крылом и уменьшение ее под крылом приводят к смещению линии отрыва, пока она не достигнет нижней кромки крыла (рис. 281). Если бы

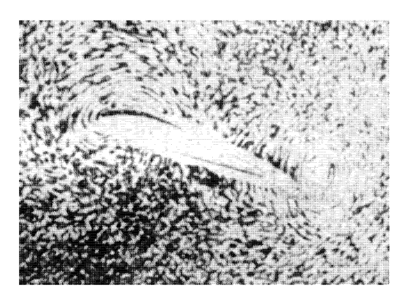


Рис. 280

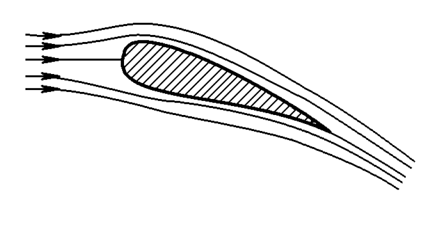


Рис. 281

не было сил вязкости, то дальнейшее образование вихрей, а с ним и циркуляции вокруг крыла прекратились бы. Силы вязкости меняют дело. Благодаря им циркуляция вокруг крыла постепенно затухает. Линия отрыва смещается от кромки крыла вверх, т. е. вновь появляются условия для возникновения вихрей. Появляющиеся вихри вновь усиливают циркуляцию и возвращают линию отрыва к кромке крыла. При постоянной скорости движения самолета описанный процесс носит регулярный характер — вихри периодически отрываются от задней кромки крыла и поддерживают практически постоянную циркуляцию.

5. Зависимость подъемной силы от циркуляции скорости была установлена независимо друг от друга Н. Е. Жуковским и Кутта. Их формула относится к крылу бесконечного размаха и дает значение подъемной силы, отнесенное к единице длины такого крыла. Формула предполагает, что крыло движется равномерно в идеальной жидкости, и вокруг него установилась циркуляция скорости постоянной величины.

Таким образом, в системе отсчета, в которой крыло неподвижно, движение жидкости потенциально, но с циркуляцией. В идеальной жидкости циркуляция практически может быть любой, никак не связанной со скоростью потока, углом атаки и прочими параметрами. Однако вязкость, хотя бы и предельно малая, приводит к однозначной зависимости циркуляции от этих параметров.

При этом сама циркуляция от вязкости практически не зависит. Поэтому формула Жуковского—Кутта дает хорошее приближение для подъемной силы крыла также и в воздухе, обладающем вязкостью.

6. Приведем простейший вывод *формулы Жуковского—Кутта*, из которого с особой отчетливостью выяснится, почему для возникновения подъемной силы существенна циркуляция. Допустим, что поток жидкости простирается во все стороны до бесконечности. Как и раньше, будем предполагать, что невозмущенный поток горизонтален; ось X направлена вдоль потока, а ось Y — вертикально вверх (перпендикулярно к нему).

Пусть крыло K помещено в начале координат (рис. 282). Поместим над крылом и под ним бесконечное множество в точности таких же крыльев, находящихся на равных расстояниях друг от друга. Пусть вокруг каждого крыла возбуждена такая же циркуляция, как и вокруг крыла K. Тогда установившееся течение жидкости будет строго периодично по y. Если расстояние между соседними крыльями очень велико по сравнению с поперечными размерами крыла, то введение добавочных крыльев может исказить течение в непосредственной близости крыла K только пренебрежимо мало. Существенные изменения произойдут лишь вдали от крыла K. Проведем прямолинейный контур $ABCD$, горизонтальные стороны которого проходят посередине между соседними крыльями. Пусть длина его AD бесконечно велика по сравнению с высотой. На боковых сторонах AB и CD скорость v слагается

из горизонтальной скорости $\mathbf{v}_\infty$ невозмущенного потока и вертикальной скорости $\mathbf{v}'$, обусловленной циркуляцией. За положительную цир-

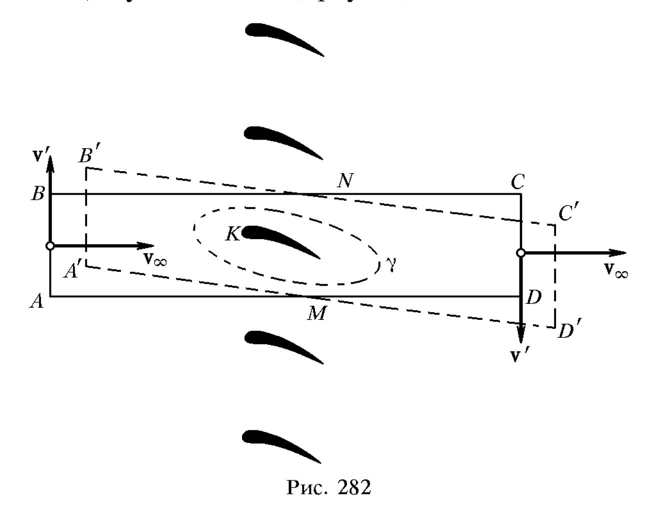


Рис. 282

куляцию примем циркуляцию по часовой стрелке. При такой циркуляции на стороне AB скорость $\mathbf{v}'$ будет направлен вверх (положительна), а на CD — вниз (отрицательна). Рассмотрим жидкость в прямоугольном параллелепипеде с основанием $ABCD$ и единичной высотой, перпендикулярной к плоскости рисунка. Через время dt жидкость, находившаяся в параллелепипеде, переместится в объем $A'B'C'D'$. Рассчитаем приращение импульса ее $d\mathbf{I}$. При стационарном течении это приращение будет равно разности в один и тот же момент времени между импульсом жидкости в новых частях пространства, которые она заняла за время dt, и импульсом в тех частях пространства, из которых она ушла за то же время. Но ввиду полной периодичности картины движения в направлении оси Y импульсы в объемах $AA'M$ и $BB'N$ в точности одинаковы. Одинаковы и импульсы в объемах MDD' и NCC'. Поэтому искомое приращение импульса $d\mathbf{I}$ найдется, если из импульса в объеме $CC'D'D$ вычесть импульс в объеме $AA'B'B$. Каждый из этих объемов равен $lv_\infty\, dt$, где l — длина стороны $AB = CD$; горизонтальные скорости v_∞ одинаковые в обоих объемах, а вертикальные скорости v' отличаются знаками. Поэтому приращение получает только вертикальная составляющая импульса, и это приращение равно

$$dI_y = -2lv_\infty \rho v'\, dt.$$

Но $2lv' = \Gamma$ есть циркуляция скорости v' по контуру $ABCD$, так как стороны AD и BC никакого вклада в циркуляцию не дают. Скорость $\mathbf{v}'$ на этих сторонах одна и та же, и при обходе по контуру $ABCD$ они проходятся в противоположных направлениях. Величина Γ есть в то же время циркуляция по контуру $ABCD$ полной скорости

$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty + \mathbf{v}'$, так как очевидно, что постоянный член $\mathbf{v}_\infty$ никакого вклада в циркуляцию внести не может. Таким образом,

$$dI_y = -\Gamma \rho v_\infty \, dt.$$

Приращение импульса жидкости равно импульсу внешних сил, действующих на нее. Из них силы давления, действующие на рассматриваемую массу жидкости на поверхности $ABCD$, можно не принимать во внимание, так как равнодействующая всех таких сил давления равна нулю. Остается единственная сила, с которой крыло действует на жидкость. Она равна и противоположна по знаку подъемной силе F_y. Применяя теорему об импульсе силы, получаем

$$F_y = \Gamma \rho v_\infty. \qquad (104.1)$$

Из вывода ясно, что под Γ следует понимать циркуляцию по контуру $ABCD$. Но для потенциального течения контур циркуляции γ можно провести произвольно. Важно только, чтобы он охватывал крыло K и не охватывал другие крылья. Взяв в качестве γ произвольный контур, будем удалять в бесконечность все остальные крылья, не трогая при этом сам контур γ. Тогда в пределе мы придем к случаю единственного крыла, обтекаемого потоком жидкости. В этом предельном случае результат (104.1) сохраняет силу. Формула (104.1) и есть формула Жуковского—Кутта.

§ 105. ЭФФЕКТ МАГНУСА

1. Если неподвижный круглый цилиндр обтекается равномерным потоком воздуха, перпендикулярным к его оси, то вследствие симметрии возникает только лобовое сопротивление, но никакой подъемной силы не появляется. Если, однако, цилиндр привести во вращение, то появляется подъемная сила, перпендикулярная к направлению внешнего потока, и цилиндр отклоняется в сторону. Это явление называется *эффектом Магнуса* (по имени немецкого физика Генриха Магнуса (1802—1870), ученого, открывшего и исследовавшего это явление экспериментально). Допустим сначала, что цилиндр только вращается с постоянной скоростью, например,

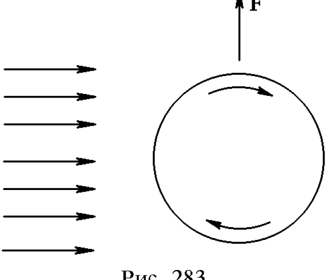


Рис. 283

по часовой стрелке (рис. 283). Из-за трения приходит в движение и окружающий воздух. Образуется пограничный слой. Движение в пограничном слое вихревое, оно слагается из потенциального движения, на которое накладывается вращение. Ввиду того, что скорость воздуха убывает наружу, вращение в пограничном слое про-

исходит против часовой стрелки, т. е. противоположно вращению самого цилиндра. При больших числах Рейнольдса ламинарное движение в пограничном слое неустойчиво (см. § 99) и должно переходить в турбулентное. Но и в турбулентном пограничном слое вращение частиц воздуха в основном должно происходить противоположно направлению вращения цилиндра. Допустим теперь, что вращающийся цилиндр обдувается равномерным потоком воздуха слева направо. Сверху цилиндра направление потока совпадает с направлением вращения цилиндра, а снизу — противоположно ему. Частицы в пограничном слое сверху цилиндра ускоряются потоком, что препятствует отрыву пограничного слоя. Наоборот, снизу поток тормозит движение в пограничном слое и способствует его отрыву. Отрывающиеся части пограничного слоя уносятся потоком в виде вихрей, в которых направление вращения происходит против часовой стрелки. Вследствие этого вокруг цилиндра возникает циркуляция скорости в противоположном направлении, т. е. в том же направлении, в каком вращается цилиндр. Вместе с циркуляцией появляется и подъемная сила, направленная вверх. При изменении направления вращения цилиндра на противоположное подъемная сила также меняет направление на противоположное. Разумеется, и в этом случае (для бесконечно длинного цилиндра) величина подъемной силы определяется формулой Жуковского—Кутта (104.1).

2. Эффект Магнуса можно продемонстрировать, поместив прямой круглый цилиндр в вертикальном положении на легкую тележку, стоящую на горизонтальных рельсах. Цилиндр приводится во вращение маленьким электроматорчиком и обдувается потоком воздуха. Если поток воздуха направить перпендикулярно к рельсам, то тележка начинает катиться по ним.

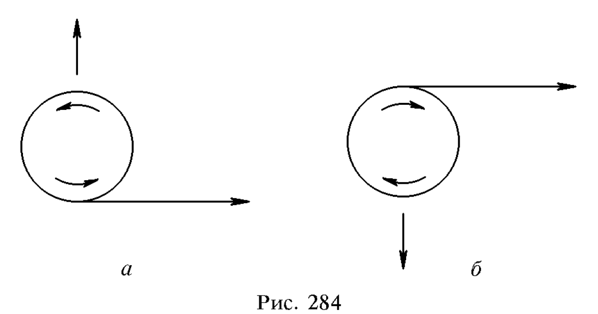


Рис. 284

То же происходит, если поток воздуха направлен под углом к рельсам. Можно даже заставить тележку катиться «против ветра» под острым углом. При перемене направления вращения цилиндра тележка катится в противоположную сторону.

Вот другая демонстрация того же эффекта. На легкую картонную катушку наматывается лента, другой конец которой прикрепляется к длинной палке. Катушка кладется в горизонтальном положении на стол. Если быстро дернуть за палку, то катушка начинает вращаться и одновременно приоб-

ретает горизонтальную скорость. Из-за появляющейся подъемной силы катушка взмывает вверх (рис. 284 *а*). Если намотать ленту так, как показано на рис. 284 *б*, то «подъемная сила» изменит направление и будет прижимать катушку к столу.

Бумажный цилиндр, скатившийся с наклонной плоскости, при дальнейшем падении отклоняется назад. Аналогично ведет себя теннисный мяч после «резаного» удара, который сообщает ему вращение. Вот эти явления могут служить иллюстрацией эффекта Магнуса.

3. Флеттнер предложил использовать эффект Магнуса для приведения в движение корабля энергией ветра. Вместо парусов он установил цилиндры (роторы), приводимые в быстрое вращение с помощью моторов. На концах цилиндров помещались выступающие круглые диски (как у катушки) для уменьшения вредного засасывания воздуха в область потока с пониженным давлением. Испытания показали техническую пригодность таких роторных кораблей. Однако в экономическом отношении они оказались менее выгодными, чем обычные моторные суда, а потому не получили распространения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ЕДИНИЦЫ И РАЗМЕРНОСТИ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН В СИ

Определения единиц физических величин для основных (выделенных полужирным шрифтом) и дополнительных единиц СИ. Внесистемные единицы, допустимые к применению наравне с единицами СИ, отмечены кружком

Величина		Единица		
наименование	размерность	наименование	обозначение	связь с основными единицами СИ
Длина	**L**	**метр**	**м**	**Основная единица** Метр представляет собой расстояние, проходимое в вакууме плоской электромагнитной волной за 1/299 792 458 долю секунды
		°астрономическая единица длины	а. е.	1 а. е. $= 1{,}49598 \cdot 10^{11}$ м
		°световой год	св. год	1 св. год $= 9{,}4605 \cdot 10^{15}$ м
		°парсек	пк	1 пк $= 3{,}0857 \cdot 10^{16}$ м
Площадь	L^2	квадратный метр	$м^2$	
		°гектар	га	1 га $= 10^4$ $м^2$
Объем	L^3	кубический метр	$м^3$	
		°литр	л	1 л $= 10^{-3}$ $м^3$
Плоский угол		радиан	рад	*Дополнительная единица* Радиан равен углу между двумя радиусами окружности, длина дуга между которыми равна радиусу
		°градус	$...^\circ$	$1^\circ = (\pi/180)$ рад
		°минута	$...'$	$1' = (\pi/10\,800)$ рад
		°секунда	$...''$	$1'' = (\pi/648\,000)$ рад
Телесный угол	—	стерадиан	ср	*Дополнительная единица* Стерадиан равен телесному углу с вершиной в центре сферы, вырезающему на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы

Величина		Единица		
наименование	размерность	наименование	обозначение	связь с основными единицами **СИ**
Время	**T**	**секунда** °минута °час °сутки	**с** мин ч сут	**Основная единица** Секунда равна 9 192 631 770 периодов излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133 1 мин = 60 с 1 ч = 3600 с 1 сут = 86 400 с
Скорость	LT^{-1}	метр в секунду	м/с	
Ускорение	LT^{-2}	метр в секунду в квадрате	м/с^2	
Угловая скорость	T^{-1}	радиан в секунду	рад/с	1 рад/с = 1 с$^{-1}$
Угловое ускорение	T^{-2}	радиан на секунду в квадрате	рад/с^2	1 рад/с^2 = 1 с$^{-2}$
Частота периодического процесса	T^{-1}	герц	Гц	1 Гц = 1 с$^{-1}$
Частота вращения	T^{-1}	секунда в минус первой степени	с$^{-1}$	
Масса	**M**	килограмм °тонна °атомная единица массы	**кг** т а. е. м.	**Основная единица** Килограмм равен массе международного прототипа килограмма 1 т = 10^3 кг 1 *а. е. м.* = 1,6605655 · 10^{-27} кг
Плотность	$L^{-3}M$	килограмм на кубический метр	кг/м^3	

Величина		Единица		
наименование	размерность	наименование	обозначение	связь с основными единицами СИ
Удельный объем	L^3M^{-1}	килограмм на кубический метр	м^3/кг	
Массовый расход	MT^{-1}	килограмм в секунду	кг/с	
Объемный расход	L^3T^{-1}	кубический метр в секунду	м^3/с	
Сила	LMT^{-2}	ньютон	Н	1 Н = 1 кг·м·с$^{-2}$
Давление	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па	1 Па = 1 Н/м^2 = 1 м$^{-1}$·кг·с$^{-2}$
Жесткость	MT^{-2}	ньютон на метр	Н/м	1 Н/м = 1 кг·с$^{-2}$
Напряжение (механическое)	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па	1 Па = 1 Н/м^2 = 1 м$^{-1}$·кг·с$^{-2}$
Динамическая вязкость	$L^{-1}MT^{-1}$	паскаль-секунда	Па·с	1 Па·с = 1 м$^{-1}$·кг·с$^{-1}$
Кинематическая вязкость	L^2T^{-1}	квадратный метр в секунду	м^2/с	
Поверхностное натяжение	MT^{-2}	ньютон на метр	Н/м	1 Н/м = 1 кг·с$^{-2}$
Импульс	LMT^{-1}	килограмм-метр в секунду	кг·м/с	
Момент силы	L^2MT^{-2}	ньютон-метр	Н·м	1 Н·м = 1 м^2·кг·с$^{-2}$
Момент импульса	L^2MT^{-1}	килограмм-метр в квадрате в секунду	кг·м^2/с	
Момент инерции	L^2M	килограмм-метр в квадрате	кг·м^2	
Работа, энергия	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	1 Дж = 1 Н·м = 1 м^2·кг·с$^{-2}$

Величина		Единица		
наименование	размерность	наименование	обозначение	связь с основными единицами **СИ**
Мощность, поток энергии	L^2MT^{-3}	ватт	Вт	1 Вт = 1 Дж/с = 1 $м^2 \cdot кг \cdot с^{-3}$
Температура (термодинамическая)	**Θ**	**кельвин** °градус Цельсия	**К** °С	Основная единица Кельвин равен 1/273,16 части термодинамической температуры тройной точки воды $t/°C = T/K - 273{,}15$
Температурный коэффициент	Θ^{-1}	кельвин в минус первой степени	K^{-1}	
Температурный градиент	$L^{-1}\Theta$	кельвин на метр	К/м	
Количество вещества	**N**	**моль**	**моль**	**Основная единица** Моль равен количеству вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде-12 массой 0,012 кг При применении моля структурные элементы должны быть специфицированы и могут быть атомами, молекулами, ионами, электронами и другими частицами или специфицированными группами частиц
Молярная масса	MN^{-1}	килограмм на моль	кг/моль	
Молярный объем	L^3N^{-1}	кубический метр на моль	$м^3$/моль	
Количество теплоты (теплота)	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	1 Дж = 1 Н·м = 1 $м^2 \cdot кг \cdot с^{-2}$
Удельная теплота	L^2T^{-2}	джоуль на килограмм	Дж/кг	1 Дж/кг = 1 $м^2 \cdot с^{-2}$

Величина		Единица		
наименование	размерность	наименование	обозначение	связь с основными единицами СИ
Молярная теплота	$L^2MT^{-2}N^{-1}$	джоуль на моль	Дж/моль	1 Дж/моль = 1 $м^2 \cdot кг \cdot с^{-2} \cdot моль^{-1}$
Теплоемкость, энтропия	$L^2MT^{-2}\Theta^{-1}$	джоуль на кельвин	Дж/К	1 Дж/К = 1 $м^2 \cdot кг \cdot с^{-2} \cdot К^{-1}$
Удельная теплоемкость, удельная энтропия	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	джоуль на килограмм-кельвин	Дж/(кг·К)	1 Дж/(кг·К) = $1 \cdot м^2 \cdot с^{-2} \cdot К^{-1}$
Молярная теплоемкость, молярная энтропия	$L^2MT^{-2}\Theta^{-1}N^{-1}$	джоуль на моль-кельвин	Дж/(моль·К)	1 Дж/(моль·К) = 1 $м^2 \cdot кг \cdot с^{-2} \cdot К^{-1} \cdot моль^{-1}$
Тепловой поток	L^2MT^{-3}	ватт	Вт	1 Вт = 1 Дж/с = 1 $м^2 \cdot кг \cdot с^{-3}$
Плотность теплового потока	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	$Вт/м^2$	1 $Вт/м^2 = кг \cdot с^{-3}$
Теплопроводность	$LMT^{-3}\Theta^{-1}$	ватт на метр-кельвин	Вт/(м·К)	1 Вт/(м·К) = 1 $м \cdot кг \cdot с^{-3} \cdot К^{-1}$
Коэффициент теплопередачи	$MT^{-3}\Theta^{-1}$	ватт на квадратный метр-кельвин	$Вт/(м^2 \cdot К)$	1 $Вт/(м^2 \cdot К)$ = 1 $кг \cdot с^{-3} \cdot К^{-1}$
Концентрация (плотность числа частиц)	L^{-3}	метр в минус третьей степени	$м^{-3}$	
Молярная концентрация	$L^{-3}N$	моль на кубический метр	$моль/м^3$	
Коэффициент диффузии	L^2T^{-1}	квадратный метр на секунду	$м^2/с$	

Величина		Единица		
наименование	размерность	наименование	обозначение	связь с основными единицами СИ
Сила электрического тока	**I**	**ампер**	**А**	**Основная единица** Ампер равен силе неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную $2\cdot10^{-7}$ Н
Плотность электрического тока	$L^{-2}I$	ампер на квадратный метр	А/м^2	
Количество электричества (электрический заряд)	TI	кулон	Кл	1 Кл = 1 с·А
Поверхностная плотность электрического заряда	$L^{-2}TI$	кулон на квадратный метр	Кл/м^2	1 Кл/м^2 = 1 м$^{-2}$с·А
Пространственная плотность электрического заряда	$L^{-3}TI$	кулон на кубический метр	Кл/м^3	1 Кл/м^3 = 1 м$^{-3}$·с·А

Величина		Единица		
наименование	размерность	наименование	обозначение	связь с основными единицами СИ
Электрическое напряжение, электрический потенциал, разность электрических потенциалов, электродвижущая сила	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	вольт	В	1 В = 1 Вт/А = 1 $м^2 \cdot кг \cdot с^{-3} \cdot А^{-1}$
Напряженность электрического поля	$LMT^{-3}I^{-1}$	вольт на метр	В/м	1 В/м = 1 Вт/(А·м) = 1 $м \cdot кг \cdot с^{-3} \cdot А^{-1}$
Электрическое сопротивление	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	ом	Ом	1 Ом = 1 В/А = 1 $\cdot м^2 \cdot кг \cdot с^{-3} \cdot А^{-2}$
Удельное электрическое сопротивление	$L^3MT^{-3}I^{-2}$	ом·метр	Ом·м	1 Ом·м = 1 $м^3 \cdot кг \cdot с^{-3} \cdot А^{-2}$
Электрическая проводимость	$L^{-2}M^{-1}T^3I^2$	сименс	См	1 См = 1 $Ом^{-1}$ = 1 $м^{-2} \cdot кг^{-1} \cdot с^3 \cdot А^2$
Удельная электрическая проводимость	$L^{-3}M^{-1}T^3I^2$	сименс на метр	См/м	1 См/м = 1 $Ом^{-1} \cdot м^{-1}$ = 1 $м^{-3} \cdot кг^{-1} \cdot с^3 \cdot А^2$
Электрическая емкость	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	фарад	Ф	1 Ф = 1 Кл/В = 1 $м^{-2} \cdot кг^{-1} \cdot с^4 \cdot А^2$
Электрическая постоянная, абсолютная диэлектрическая проницаемость	$L^{-3}M^{-1}T^4I^2$	фарад на метр	Ф/м	1 Ф/м = 1 $м^{-3} \cdot кг^{-1} \cdot с^4 \cdot А^2$

Величина		Единица		
наименование	размерность	наименование	обозначение	связь с основными единицами СИ
Поток электрического смещения	TI	кулон	Кл	1 Кл = 1 с·А
Электрическое смещение	$L^{-2}TI$	кулон на квадратный метр	Кл/м^2	1 Кл/м^2 = 1 м$^{-2}$·с·А
Магнитный поток (поток магнитной индукции)	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	вебер	Вб	1 Вб = 1 В·с = 1 Тл·м^2 = 1 м^2·кг·с$^{-2}$·А$^{-1}$
Магнитная индукция (плотность магнитного потока)	$MT^{-2}I^{-1}$	тесла	Тл	1 Тл = 1 В·с/м^2 = 1 Вб/м^2 = 1 кг·с$^{-2}$·А$^{-1}$
Индуктивность	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	генри	Гн	1 Гн = 1 м^2·кг·с$^{-2}$·А$^{-2}$
Магнитная постоянная, абсолютная магнитная проницаемость	$LMT^{-2}I^{-2}$	генри на метр	Гн/м	1 Гн/м = 1 м·кг·с$^{-2}$·А$^{-2}$
Напряженность магнитного поля	$L^{-1}I$	ампер на метр	А/м	
Энергия излучения	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	1 Дж = 1 м^2·кг·с$^{-2}$
Мощность излучения (поток излучения)	L^2MT^{-3}	ватт	Вт	1 Вт = 1 Дж/с = 1 м^2·кг·с$^{-3}$

Величина		Единица		
наименование	размерность	наименование	обозначение	связь с основными единицами СИ
Интенсивность излучения (плотность потока излучения)	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	Вт/м^2	1 Вт/м^2 = 1 кг·с$^{-3}$
Поток частиц	T^{-1}	секунда в минус первой степени	с$^{-1}$	
Плотность потока частиц	$L^{-2}T^{-1}$	секунда в минус первой степени на метр в минус второй степени	с$^{-1}$·м$^{-2}$	
Сила света	**J**	**кандела**	**кд**	**Основная единица** Кандела равна силе света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет 1/683 Вт/ср
Световой поток	J	люмен	лм	1 лм = 1 кд·ср
Световая энергия	TJ	люмен-секунда	лм·с	1 лм·с = 1 с·кд·ср
Светимость	$L^{-2}J$	люмен на квадратный метр	лм/м^2	1 лм/м^2 = 1 м$^{-2}$·кд·ср
Освещенность	$L^{-2}J$	люкс	лк	1 лк = 1 лм/м^2 = 1 м$^{-2}$·кд·ср
Яркость	$L^{-2}J$	кандела на квадратный метр	кд/м^2	
Оптическая сила	L^{-1}	°диоптрия	дптр	1 дптр = 1 м$^{-1}$

Величина		Единица		
наименование	размерность	наименование	обозначение	связь с основными единицами СИ
Энергетическая сила (сила излучения)	L^2MT^{-3}	ватт на стерадиан	Вт/ср	1 Вт/ср = 1 $м^2 \cdot кг \cdot с^{-3} \cdot ср^{-1}$
Энергетическая светимость (излучательность)	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	$Вт/м^2$	1 $Вт/м^2$ = 1 $кг \cdot с^{-3}$
Энергетическая освещенность (облученность)	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	$Вт/м^2$	1 $Вт/м^2$ = 1 $кг \cdot с^{-3}$
Энергетическая яркость (лучистость)	MT^{-3}	ватт на стерадиан-квадратный метр	$Вт/(ср \cdot м^2)$	1 $Вт/(ср \cdot м^2) = 1 \cdot кг \cdot с^{-3} \cdot ср^{-1}$

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ